Kvadratické formy nad $\mathbb{R}$

$g : U \to \mathbb{R}$ je kvadr. forma, která vznikla ze sym. bilin. formy $f : U \times U \to \mathbb{R}$

$$g(u) = f(u,u)$$

Matici kvadr. formy g v bázi $\alpha = (u_1, u_2, \dots u_n)$ nazýváme matici příslušné sym. bilin. formy f

$$A_{ij} = f(u_i, u_j)$$

Máme bijekci mezi kvadr. formami $g : U \to \mathbb{R}$ kde $\dim_{\mathbb{R}} U = n$ a symetrickými maticemi $n \times n$.

$g \longmapsto f$ sym. bilin. forma $\longmapsto A = (A_{ij})$

$A_{ij} = f(u_i, u_j)$

$A \longmapsto g : \quad g(u) = x^T A x = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$.

kde $x = (u)_\alpha$.

Hodnost kvadr. formy definujeme jako hodnost její matice v nějaké bázi.

$B = P^T A P$, Pozorování $h(B) = h(A)$

Sylvestrův zákon setrvačnosti: Pro každou kvadr. formu $g: U \to \mathbb{R}$ existuje báze β taková, že v jejích souřadnicích je

$$g(u) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - x_{p+2}^2 - \dots - x_s^2 + 0 \cdot x_{s+1}^2 + \dots + 0 \cdot x_n^2$$

kde $(u)_\alpha = (x_1, x_2, \dots x_n)^T$.

Počet $1, -1, 0$ v tomto zápisu nezávisí na bázi β.

Důkaz: Již víme, že lze nalézt bázi $\alpha = (u_1, u_2, \dots u_n)$ tak, že

$$g(u) = a_{11} y_1^2 + a_{22} y_2^2 + \dots + a_{nn} y_n^2$$

Jestliže $a_{ii} = 0$ neděláme nic.

Jestliže $a_{ii} > 0$ vezmeme záměnu souřadnic

$$x_i = \sqrt{a_{ii}}\, y_i$$

Pak $a_{ii} y_i^2 = x_i^2$. Místo vektoru u_i v bázi α, vezmeme

(4)

vektor $v_i = \frac{u_i}{\sqrt{a_{ii}}}$ v bázi B.

Jestliže $a_{ii} < 0$, položíme

$$x_i = \sqrt{-a_{ii}}\, y_i$$

Pak

$$a_{ii} y_i^2 = -\left(\sqrt{-a_{ii}}\, y_i\right)^2 = -x_i^2.$$

Opět položíme $v_i = \frac{u_i}{\sqrt{-a_{ii}}}$.

V nové bázi $B = (v_1, v_2, \dots v_n)$ po případné změně pořadí vektorů bude

$$g(u) = x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_s^2 + 0 \cdot x_{s+1}^2 + \dots + 0 \cdot x_n^2$$

Důkaz těžké části: Sporem: předpokládejme, že máme

v bázi $B = (u_1 \dots u_n)$ $\quad g(u) = x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_s^2$

$\mathcal{E} = (v_1 \dots v_n)$ $\quad g(u) = y_1^2 + \dots + y_q^2 - y_{q+1}^2 - \dots$

5

kde $p > q$. Definujme podpriestory v U:

$$P = [u_1, u_2, \dots, u_p]$$

$$Q = [v_{q+1}, v_{q+2}, \dots, v_n]$$

Platí:

(1) pre každé $u \in P \setminus \{\vec{o}\}$ je $g(u) > 0$

$(u)_B = (x_1, x_2, \dots x_p, 0, 0 \dots 0)$ $\quad g(u) = x_1^2 + \dots + x_p^2 > 0.$

(2) pre každé $v \in Q$ je $g(v) \leq 0.$

$(v)_B = (\underbrace{0, \dots 0}_{q}, y_{q+1}, y_{q+2}, \dots y_n)$ $\quad g(v) = -y_{q+1}^2 - \dots\dots \leq 0$

Spočítajme $P \cap Q$.

$$\dim(P \cap Q) = \dim P + \dim Q - \dim(P+Q) \geq$$

$$\geq p + n - q - n = p - q > 0$$

6

Tedy $\dim(P \cap Q) > 0$ a existuje $w \in P \cap Q \setminus \{\vec{o}\}$.

Pro něj platí

$$g(w) > 0 \quad \text{neboť } w \in P \setminus \{\vec{o}\}$$

$$g(w) \leq 0 \quad \text{neboť } w \in Q.$$

Spor.

Sylvestrův zákon setrvačnosti umožňuje definovat signaturu kvadr. formy g jako trojici

$$(s_{+1}, s_{-1}, s_0)$$

kde $s_+ =$ počet 1 v diag. tvaru podle věty

$s_- =$ počet -1

$s_0 =$ počet 0

Podobně signatura symetrické matice A je dvojice (s_+, s_-, s_0), která je signaturou přidružené kvadratické formy.

Definice kongruentních matic

Symetrické matice A a B jsou kongruentní, jestliže existuje regulární matice P tak, že

$$B = P^T A P.$$

Toto je relace ekvivalence.

Důsledek Sylv. zákona setrvačnosti

Každá reálná symetrická matice je kongruentní právě s jednou maticí tvaru

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & 0 \\ & 1 & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Důkaz:

Matice A definuje kvadr. formu $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ v souřadnicích stand. báze

$$g(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \, x_i \, x_j$$

Ve vhodné bázi B je

$$g(x) = y_1^2 + \dots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \dots - y_s^2$$

Její matice v bázi B je tedy

$$B = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & 0 & \\ & & & 1 & & & & & \\ & & & & -1 & & & & \\ & 0 & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & -1 & & \\ & & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Pak

$$B = P^T A P$$

Je to matice stejné kvadr. formy, ale v jiné bázi.

Kriterium kongruence sym. matic

Dvě symetrické matice A a B jsou kongruentní, právě když mají stejnou signaturu.

Důkaz:

A je kongruentní s diag. maticí $D_A = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & -1 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & -1 & & \\ & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$

B je kongruentní s diag. maticí

$$D_B = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & -1 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & -1 & & \\ & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

A je kongruentní s B $\iff$ D_A je kongruentní s D_B a ty jsou kongruentní právě tehdy když $D_A = D_B$.

Příklad

$\operatorname{sign} A = \operatorname{sign} D_A$

$\operatorname{sign} B = \operatorname{sign} D_B$

A je kongruentní s B $\iff D_A = D_B \iff \operatorname{sign} D_A = \operatorname{sign} D_B$

$\iff \operatorname{sign} A = \operatorname{sign} B$

Klasifikace kvadr. forem

Název	Definice	Vlastnost signatury
Pozitivně definitní	$\forall u \in U \setminus \{\vec{o}\}$ $g(u) > 0$	$s_- = s_0 = 0$
Negativně definitní	$\forall u \in U \setminus \{\vec{o}\}$ $g(u) < 0$	$s_+ = s_0 = 0$
Indefinitní	$\exists u$ $g(u) > 0$ $\exists v$ $g(v) < 0$	$s_+ > 0,\ s_- > 0$

Pozitivně semidefinitní	$\forall u \in U$ $g(u) \geq 0$	$s_- = 0$
Negativně semidefinitní	$\forall u \in U$ $g(u) \leq 0$	$s_+ = 0$

$\dim U = n$ $\qquad s_+ + s_- + s_0 = n$

Hodnost kvadr. formy (matice) je

$$h = s_+ + s_-$$

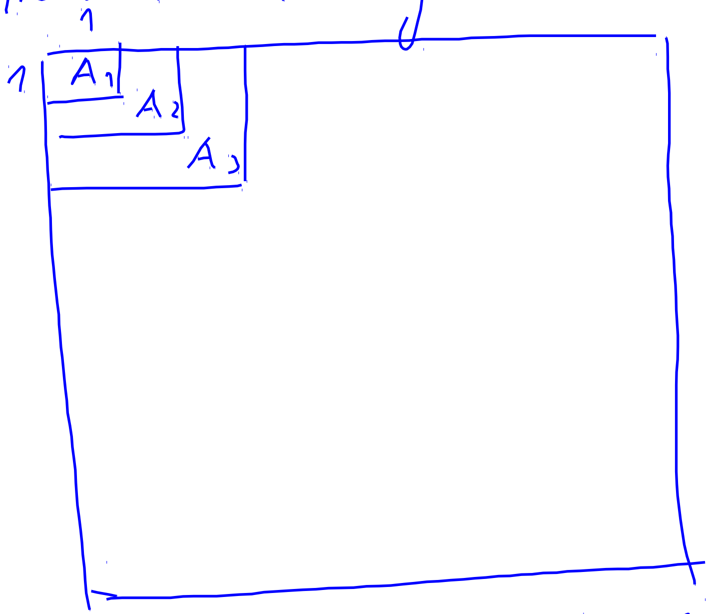
Sylvestrovo kriterium Reálná kvadr. forma $g: U \to \mathbb{R}$ je pozitivně definitní právě když pro hlavní minory její matice platí

$$s_1 > 0,\ s_2 > 0,\ \dots,\ s_n > 0$$

g je negativně definitní, právě když pro hlavní minory platí

$$(-1)^i s_i > 0 \qquad s_1 < 0,\ s_2 > 0,\ s_3 < 0,\ \dots$$

Hlavní minory čtvercové matice A



$$s_i = \det A_i = \det (a_{kj})_{k,j=1}^{i}$$

Důkaz ve skriptech prof. Slováka. Ukážeme si pouze příklad.

$g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \qquad g(x) = 3x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + 4x_1x_3 + 7x_3^2$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

$s_1 = \det(3) = 3$

$s_2 = \det\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 3 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = 2$

$s_3 = \det A = 21 - 4 - 7 = 10$

$s_1 > 0,\ s_2 > 0,\ s_3 > 0 \Rightarrow g$ je pozitivně definitní

Jak si zapamatovat Sylv. kritérium pro negativně definitní kvadr. formy.

$q(x) = -x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_n^2$ je neg. definitní

Její matice je

$$\begin{pmatrix} -1 & & & & \\ & -1 & & & \\ & & -1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & -1 \end{pmatrix}$$

Spočítáme její minory.

$s_1 = -1 < 0$

$s_2 = 1 > 0$

$s_3 = -1 < 0$

$s_4 = 1 > 0$

PROSTORY SE SKALÁRNÍM SOUČINEM

Ze střední školy známe skalární součin v $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 \quad \text{v } \mathbb{R}^2$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 \quad \text{v } \mathbb{R}^3$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

<u>Vlastnosti</u>: jde o symetrické bilin. formy

$$\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

$$\langle x, x \rangle = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 > 0 \text{ pro } x \neq \vec{o}.$$

Příslušná kvadr. forma je pozitivně definitní!

SKALÁRNÍ SOUČIN NA REÁLNÉM VEKT. PROSTORU

$\langle\ \rangle : U \times U \longrightarrow \mathbb{R}$ je skalární součin, jestliže

1) $\langle au + bv, w \rangle = a\langle u, w \rangle + b\langle v, w \rangle$
2) $\langle u, av + bw \rangle = a\langle u, v \rangle + b\langle u, w \rangle$

bilin. forma

3) $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$

symetrická

4) $\forall u \neq \vec{0} \quad \langle u, u \rangle > 0.$

příslušná kvadr. forma je pozitivně definitní

Skalární součin na komplexním vekt. prostoru

Příklad: $U = \mathbb{C}^2$ kdybychom definovali

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2$$

$$x = y = (i, i)$$

$$\langle x, x \rangle = i^2 + i^2 = -2 < 0$$

Chceme definovat velikost vektoru jako $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ a to by nešlo

PROTO ZMĚNÍME VLASTNOST (2)

Příklad $U = \mathbb{C}^2$

Budeme definovat

$$\langle x, y \rangle = x_1 \overline{y_1} + x_2 \overline{y_2}$$

$\overline{}$ znamená komplexně sdružené číslo

Platí

$$\langle x, x \rangle = x_1 \cdot \overline{x_1} + x_2 \overline{x_2} = |x_1|^2 + |x_2|^2 > 0 \text{ pro } x_1 \neq 0 \text{ nebo } x_2 \neq 0$$

Ale nebude platit vlastnost (2)

$$\underline{\langle x, ay + bz \rangle} = x_1 \cdot \overline{(ay_1 + bz_1)} + x_2 \cdot \overline{(ay_2 + bz_2)} =$$

$$= \overline{a}\, x_1 \overline{y_1} + \overline{b}\, x_1 \overline{z_1} + \overline{a}\, x_2 \overline{y_2} + \overline{b}\, x_2 \overline{z_2} =$$

$$= \underline{\overline{a} \langle x, y \rangle + \overline{b} \langle x, z \rangle}$$

SKALÁRNÍ SOUČIN NA KOMPLEXNÍM VEKT. PROSTORU

$\langle\ \rangle : U \times U \to \mathbb{C}$ je skal. součin, jestliže

(1) $\langle au + bv, w\rangle = a\langle u, w\rangle + b\langle v, w\rangle \qquad a, b \in \mathbb{C}$

(2) $\langle u, av + bw\rangle = \underline{\bar{a}\langle u, v\rangle + \bar{b}\langle u, w\rangle}$

(3) $\langle u, v\rangle = \overline{\langle v, u\rangle}$

(4) $\forall u \in U \setminus \{0\} \quad \langle u, u\rangle > 0.$

$(\langle u, u\rangle \in \mathbb{R}$ a navíc $\langle u, u\rangle > 0.)$