EUKLIDOVSKÁ GEOMETRIE

U vekt. prostor a V jeho podprostor

Kolmá projekce do podprostoru V je lineární zobrazení

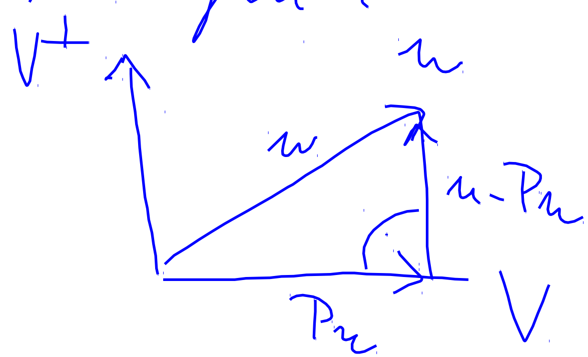
$$P : U \longrightarrow V$$

s vlastností, že $u - Pu \perp V$.

Výpočet je založen na využití těchto 2 vlastností:

(1) $Pu \in V$

(2) $u - Pu \perp V$



(2)

Počítání kolmé projekce

Obecně $V = [v_1, v_2, \dots v_k]$

Pro daný vektor $u \in U$ je

$Pu \in V$: $Pu = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_k v_k$

$u - Pu \perp V$ $\quad \langle u - Pu, v_1 \rangle = \langle u - Pu, v_2 \rangle = \dots \langle u - Pu, v_k \rangle = 0$

$$\langle u - a_1 v_1 - a_2 v_2 - \dots - a_k v_k, v_i \rangle = 0 \qquad i = 1, 2, \dots k$$

$$\langle u, v_i \rangle - a_1 \langle v_1, v_i \rangle - a_2 \langle v_2, v_i \rangle - \dots - a_k \langle v_k, v_i \rangle = 0$$

$$a_1 \langle v_1, v_i \rangle + a_2 \langle v_2, v_i \rangle + \dots + a_k \langle v_k, v_i \rangle = \langle u, v_i \rangle$$

Dostaneme soustavu k rovnic o k neznámých $a_1, a_2, \dots a_k$.

Matice soustavy je

$$(A_{ij}) = (\langle v_i, v_j \rangle)$$

a nazývá se Grammova matice.

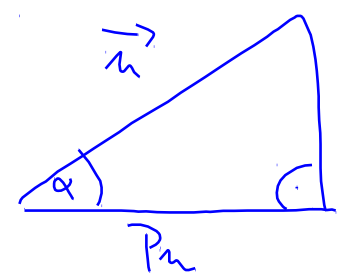
Věta: Vlastnosti kolmé projekce do podprostoru V.

(1) Nechť $u \in U$ a Pu jeho kolmá projekce do V. Pu je jediný vektor z V, který minimalizuje vzdálenost u od V, tj

$$\| u - Pu \| = \min_{v \in V} \| u - v \|$$

(2) Pu je až na násobek jediný vektor z V s vlastností

$$\frac{\| Pu \|}{\| u \|} = \max_{v \in V \setminus \{0\}} \underbrace{\frac{|\langle u, v \rangle|}{\| u \| \, \| v \|}}_{\cos(\sphericalangle u, v)}$$



Důkaz (1) $u \in U$ pevný, $v \in V$ libovolný

$$\|u-v\|^2 = \|\underbrace{u-Pu}_{\perp V} + \underbrace{Pu-v}_{\in V}\|^2 = \|u-Pu\|^2 + \underbrace{\|Pu-v\|^2}$$

Vidíme, že $\|u-v\|^2$ nabývá svého minima, právě když $\|Pu-v\| = 0$, tedy $v = Pu$.

(2) $$\frac{|\langle u,v\rangle|}{\|u\|\,\|v\|} = \frac{|\langle \overset{\in V}{Pu} + \overset{\perp V}{u-Pu}, v\rangle|}{\|u\|\|v\|} = \frac{|\langle Pu, v\rangle|}{\|u\|\,\|v\|}$$

Cauchyova nerovnost

$$\leq \frac{\|Pu\|\cdot\|v\|}{\|u\|\;\|v\|} = \frac{\|Pu\|}{\|u\|}$$

Rovnost nastane pro $v = a\,Pu$.

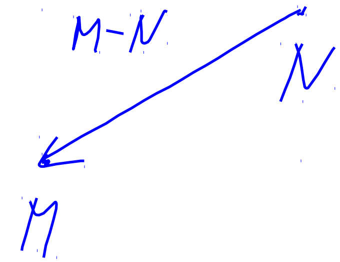
Výraz $\dfrac{|\langle u,v\rangle|}{\|u\|\|v\|}$

nabývá svého maxima právě když $v = a\,Pu$.

Euklidovská geometrie – počítání vzdáleností

(1) Vzdálenost dvou bodů M a N je

$$\mathrm{dist}(M,N) = \|M-N\|$$



(2) Vzdálenost bodu M od afinního podprostoru $\mathcal{N}$ je

$$\mathrm{dist}(M,\mathcal{N}) = \min_{N\in\mathcal{N}} \|M-N\|$$

VĚTA o počítání vzdálenosti bodu od afinního podprostoru

Vzdálenost bodu A od podprostoru $\mathcal{M} = B + Z(\mathcal{M})$ je rovna velikosti kolmé projekce vektoru $A-B$ do $Z(\mathcal{M})^{\perp}$, tj.

$$\left\| P_{Z(\mathcal{M})^{\perp}}(A-B) \right\|.$$

Následující výroky jsou ekvivalentní pro $M \in \mathcal{M}$:

(1) $\operatorname{dist}(A, m) = \|A - M\|$

(2) $A - M \perp Z(m)$

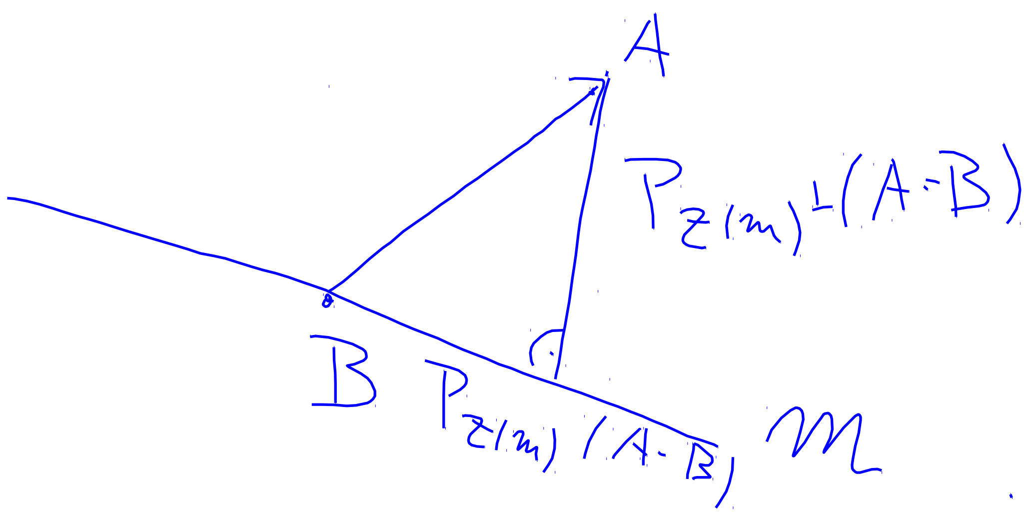
(3) $M = B + P_{Z(m)}(A - B)$

Důkaz:

Pro libovolné $v \in Z(m)$ je podle předchozí věty

$$\|A - (B + v)\| = \|(A - B) - v\| \geq \|A - B - P_{Z(m)}(A - B)\|$$

$$= \|P_{Z(m)^\perp}(A - B)\|$$



Bod M takový, že $\operatorname{dist}(A, m) = \|A - M\|$ je $M = B + P_{Z(m)}(A - B)$.

(1) $\Rightarrow$ (3) je dáno červeným zvýrazněním na předchozí tabuli.

(3) $\Rightarrow$ (2) $\quad A - M = A - B - P_{Z(m)}(A-B) = P_{Z(m)^\perp}(A-B) \perp Z(m)$.

(2) $\Rightarrow$ (1) Pro $v \in Z(m)$ počítáme

$$\| A - (M+v) \|^2 = \| \underbrace{(A-M)}_{\perp Z(m)} - \underset{\substack{\uparrow \\ Z(m)}}{v} \|^2 = \|A-M\|^2 + \|v\|^2$$

Rovnost nastane pouze pro $v = \vec{0}$. M je bod, který minimalizuje vzdálenost A od m.

Příklad: V $\mathbb{R}^4$ spočítejte vzdálenost bodu $A = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ od nadroviny $M = \{ y \in \mathbb{R}^4,\ a y_1 + b y_2 + c y_3 + d y_4 + e = 0 \}$. Předp. $d \neq 0$.

Najdeme nějaký bod v nadrovině M

$$B = \left(0, 0, 0, -\frac{e}{d}\right)$$

$$\operatorname{dist}(A, M) = \| P_{Z(M)^\perp}(A - B) \|$$

$Z(M)^\perp$ obsahuje vektory, které jsou kolmé k $Z(M)$

$$Z(M): \quad a y_1 + b y_2 + c y_3 + d y_4 = 0$$

$$Z(M)^\perp = [(a, b, c, d)]$$

⑨

$$\underset{Z(m)^{\perp}}{P}(A-B) = \alpha \cdot (a,b,c,d)$$

$$A-B-\alpha(a,b,c,d) \perp (a,b,c,d)$$

$$\langle A-B,(a,b,c,d)\rangle = \alpha \,\|(a,b,c,d)\|^2$$

$$\left\langle \left(x_1,x_2,x_3,x_4+\frac{e}{d}\right),(a,b,c,d)\right\rangle = \alpha\,(a^2+b^2+c^2+d^2)$$

$$ax_1+bx_2+cx_3+dx_4+e = \alpha(a^2+b^2+c^2+d^2)$$

$$\alpha = \frac{ax_1+bx_2+cx_3+dx_4+e}{(a^2+b^2+c^2+d^2)}$$

$$\operatorname{dist}(A,m) = \|\alpha(a,b,c,d)\| = |\alpha|\cdot\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2} = \frac{|ax_1+bx_2+cx_3+dx_4+e|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}}$$

Vzdálenost dvou afinních podprostorů $\mathcal{M}$ a $\mathcal{N}$ je

$$\operatorname{dist}(\mathcal{M}, \mathcal{N}) = \inf \{ \|M - N\|,\ M \in \mathcal{M},\ N \in \mathcal{N} \}$$

<u>VĚTA</u> Mějme afinní podprostory

$$\mathcal{M} = A + Z(\mathcal{M}), \quad \mathcal{N} = B + Z(\mathcal{N})$$

jejich vzdálenost je rovna velikosti kolmé projekce vektoru $A - B$ do $Z(\mathcal{M}) + Z(\mathcal{N})$

$$\| P_{(Z(\mathcal{M}) + Z(\mathcal{N}))^\perp} (A - B) \|$$

Pro každý $M \in \mathcal{M}$ a $N \in \mathcal{N}$ jsou následující tvrzení ekvivalentní:

(1) $\operatorname{dist}(\mathcal{M}, \mathcal{N}) = \|M - N\|$

(2) $M - N \perp Z(\mathcal{M}) + Z(\mathcal{N})$

(3) $M - N = P_{(Z(\mathcal{M}) + Z(\mathcal{N}))^\perp} (A - B)$

Důkaz:

$$\operatorname{dist}(\mathcal{M},\mathcal{N}) = \inf\{\|M-N\|,\ M\in\mathcal{M},\ N\in\mathcal{N}\}$$
$$= \inf\{\|(A+u)-(B+v)\|,\ u\in Z(\mathcal{M}),\ v\in Z(\mathcal{N})\}$$
$$= \inf\|A-(B+v-u)\|,\ v\in Z(\mathcal{N}),\ u\in Z(\mathcal{M})\}$$
$$= \operatorname{dist}(A,\ B+Z(\mathcal{N})+Z(\mathcal{M}))$$

podle předchozí věty

$$= \|P_{(Z(\mathcal{M})+Z(\mathcal{N}))^\perp}(A-B)\|$$

(1) ⟹ (3) $\operatorname{dist}(\mathcal{M},\mathcal{N}) = \|M-N\|$ $M=A+u$, $N=B+v$

$$\|M-N\| = \|A-B-\underbrace{(v-u)}_{Z(\mathcal{M})+Z(\mathcal{N})}\|$$ podle věty o kolmé projekci

tento výraz nabývá svého minima pro $v-u = P_{Z(\mathcal{M})+Z(\mathcal{N})}(A-B)$

Tedy pro $M-N = A-B-P_{Z(\mathcal{M})+Z(\mathcal{N})}(A-B) = P_{(Z(\mathcal{M})+Z(\mathcal{N}))^\perp}(A-B)$

(3) $\Rightarrow$ (2)

Když $M - N = P_{(Z(m)+Z(n))^\perp}(A-B)$ tak

$M - N$ je kolmé k $Z(m)+Z(n)$

(2) $\Rightarrow$ (1) nechť $M - N \perp Z(m)+Z(n)$.

$u \in Z(m)$, $v \in Z(n)$

$$\|M+u-(N+v)\|^2 = \|\underbrace{(M-N)}_{\in (Z(m)+Z(n))^\perp} + \underbrace{(u-v)}_{\in Z(m)+Z(n)}\|^2 = \|M-N\|^2 + \|u-v\|^2$$

Tento výraz nabude minima pro $u = v = 0$, tedy

$$\operatorname{dist}(m,n) = \|M-N\|$$

Odchylka afinních podprostorů

Odchylka afinních podprostorů $\mathcal{M}$ a $\mathcal{N}$

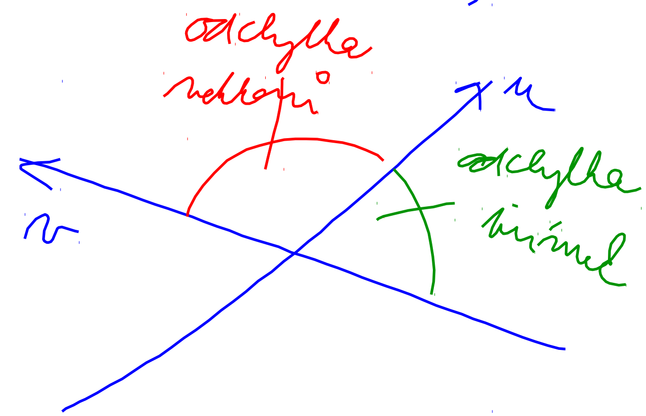
$$\sphericalangle(\mathcal{M},\mathcal{N}) = \sphericalangle\left(Z(\mathcal{M}), Z(\mathcal{N})\right)$$

Proto stačí definovat jenom odchylku vekt. podprostorů.

(1) Odchylka dvou přímek $[u]$, $[v]$, $\quad (u \neq \vec{o}, v \neq \vec{o})$

je úhel $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ s vlastností

$$\cos\alpha = \frac{|\langle u, v\rangle|}{\|u\|\,\|v\|}$$



2. Odchylka podprostorů U, V takových, že $U \cap V = \{\vec{o}\}$

$$\measuredangle(U, V) = \inf \{ \measuredangle([u], [v]),\ u \in U \setminus \{\vec{o}\},\ v \in V \setminus \{\vec{o}\} \}$$

3. Odchylka podprostorů U, V takových, že $U \cap V \neq \{\vec{o}\}$ je

$$\measuredangle(U, V) = \underbrace{\measuredangle\left(U \cap (U \cap V)^{\perp},\ V \cap (U \cap V)^{\perp}\right)}_{\text{Toto je už definováno podle } 2}$$

$$\left(U \cap (U \cap V)^{\perp}\right) \cap \left(V \cap (U \cap V)^{\perp}\right) = $$
$$= U \cap V \cap (U \cap V)^{\perp} = \{\vec{o}\}$$

4. Jestliže $U \subseteq V$, pak $\measuredangle(U, V) = 0$.

<u>Věta</u> Výpočet odchylky přímky a vekt. podprostoru.

Odchylka přímky $[u]$ od podprostoru V je

$$\cos \measuredangle([u], V) = \frac{\|P_V u\|}{\|u\|}$$

Důkaz plyne z věty o vlastnostech kolmé projekce

$$\cos \measuredangle([u], V) = \cos\left(\inf\{\measuredangle([u],[v]), v \in V\}\right)$$

$$= \max \cos\left(\measuredangle([u],[v])\right) = \max \frac{|\langle u, v\rangle|}{\|u\|\|v\|} = \frac{\|Pu\|}{\|u\|}$$ podle citované věty.

Příklad

$\mathbb{R}^4$ $\quad U = [e_1+e_2, e_1+e_2+e_3]$

$V = [e_2+e_4, e_2+e_3+e_4]$

$U \cap V = [e_3]$

$(U \cap V)^\perp = [e_1, e_2, e_4]$

$U \cap (U \cap V)^\perp = [e_1+e_2]$

$V \cap (U \cap V)^\perp = [e_2+e_4]$

$\measuredangle(U, V) = \measuredangle([e_1+e_2], [e_2+e_4])$

$$\cos \measuredangle([e_1+e_2], [e_2+e_4]) = \frac{|\langle e_1+e_2, e_2+e_4 \rangle|}{\|e_1+e_2\| \, \|e_2+e_4\|} = \frac{1}{2}$$

$\boxed{\begin{array}{l} \cos\alpha = \frac{1}{2} \\ \alpha = \frac{\pi}{3} \text{ odchylka} \\ \text{podprostorů } U \text{ a } V \end{array}}$

VLASTNÍ ČÍSLA A VLASTNÍ VEKTORY

Budeme se zabývat lineárními zobrazeními

$$\varphi : U \to U$$

Taková lin. zobrazení nazýváme lineární endomorfismy nebo lineární operátory nebo lineární transformace.

<u>Invariantní podprostor</u> Podprostor $V \subseteq U$ se nazývá invariantní vůči φ, jestliže

$$\varphi(V) \subseteq V.$$

Každý lin. operátor $\varphi : U \to U$ má dva triviální invariantní podprostory

$$\{\vec{0}\} \quad a \quad U$$

Nás budou zajímat netriviální invariantní podprostory

$$\{\vec{0}\} \subsetneq V \subsetneq U.$$