SKALÁRNÍ SOUČIN

Příklady ① Standardní skalární součin na $\mathbb{R}^n$

$$\langle x, y\rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

$$\langle x, x\rangle = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \geq 0$$

② Standardní skalární součin na $\mathbb{C}^n$ $\quad \langle \ \rangle : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$

$$\langle x, y\rangle = x_1 \overline{y_1} + x_2 \overline{y_2} + \dots + x_n \overline{y_n}$$

$$\langle x, x\rangle = x_1 \overline{x_1} + x_2 \overline{x_2} + \dots + x_n \overline{x_n} = |x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_n|^2 > 0 \text{ pro } x \neq \vec{0}$$

3 $\mathbb{R}^2$, $\langle\ \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + 6 x_2 y_2 - 2 x_1 y_2 - 2 x_2 y_1$$

sym. bilin. forma s maticí

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$$

kvadr. forma

$$\langle x, x \rangle = x_1^2 + 6 x_2^2 - 4 x_1 x_2$$

je poz. definitní

$d_1 = 1 > 0$

$d_2 = 1 \cdot 6 - (-2)(-2) = 2 > 0$

(4) $U = C[a,b]$ skalární součin kde,

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,dx$$

Lineární v 1. i 2. složce

$$\langle \alpha f + \beta h, g\rangle = \int_a^b (\alpha f + \beta h)(x)\, g(x)\,dx$$

$$= \alpha \int_a^b f(x)g(x)\,dx + \beta \int_a^b h(x)g(x)\,dx = \alpha\langle f, g\rangle + \beta\langle h, g\rangle$$

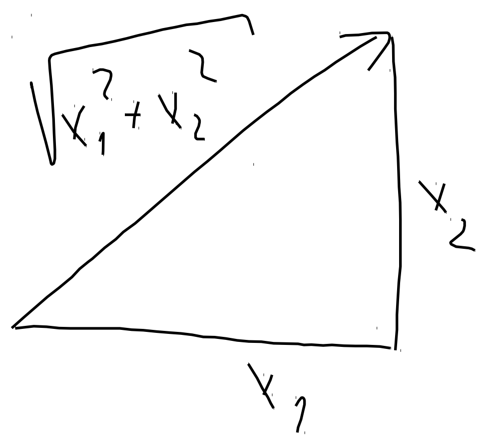
$$\langle f, f\rangle = \int_a^b f(x)^2\,dx > 0 \text{ pro } f \not\equiv 0.$$

(5) U vektor spojitých komplexních funkcí na $[a,b]$

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\,dx$$

Velikost vektoru

Ze střední školy víme, že velikost vektoru $\vec{x} = (x_1, x_2)$ v $\mathbb{R}^2$ je $\|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle}$



Definice. Nechť U je vekt. prostor se skalárním součinem nad $\mathbb{R}$ nebo nad $\mathbb{C}$. Velikost vektoru u (normu) definujeme

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$$

5

Cauchyova - Schwartzova nerovnost

U vekt. prostor se skalárním součinem nad $\mathbb{R}$ nebo nad $\mathbb{C}$.
Pro každé dva vektory $u, v \in U$ platí

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|.$$

Rovnost nastane právě když jsou vektory lin. závislé.

Důkaz pro U nad $\mathbb{R}$

Jestliže $u = \vec{o}$ platí rovnost. Nechť $u \neq \vec{o}$. Potom platí

$$0 \leq \|tu - v\|^2 = \langle tu - v, tu - v \rangle = \underbrace{t^2 \langle u, u \rangle - 2t \langle u, v \rangle + \langle v, v \rangle}_{}$$

kvadratický mnohočlen v t který je pro všechna $t \in \mathbb{R}$ ≥ 0. Proto jeho diskriminant je $D \leq 0$

$$D = (2\langle u,v\rangle)^2 - 4\langle u,u\rangle\langle v,v\rangle \leq 0$$

$$4\langle u,v\rangle^2 \leq 4\|u\|^2\|v\|^2$$

Odmocníme

$$|\langle u,v\rangle| \leq \|u\|\,\|v\|$$

Tím je dokázána nerovnost. Kdy nastane rovnost.
Právě tehdy když existuje t takové, že nastane rovnost zde

$$0 = \|tu - v\|^2$$

tj $v = tu$. Vektory u, v jsou lin. závislé.

Příklady

① Stand. skalární součin v $\mathbb{R}^n$

$$|x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n| \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}\,\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2}$$

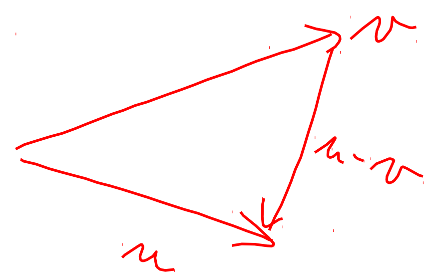
② $U = C[a,b]$ $\quad \langle f,g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,dx$

$$\left| \int_a^b f(x)g(x)\,dx \right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx}\,\sqrt{\int_a^b g^2(x)\,dx}$$

Trojúhelníková nerovnost Pro všechna u a v platí

$$\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

$$\|u-v\| \leq \|u\| + \|v\|$$



8

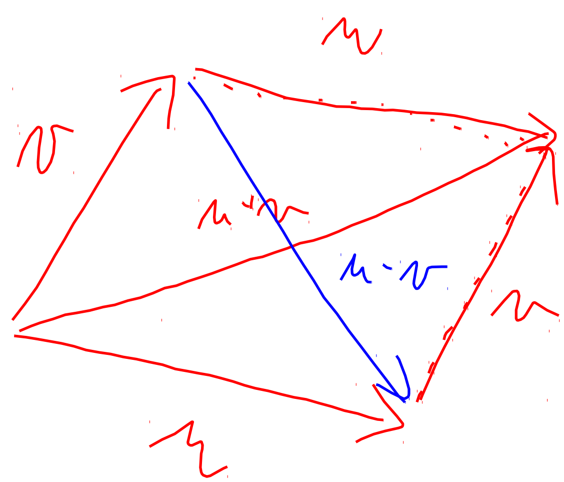
Důkaz:

$$\|u+v\|^2 = \langle u+v, u+v\rangle = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\langle u, v\rangle$$

$$\underset{\text{Cauchyova nerovnost}}{\leq} \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\|u\|\,\|v\| = \left(\|u\| + \|v\|\right)^2$$

Rovnoběžníkové pravidlo

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$$

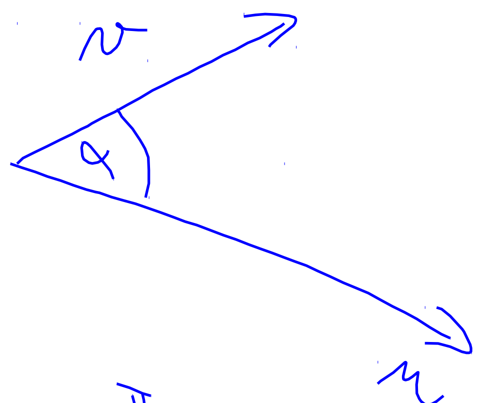


$$\|u+v\|^2+\|u-v\|^2=\langle u+v,u+v\rangle+\langle u-v,u-v\rangle=$$

$$=\langle u,u\rangle+2\langle u,v\rangle+\langle v,v\rangle+\langle u,u\rangle+\langle v,v\rangle-2\langle u,v\rangle=$$

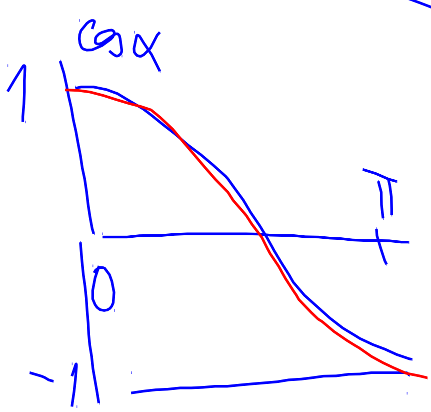
$$=2\|u\|^2+2\|v\|^2$$

Úhel dvou vektorů



$\alpha\in[0,\pi]$ takové, že

$$\cos\alpha=\frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|\,\|v\|}\qquad u,v\neq\vec{o}$$



Díky Cauchyově nerovnosti je

$$\left|\frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|\|v\|}\right|\leq 1$$

Proto má definice smysl a určuje jediné α.

Kolmost vektorů $\vec{u}$ a $\vec{v}$

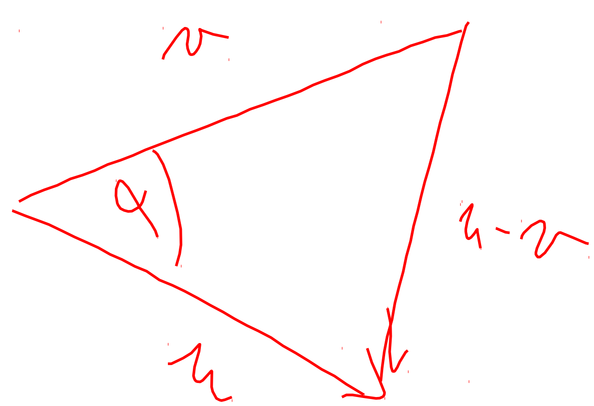
$u \perp v$

$\alpha = \frac{\pi}{2} \qquad \cos\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad \langle u, v \rangle = 0.$

Vektory u, v jsou kolmé, jestliže $\langle u, v \rangle = 0.$

Z výše definované odchylky lze odvodit cosinovou větu

$$\|u-v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\cos\alpha\, \|u\|\,\|v\|$$



$$\langle u-v, u-v\rangle = \langle u,u\rangle + \langle v,v\rangle - 2\langle u,v\rangle$$

$$= \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\cos\alpha\, \|u\|\|v\|$$

neboť

$$\cos\alpha = \frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|\,\|v\|}$$

Pythagorova věta: Jestliže $u \perp v$, pak

$$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$$

$$\|u-v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$$

Systém ortogonálních vektorů

Vektory $u_1, u_2, \dots, u_k \in U$ nazveme ortogonální, jestliže platí $\langle u_i, u_j\rangle = 0$ pro všechna $i \neq j$.

(Navzájem kolmé vektory.)

12

Lemma: Nechť $u_1, u_2, \ldots u_k$ jsou nenulové ortogonální vektory. Pak jsou lin. nezávislé.

Důkaz: nechť $\sum_{i=1}^{k} a_i u_i = \vec{0}$

Tuto rovnici vynásobíme skalárně vektorem u_1:

$$a_1 \underbrace{\langle u_1, u_1 \rangle}_{\neq 0} + a_2 \underbrace{\langle u_2, u_1 \rangle}_{=0} + \ldots + a_k \underbrace{\langle u_k, u_1 \rangle}_{=0} = \langle \vec{0}, u_1 \rangle = 0$$

$$a_1 \langle u_1, u_1 \rangle = 0$$

$$a_1 = 0$$

Obdobně se ukáže, že

$$a_2 = a_3 = \ldots = a_k = 0.$$

Grammův – Schmidtův ortogonalizační proces (GSop)

Mějme vektory $u_1, u_2, \dots, u_k$, které jsou lin. nezávislé.

Pak existují ortogonální vektory $v_1, v_2, \dots, v_k$ takové, že

$$[v_1, v_2, \dots v_i] = [u_1, u_2, \dots u_i]$$

pro všechna $i = 1, 2, \dots, k$. Přitom vektory $v_1, v_2, \dots v_k$ jsou tvaru

$$v_1 = u_1$$

$$v_2 = u_2 - a_1 v_1$$

$$v_3 = u_3 - b_1 v_1 - b_2 v_2$$

$$v_4 = u_4 - c_1 v_1 - c_2 v_2 - c_3 v_3$$

Tím jsou určeny jednoznačně.

(14)

Důkaz

$v_1 = u_1 \qquad [v_1] = [u_1]$

$v_2 = u_2 - a_1 v_1 \qquad$ chceme $v_2 \perp v_1$

Tuto rovnost vynásobíme v_1 skalárně

$$0 = \langle v_2, v_1 \rangle = \langle u_2, v_1 \rangle - a_1 \langle v_1, v_1 \rangle$$

$$a_1 = \frac{\langle u_2, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2}$$

$$[v_1, v_2] = [u_1, u_2 - a_1 u_1] = [u_1, u_2]$$

$v_3 = u_3 - b_1 v_1 - b_2 v_2 \qquad$ chceme $v_3 \perp v_1, v_2$

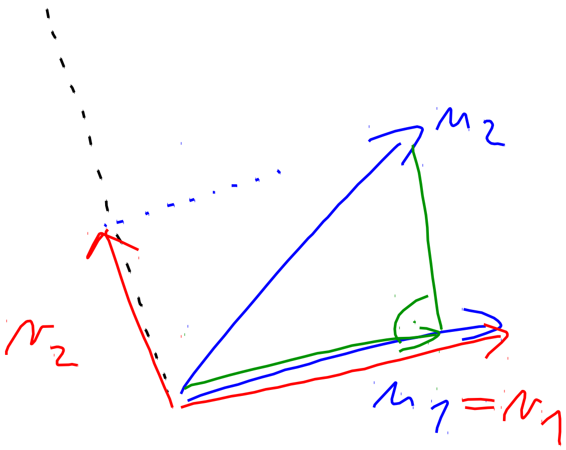
$$0 = \langle v_3, v_1 \rangle = \langle u_3, v_1 \rangle - b_1 \langle v_1, v_1 \rangle - b_2 \underset{\substack{\| \\ 0}}{\langle v_2, v_1 \rangle}$$

$$b_1 = \frac{\langle u_3, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2}$$

Stejně ukážeme, že

$$b_2 = \frac{\langle u_3, v_2 \rangle}{\|v_2\|^2}$$

$$[v_1, v_2, v_3] = [u_1, u_2 - a_1 u_1, u_3 - b_1 u_1 + b_2 (u_2 - a u_1)] = [u_1, u_2, u_3]$$



$$v_2 = u_2 - \frac{\langle u_2, v_1\rangle}{\|v_1\|^2} v_1$$

Ortogonální vektory $u_1, \dots u_k$

$$\langle u_i, u_j \rangle = 0 \text{ pro } i \neq j$$

Ortonormální vektory $u_1, \dots u_k$

$$\langle u_i, u_j \rangle = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

Navzájem kolmé a mají jednotkovou velikost

16

Ortonormální báze je báze tvořená ortonormálními vektory.

Věta: Každý prostor se skalárním součinem má ortonormální bázi.

Důkaz: Vezmeme nějakou bázi $u_1, u_2, \dots, u_n$ prostoru U. Provedeme GSOP a dostaneme ortogonální vektory

$$v_1, v_2, \dots v_n.$$

Ty jsou lin. nezávislé (podle lemmatu) a $[v_1, v_2, \dots v_n] = [u_1, u_2, \dots u_n] = U$.

Tedy $v_1, \dots v_n$ je báze, ale navíc ortogonální.

17

Položíme $\quad z_i = \dfrac{v_i}{\|v_i\|} \quad$ (vektory v_i normujeme)

Potom
$$\|z_i\|^2 = \langle z_i, z_i\rangle = \left\langle \frac{v_i}{\|v_i\|}, \frac{v_i}{\|v_i\|}\right\rangle = \frac{1}{\|v_i\|^2}\langle v_i, v_i\rangle = \frac{1}{\|v_i\|^2}\|v_i\|^2 = \underline{1}$$

$(z_1, z_2, \dots z_n)$ je ortonormálna báza priestoru U

V súradniciach ortonormálnej bázy sa nič, čo rovnaké sa skalárnym súčinom, počíta veľmi dobre

Veta 1: Nech $\alpha = (u_1, u_2, \dots u_n)$ je ortonormálna báza.
Potom súradnice vektora $u \in U$ sú
$$(u)_\alpha = \left(\langle u, u_1\rangle, \langle u, u_2\rangle, \dots \langle u, u_n\rangle\right)^T.$$

18

Důkaz:

$u = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n$ | vynásobíme skalárně u_1

$$\langle u, u_1 \rangle = a_1 \underbrace{\langle u_1, u_1 \rangle}_{=1} + a_2 \underbrace{\langle u_2, u_1 \rangle}_{=0} + \dots + a_n \underbrace{\langle u_n, u_1 \rangle}_{=0}$$

$$\langle u, u_1 \rangle = a_1$$

Obdobně pro další a_i.

Věta: Nechť $\alpha = (u_1, u_2, \dots u_n)$ je ortonormální báze prostoru U. Nechť souřadnice vektorů u a v v této bázi jsou postupně $x = (x_1, x_2, \dots x_n)^T$ a $y = (y_1, y_2, \dots y_n)^T$

Pak $$\langle u, v \rangle = x_1 \bar{y}_1 + x_2 \bar{y}_2 + \dots + x_n \bar{y}_n = x^T \cdot \bar{y}$$

(Nad $\mathbb{R}$ je $\bar{y}_i = y_i$)

19

Důkaz:

$$\langle u, v\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i u_i, \sum_{j=1}^{n} y_j u_j \right\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} x_i \overline{y_j} \underbrace{\langle u_i, u_j\rangle}_{\substack{=1 \text{ pro } i=j \\ =0 \text{ pro } i\neq j}}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i} = (x_1, x_2 \dots x_n)\begin{pmatrix}\overline{y_1}\\ \overline{y_2}\\ \vdots \\ \overline{y_n}\end{pmatrix} = x^T \cdot \overline{y}$$

Ortogonální doplněk podprostoru

Nechť U je vekt. prostor se skalárním součinem

Nechť $V \subseteq U$ je jeho podprostor. Potom definujeme ortogonální doplněk podprostoru V jako

$$V^{\perp} = \{ u \in U : \forall v \in V \ \langle u, v \rangle = 0 \}$$

Vlastnosti ortogonálního doplňku

1. $V^{\perp}$ je vekt. podprostor

$\vec{0} \in V^{\perp}$

$u_1, u_2 \in V^{\perp} \quad v \in V$

$$\langle a u_1 + b u_2, v \rangle = a \underbrace{\langle u_1, v \rangle}_{=0} + b \underbrace{\langle u_2, v \rangle}_{=0} = 0$$

$a u_1 + b u_2 \in V^{\perp}$

2 $V \cap V^\perp = \{0\}$

Nechť $v \in V \cap V^\perp$, pak

$$\langle \underset{\substack{\cap \\ V^\perp}}{v}, \underset{\substack{\cap \\ V}}{v} \rangle = 0$$

Ale tohle platí pouze pro $v = \vec{0}$.

3 $V + V^\perp = U$

Nechť $v_1, v_2, \dots v_k$ je ortonormální báze ve V.
Doplníme ji na bázi celého U

$$v_1, v_2, \dots v_k, u_{k+1}, \dots u_n$$

Nyní provedeme GSop. Vektory $v_1, v_2, \dots v_k$ se nezmění, neboť už jsou na sebe kolmé. Místo vektorů $u_{k+1}, \dots u_n$ dostaneme vektory $v_{k+1}, v_{k+2}, \dots v_n$
které jsou kolmé na všechny vektory $v_1, v_2, \dots v_k$.
Proto jsou kolmé i na jejich lin. kombinace a tedy i na všechny vektory z V. Proto $v_{k+1}, v_{k+2}, \dots v_n \in V^\perp$
$v_1, \dots v_n$ je báze U. Proto každé $u \in U$ získám

22

$$u = \underbrace{a_1 v_1 + \dots + a_k v_k}_{\in V} + \underbrace{a_{k+1} v_{k+1} + \dots + a_n v_n}_{\in V^\perp}$$

Tedy $V + V^\perp = U$.

Vlastnosti 2 a 3 dávají dohromady

<u>Věta</u> $V \oplus V^\perp = U$

To znamená, že každé $u \in U$ lze psát jednoznačně jako $u = v + z$, kde $v \in V$ a $z \in V^\perp$.

Protože $V + V^\perp = U$, tak můžeme takové v a z existují.

Kdyby $u = v_1 + z_1 = v_2 + z_2$, $v_1, v_2 \in V$
$z_1, z_2 \in V^\perp$

23

$$v_1 + z_1 = v_2 + z_2$$

$$V \Rightarrow v_1 - v_2 = z_2 - z_1 \in V^\perp$$

$$v_1 - v_2 = z_2 - z_1 \in V \cap V^\perp = \{\vec{o}\}$$

$$v_1 = v_2$$
$$z_1 = z_2$$

Kolmá projekce do podprostoru

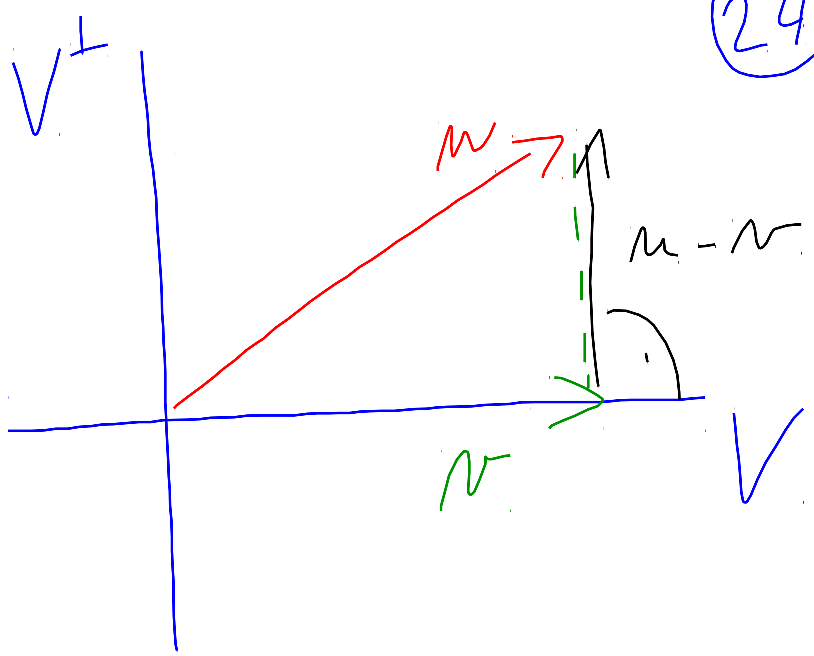
U vekt. prostor, V jeho podprostor, kolmá projekce do podprostoru V je zobrazení

$$P_V : U \to V \qquad v \in V$$

definované předpisem $P_V(u) = v$, kde $u - v \in V^\perp$

To znamená, že

$$\underset{V}{\underset{\cap}{u = v}} + \underset{V^\perp}{\underset{\cap}{z}} \qquad z = u - v$$



$$u - v \perp V \iff u - v \in V^\perp$$

<u>Lemma</u> Kolmá projekce je lineární zobrazení

<u>Důkaz:</u> nechť $Pu_1 = v_1 \qquad v_1 \in V \quad u_1 - v_1 \in V^\perp$

$Pu_2 = v_2 \qquad v_2 \in V \quad u_2 - v_2 \in V^\perp$

$$P(au_1 + bu_2) = av_1 + bv_2 \quad \begin{cases} av_1 + bv_2 \in V \\ a(u_1 - v_1) + b(u_2 - v_2) \in V^\perp \end{cases}$$