VLASTNÍ ČÍSLA A VEKTORY

$\varphi : U \to U$ lineární operátor

Podprostor $V \subseteq U$ je invariantní, jestliže

$$\varphi(V) \subseteq V.$$

<u>Příklad</u>: $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4 \quad \varphi(x) = Ax$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \qquad V = \Big[\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{v_1} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{v_2} \Big]$$

2

$$\varphi(v_1) = A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = v_1 + 2v_2 \in V$$

$$\varphi(v_2) = A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -2v_1 + v_2 \in V$$

$$\varphi(av_1 + bv_2) = a \underbrace{\varphi(v_1)}_{\in V} + b \underbrace{\varphi(v_2)}_{\in V} \in V$$

V je invariantní podprostor operátoru φ.

V $\mathbb{R}^4$ vezmeme bázi $B = (v_1, v_2, e_3, e_4)$

$$(\varphi)_{B,B} = \Big((\varphi(v_1))_B \;\; (\varphi(v_2))_B \;\; (\varphi(e_3))_B \;\; (\varphi(e_4))_B \Big)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(e_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 4e_3 + (-1)e_4$$

$$\varphi(e_4) = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = (-3) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Věta: Nechť $\varphi : U \to U$ je lineární a $V \leq U$ je invariantní podprostor dimenze k v prostoru dimenze n. Nechť $\alpha = (v_1, v_2, \dots, v_k, \dots, v_n)$ je báze prostoru U taková, že $(v_1, v_2, \dots, v_k)$ je báze podprostoru V. Potom matice φ v bázi α je tvaru

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline \underbrace{0}_{k} & \underbrace{C}_{n-k} \end{array}\right) \begin{matrix} \}\,k \\ \}\,n-k \end{matrix}$$

Důkaz: Protože $\varphi(v_1) \in V$, dostáváme

$$\varphi(v_1) = \underbrace{a_{11} v_1 + a_{21} v_2 + a_{31} v_3 + \dots + a_{k1} v_k}_{} + 0 \cdot v_{k+1} + \dots + 0 \cdot v_n$$

$$\underset{V}{\cap}$$

analogicky pro $v_2, v_3, \dots v_k$

Proto

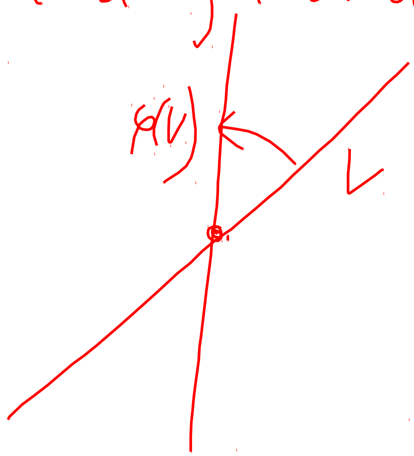
$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2k} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{k1} & a_{k2} & & a_{kk} & & & & \\ 0 & 0 & & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & & 0 & & & & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

<u>Příklad</u> lineárního operátoru, který nemá invariantní podprostor různý od $\{\vec{o}\}$ a celého prostoru.

$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ otočení o úhel $\alpha \in (0, \pi)$

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

φ nemá žádný invariantní podprostor dimenze 1



Pokračování v 1. příkladu

$\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4 \quad \varphi(x) = A\,x \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

$V = \left[v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$

je invariantní podprostor.

Vezmeme $W = \left[w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right]$

Ukážeme, že W je rovněž invariantní podprostor.

$$\varphi(w_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 4 w_1 + w_2$$

$$\varphi(w_2) = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} = (-1) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = (-1) w_1 + 4 w_2$$

⑦

Vezmeme bázi $\mathbb{R}^4$ $\quad \chi = (v_1, v_2, w_1, w_2)$. V této bázi má φ matici

$$(\varphi)_{\chi,\chi} = \left((\varphi(v_1))_\chi \; (\varphi(v_2))_\chi \; (\varphi(w_1))_\chi \; (\varphi(w_2))_\chi \right)$$

$$= \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

matice je blokově diagonální

$\mathbb{R}^4 = V \oplus W$

V a W invariantní podprostory

Věta: Nechť $\varphi: U \to U$ je lineární operátor, nechť $U = V \oplus W$, kde V a W jsou invariantní podprostory. Nechť $\chi = (v_1, \dots v_k, v_{k+1}, \dots v_n)$ je báze U taková, že $(v_1, \dots v_k)$ je báze V a $(v_{k+1}, \dots v_n)$ je báze W. Potom matice φ v bázi χ je

$$(\varphi)_{\chi,\chi} = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & C \end{array}\right)$$

Jednodimenzionální vlastní podprostory

$\varphi : U \to U$, $V = [v]$, $v \neq \vec{O}$ je invariantní 1-dim. podprostor.

Protože $\varphi(v) \in V$, musí existovat $\lambda \in \mathbb{K}$ takové, že

$$\varphi(v) = \lambda v$$

Potom pro každé $a \in \mathbb{K}$ platí

$$\varphi(av) = a\,\varphi(v) = a\lambda v = \lambda(av)$$

Na tomto invariantním podprostoru působí φ jako násobení číslem λ.

Definice: Vektor $v \in U$ různý od $\vec{O}$ se nazývá VLASTNÍM VEKTOREM operátoru $\varphi : U \to U$, jestliže

$$\varphi(v) = \lambda v$$

pro nějaké $\lambda \in \mathbb{K}$. Číslo λ se nazývá VLASTNÍ ČÍSLO.

Výpočet vlastních čísel a vlastních vektorů

1. Nejdříve budeme uvažovat lin. operátory $\varphi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$

$$\varphi(x) = Ax \qquad A \text{ je matice } n \times n.$$

x je vlastní vektor s vlastním číslem λ právě když

$$\varphi(x) = Ax = \lambda x \qquad x \neq \vec{0}$$

$$Ax - \lambda x = 0 \qquad x \neq \vec{0}$$

$$Ax - \lambda E x = 0$$

$$(A - \lambda E)x = 0 \qquad x \neq \vec{0}$$

λ je vlastní číslo operátoru φ (matice A) právě když homogenní soustava $(A - \lambda E)x = 0$

má netriviální řešení. A to nastane právě když

$$\det(A-\lambda E)=0$$

Odtud můžeme spočítat vlastní čísla.

$$\det\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix} = (a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)\cdots(a_{nn}-\lambda)$$

$+$ spousta dalších členů $=(-\lambda)^n+q_{n-1}\lambda^{n-1}+q_{n-2}\lambda^{n-2}+\cdots+q_0$

$\det(A-\lambda E)$ je polynom v λ stupně n s koeficientem u λ^n rovným $(-1)^n$

Polynom $\det(A-\lambda E)$ se nazývá CHARAKTERISTICKÝ POLYNOM matice A.

Posledním jsme dokázali:

λ je vl. číslo matice A $\iff$ $\det(A-\lambda E)=0$

$\iff$ λ je kořenem charakteristického polynomu

Věta Vlastní čísla matice A určíme jako kořeny charakteristického polynomu $\det(A-\lambda E)$.

Známe-li již vlastní číslo λ, pak příslušný vlastní vektor je netriviálním $(\neq \vec{o})$ řešením homogenní soustavy

$$Ax-\lambda x=0$$

$$(A-\lambda E)x=0$$

Příklad

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \qquad \varphi(x) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Charakt. polynom matice $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ je

$$\det \begin{pmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 4 & -2-\lambda \end{pmatrix} = (\lambda+2)(\lambda-3)+4 =$$

$$= \lambda^2 + 2\lambda - 3\lambda - 6 + 4 = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda-2)(\lambda+1)$$

Char. polynom má kořeny $\lambda_1 = 2$ a $\lambda_2 = -1$.

Vlastní vektor k $\lambda_1 = 2$

$$\begin{pmatrix} 3-2 & -1 \\ 4 & -2-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Příslušný vlastní vektor je $v_1 = p \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ p \neq 0.$

2. vlastní vektor k vl. číslu $\lambda_2 = -1$

$$\begin{pmatrix} 3+1 & -1 \\ 4 & -2+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vlastní vektory jsou $v_2 = q \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

Vezmeme bázi $\mathbb{R}^2$ tvořenou vlastními vektory:

$$\alpha = \left(v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right)$$

Matice φ v bázi α bude

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \left((\varphi(v_1))_\alpha \ (\varphi(v_2))_\alpha \right) = \left((2v_1)_\alpha \ (-v_2)_\alpha \right) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Matice A a B jsou podobné, jestliže existuje regulární matice P taková, že

$$B = P^{-1} A P$$

Lemma: Podobné matice mají stejný char. polynom

Důkaz:

$$\det(B - \lambda E) = \det(P^{-1} A P - \lambda P^{-1} E P) =$$

$$= \det(P^{-1}(A - \lambda E) P) = \det(P^{-1}) \det(A - \lambda E) \det P =$$

$$= \det(P^{-1} \cdot P) \det(A - \lambda E) = \det E \cdot \det(A - \lambda E)$$

$$= \det(A - \lambda E)$$

$\varphi : U \to U$ a v U máme dve bázy α a β

Potom platí

$$(\varphi)_{\beta,\beta} = (id)_{\beta,\alpha} \cdot (\varphi)_{\alpha,\alpha} \; (id)_{\alpha,\beta}$$
$$= \left[(id)_{\alpha,\beta}\right]^{-1} (\varphi)_{\alpha,\alpha} \; (id)_{\alpha,\beta}$$
$$= P^{-1} (\varphi)_{\alpha,\alpha} P$$

Matice lin. operátoru φ v rôznych bázach sú vždy podobné.

Môžeme definovať: CHARAKTERISTICKÝ POLYNÓM lin. operátoru φ je charakt. polynóm matice $(\varphi)_{\alpha,\alpha}$ pre ľubovoľnú bázu α modulu U.

② Výpočet vlastních čísel a vlastních vektorů operátoru $\varphi: U \to U$.

Nechť α je nějaká báze v U.

Platí

$$\varphi(v) = \lambda v \quad \text{a} \quad v \neq \vec{o} \iff (\varphi(v))_\alpha = (\lambda v)_\alpha \quad \text{a} \quad (v)_\alpha \neq \vec{o}.$$

$$\iff \underbrace{(\varphi)_{\alpha,\alpha}}_{\text{matice}} \underset{\overset{\Uparrow}{\mathbb{K}^n}}{(v)_\alpha} = \lambda (v)_\alpha \quad (v)_\alpha \neq \vec{o}$$

(v je vlastní vektor φ s vlastním číslem λ) $\iff$ ($(v)_\alpha$ je vlastní vektor matice $(\varphi)_{\alpha,\alpha}$ a λ je vlastní číslo matice $(\varphi)_{\alpha,\alpha}$)

Je-li $\alpha = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ a $(v)_\alpha = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, pak

$$v = x_1 u_1 + x_2 u_2 + \ldots + x_n u_n.$$

Základní poznatky o polynomech s koeficienty v $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$

Polynom $p(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0$

Stupeň daného polynomu je n, jestliže $a_n \neq 0$.

Stupeň nulového polynomu považujeme za $-\infty$.

Platí:

$$\operatorname{st}\left(p(\lambda)\cdot q(\lambda)\right) = \operatorname{st} p(\lambda) + \operatorname{st} q(\lambda)$$

$$(a_n \lambda^n \dots)(b_k \lambda^k + \dots) = a_n b_k \lambda^{n+k}$$

Kořen polynomu je číslo $\lambda_0 \in \mathbb{K}$ takové, že

$$p(\lambda_0) = 0.$$

VĚTA: λ_0 je kořenem polynomu $p \neq 0$ právě když

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)\, q(\lambda)$$

kde $\operatorname{st} q = \operatorname{st} p - 1$.

(18)

<u>Důkaz:</u> Nechť $p(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)\, q(\lambda)$. Pak máme

$$p(\lambda_0) = (\lambda_0 - \lambda_0)\, q(\lambda_0) = 0.$$

Nechť $p(\lambda_0) = 0$. Potom

$$p(\lambda) = p(\lambda) - p(\lambda_0) = a_n \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots a_1 \lambda + a_0$$

$$- a_n \lambda_0^n - a_{n-1}\lambda_0^{n-1} - \dots - a_1 \lambda_0 - a_0 =$$

$$= a_n \underbrace{(\lambda^n - \lambda_0^n)}_{\text{vytkneme } (\lambda - \lambda_0)} + a_{n-1}\underbrace{(\lambda^{n-1} - \lambda_0^{n-1})} + \dots + a_1 (\lambda - \lambda_0)$$

$$= (\lambda - \lambda_0)(\text{polynom stupně } n-1)$$

$$x^k - y^k = (x - y)(x^{k-1} + x^{k-2} y + x^{k-3} y^2 + \dots + x y^{k-2} + y^{k-1})$$

<u>Násobnost kořene</u> Nechť λ_0 je kořenem polynomu $p(\lambda) \neq 0$. Řekneme, že násobnost kořene λ_0 je $k \geq 1$, jestliže

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^k q(\lambda),$$

kde $q(\lambda)$ je polynom takový, že $q(\lambda_0) \neq 0$.

Výpočet kořenů:

Uvažujme polynom s celočíselnými koeficienty

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0.$$

Jestliže λ_0 je celé číslo a kořen polynomu $p(\lambda)$, pak

λ_0 dělí a_0.

Důkaz: Platí

$$0 = p(\lambda_0) = \lambda_0^n + a_{n-1}\lambda_0^{n-1} + \dots + a_1\lambda_0 + a_0$$

$$a_0 = -\left(\lambda_0^n + a_{n-1}\lambda_0^{n-1} + \dots + a_1\lambda_0\right)$$

$$a_0 = \lambda_0\left(-\lambda_0^{n-1} - a_{n-1}\lambda_0^{n-2} + \dots - a_1\right)$$

Algebraická násobnost vlastního čísla

Nechť λ_0 je vlastní číslo operátoru $\varphi: U \to U$.
Jeho <u>algebraická násobnost</u> je rovna jeho násobnosti jako kořene char. polynomu.

$\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad \varphi(x) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$\det(A - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)^2$

Číslo 2 je vlastní číslo operátoru φ alg. násobnosti 2.

<u>Vlastní podprostor</u> operátoru φ příslušný vlastnímu číslu λ_0
je $\quad \operatorname{Ker}(\varphi - \lambda_0 \, id) = \{ v \in U, \ \varphi(v) - \lambda_0 v = 0 \}$

$= \{ v \in U, \ \varphi(v) = \lambda_0 v \}$

je vektorový podprostor

= všechny vlastní vektory pro λ_0
společně s nulovým vektorem

Geometrická násobnost vlastního čísla λ_0 je dimenze vlastního podprostoru $\operatorname{Ker}(\varphi - \lambda_0 \mathrm{id})$.

Vraťme se k příkladu

$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad \varphi(x) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

Hledáme vl. podprostor na vl. číslo 2.

$$\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ $x_2 = 0$, x_1 libovolné

$\operatorname{Ker}(\varphi - 2\mathrm{id}) = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$ $\qquad \dim \operatorname{Ker}(\varphi - 2\mathrm{id}) = \underline{1}$

geometrická násobnost $= 1 < 2$ alg. násobnost

Jiný příklad

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad \varphi(x) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)^2$$

2 je vl. číslo alg. násobnosti 2

$$\operatorname{Ker}(\varphi - 2\,\mathrm{id}) = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} x - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x = 0 \right\} = \mathbb{R}^2$$

Geometrická násobnost vl. čísla 2 = 2 = alg. násobnosti.

Příště si ukážeme, že geom. násobnost $\leq$ alg. násobnost.