# VLASTNÍ ČÍSLA a VLASTNÍ VEKTORY

$\varphi : U \to U$ lin. operátor

$u \in U \setminus \{\vec{o}\}$ je vlastní vektor operátoru $\varphi$, jestliže

$$\varphi(u) = \lambda u$$

$\lambda \in K$ vlastní číslo

Vlastní čísla hledáme jako kořeny char. polynomu

$$\det\left((\varphi)_{\alpha,\alpha} - \lambda E\right)$$

Algebraická násobnost vl. čísla $\lambda_0$ je číslo $k$ takové, že

$$\text{char. polynom} = (\lambda - \lambda_0)^k q(\lambda) \quad q(\lambda_0) \neq 0$$

Geometrická násobnost vl. čísla $\lambda_0$ je

$$\dim \operatorname{Ker}(\varphi - \lambda_0 \, id)$$

**VĚTA**: alg. násobnost vl. čísla $\geq$ geom. násobnost

**Důkaz**: Nechť geom. násobnost $= k$, tedy $\dim \operatorname{Ker}(\varphi - \lambda_0 \, id) = k$. Zvolíme bázi tohoto podprostoru $u_1, u_2, \dots u_k$ a doplníme ji na bázi $\alpha = (u_1, \dots, u_k, u_{k+1}, \dots u_n)$ celého prostoru $U$.

$$(\varphi)_{\alpha\alpha} = \left(\begin{array}{cccc|c} \lambda_0 & 0 & & 0 & \\ 0 & \lambda_0 & & & B \\ 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \lambda_0 & \\ \hline & & & 0 & \\ & & & \vdots & C \\ 0 & 0 & & 0 & \end{array}\right)$$

3

$$\det\left((\varphi)_{\alpha\alpha} - \lambda E\right) = \det\left(\begin{array}{ccc|c} \lambda_0 - \lambda & & & \\ & \ddots & & B \\ & & \lambda_0 - \lambda & \\ \hline & 0 & & C - \lambda E \end{array}\right)$$

$$= \det\begin{pmatrix} \lambda_0 - \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_0 - \lambda \end{pmatrix} \cdot \det\left(C - \lambda E\right) = (\lambda_0 - \lambda)^k \det(C - \lambda E)$$

Alg. násobnost $\lambda_0$ je aspoň $k$.

Obecně neplatí alg. násobnost = geom. násobnosti

Příklad z minulé přednášce.

**Věta:** Vlastní vektory k různým vlastním číslům jsou lineárně nezávislé.

**Důkaz:** provedeme indukcí podle počtu vl. čísel

$\lambda_1$ jedno vl. číslo s vl. vektorem $u_1 \neq \vec{o}$

$u_1$ je lin. nezávislý

Nechť tvrzení platí pro $k \geq 1$ vl. čísel a mějme vl. čísla $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_k, \lambda_{k+1}$ navzájem různá s vl. vektory $u_1, u_2, \ldots u_{k+1}$.

Nechť $a_1 u_1 + a_2 u_2 + \cdots + a_k u_k + a_{k+1} u_{k+1} = \vec{o}$.

Aplikujme operátor $\varphi$

$$a_1 \varphi(u_1) + a_2 \varphi(u_2) + \cdots + a_k \varphi(u_k) + a_{k+1} \varphi(u_{k+1}) = \vec{o}$$

$$a_1 \lambda_1 u_1 + a_2 \lambda_2 u_2 + \cdots + a_k \lambda_k u_k + a_{k+1} \lambda_{k+1} u_{k+1} = \vec{o}$$

Od poslední rovnice odečteme $\lambda_{k+1}$-násobek 1. rovnice. Dostaneme

$$a_1\underbrace{(\lambda_1-\lambda_{k+1})}_{\neq 0}u_1+a_2\underbrace{(\lambda_2-\lambda_{k+1})}_{\neq 0}u_2+\dots+a_k\underbrace{(\lambda_k-\lambda_{k+1})}_{\neq 0}u_k=\vec{O}$$

Podle ind. předpokladu jsou $u_1, u_2, \dots, u_k$ lin. nezávislé.

Proto

$$a_i(\lambda_i-\lambda_{k+1})=0$$

Protože $\lambda_i-\lambda_{k+1}\neq 0$, musí být $a_i=0$ pro $i=1,2,\dots k$.

Z 1. rovnice teď dostaneme

$$a_{k+1}u_{k+1}=\vec{O}$$

Protože $u_{k+1}\neq\vec{O}$, je $a_{k+1}=0$. Tedy $u_1, u_2, \dots u_{k+1}$ jsou LN.

**Definice** Vlastní čísla lin. operátoru $\varphi$ nazýváme spektrem operátoru $\varphi$.

**Věta:** Operátor $\varphi$ má v bázi $\alpha$ diagonální matici, právě když je báze $\alpha$ tvořena vlastními vektory.

**Důkaz:** $\varphi(u_i) = \lambda_i u_i$ — právě když

$i$-tý sloupec $(\varphi)_{\alpha\alpha} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \lambda_i \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

**Důsledek** Nechť $\dim U = n$ a $\varphi : U \to U$ má $n$ různých vlastních čísel. Pak má $U$ bázi tvořenou vlastními vektory operátoru $\varphi$ a v této bázi je

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Důkaz: Jelikož $\varphi$ má $n$ různých vl. čísel, má ke každému vlastní vektor. Podle jedné z předchozích vět jsou tyto vektory LN. Protože jich $n = \dim U$, tvoří bázi. Použijme předchozí větu.

Příklad:

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & -4 \\ 6 & 4 & -4 \end{pmatrix} \qquad \det(B - \lambda E) = (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda)$$

$$\boxed{\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad \varphi(x) = Bx}$$

Vl. čísla jsou $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 3$.

| Vlastní čísla | vlastní vektory |
|---|---|
| $\lambda_1 = 1$ | $v_1 = (1,1,2)$ |
| $\lambda_2 = 2$ | $v_2 = (1,0,1)$ |
| $\lambda_3 = 3$ | $v_3 = (1,2,2)$ |

V bázi $\alpha = (v_1, v_2, v_3)$ má zobrazení $\varphi$ matici

$$(\varphi)_{\alpha\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\underline{(\varphi)_{\alpha\alpha}} = (\varphi)^{-1}_{\varepsilon\alpha}\,\underline{(\varphi)_{\varepsilon,\varepsilon}}\,(id)_{\varepsilon\alpha}$$

$(\varphi)_{\alpha\alpha}$ a $(\varphi)_{\varepsilon\varepsilon}$ jsou podobné!

Výpočet vl. vektoru pro $\lambda_3 = 3$.

$$(B-3E)x = 0$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 4 & 2 & -4 \\ 6 & 4 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$x_3 = 2p$

$x_2 = 2p$

$2x_1 = -4p + 6p$

$x_1 = p$

Vlastní vektory k $\lambda_3 = 3$ jsou

$$(p, 2p, 2p), \quad p \neq 0.$$

$\dim \operatorname{Ker}(B-3E) = 1$.

**Příklad:**

$\varphi : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}_2[x]$

$\varphi(p) = p'$

Chceme najít vlastní čísla a vlastní vektory tohoto zobrazení.

$\varepsilon = (1, x, x^2)$

$$(\varphi)_{\varepsilon,\varepsilon} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \det\left((\varphi)_{\varepsilon,\varepsilon} - \lambda E\right) =$$

$$= \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 2 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 = -(\lambda - 0)^3$$

$\varphi$ má jediné vlastní číslo $\lambda_1 = 0$, alg. násobnosti 3

Hledáme vl. vektory – píšeme jejich souřadnice v bázi $\varepsilon$.

$\varphi(p) = 0 \cdot p$

$(\varphi)_{\varepsilon\varepsilon} (p)_\varepsilon = 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

vlastní vektory jsou konstantní polynomy,

$\dim \operatorname{Ker}(\varphi) = 1$

$a_2 = 0$ $\quad$ $a_1$ libovolné

$a_3 = 0$

$\boxed{\varphi \text{ nemá bázi tvořenou vl. vektory}}$

11

# ORTOGONÁLNÍ a UNITÁRNÍ OPERÁTORY

Nechť $U$ je vekt. prostor nad $\mathbb{R}$ nebo nad $\mathbb{C}$ se skalárním součinem.

Operátor $\varphi : U \to U$, pro který platí

$\forall u, v \in U \quad \langle \varphi(u), \varphi(v) \rangle = \langle u, v \rangle$,

se nazývá

(1) ortogonální, je-li $U$ reálný vekt. prostor

(2) unitární, je-li $U$ komplexní vekt. prostor.

# Vlastnosti ortogonálních a unitárních operátorů

(1) zachovávají velikosti vektorů

$$\|\varphi(u)\| = \sqrt{\langle \varphi(u), \varphi(u)\rangle} = \sqrt{\langle u, u\rangle} = \|u\|.$$

(2) zachovávají úhly mezi vektory

úhel mezi $\varphi(u)$ a $\varphi(v)$ má cosinus

$$\frac{\langle \varphi(u), \varphi(v)\rangle}{\|\varphi(u)\|\,\|\varphi(v)\|} = \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|\,\|v\|},$$

což je cosinus úhlu mezi vektory $u$ a $v$.

(3) Tyto operátory jsou lin. izomorfismy

$\mathrm{Ker}\,\varphi = \{\vec{o}\}$ $\quad \varphi(u) = 0 \implies \|u\| = \|\varphi(u)\| = 0 \implies u = \vec{o}$

Tedy $\varphi$ je prosté a potom $\dim \mathrm{Im}\,\varphi = \dim U - \dim \mathrm{Ker}\,\varphi = n$

je $\mathrm{Im}\,\varphi = U$ a $\varphi$ je lin. izomorfismus.

(4) Převádí ortonormální bázi na ortonormální bázi

$u_1, \dots, u_n$ orton. báze $\quad \langle u_i, u_j \rangle = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$

$\varphi(u_1), \dots, \varphi(u_n)$ má vlastnost $\quad \langle \varphi(u_i), \varphi(u_j) \rangle = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$

Tedy je to ortonormální báze.

**Věta:** Následující vlastnosti operátoru $\varphi : U \to U$ nad $\mathbb{C}$ ($\mathbb{R}$) jsou ekvivalentní:

(1) $\varphi$ je unitární (ortogonální)

(2) $\varphi$ převádí ortonormální bázi na ortonormální bázi

(3) $\varphi$ má v ortonormální bázi $\alpha$ matici $A = (\varphi)_{\alpha,\alpha}$ s vlastností

$$A^{-1} = \overline{A}^{T} \qquad \left(\text{nad } \mathbb{R}: A^{-1} = A^{T}\right)$$

Důkaz:

(1) $\Rightarrow$ (2) jsme si již ukázali.

(2) $\Rightarrow$ (1) $u_1, u_2, \dots u_n$ ortonormální a $\varphi(u_1), \dots \varphi(u_n)$ ji ortonormální

$$u = \sum a_i u_i \qquad \langle u, v \rangle = \left\langle \sum a_i u_i, \sum b_j u_j \right\rangle =$$
$$v = \sum b_j u_j$$

$$= \sum_{i,j} a_i b_j \langle u_i, u_j \rangle = \sum a_i b_i$$

$$\varphi(u) = \sum a_i \varphi(u_i)$$
$$\varphi(v) = \sum b_j \varphi(u_j) \qquad \langle \varphi(u), \varphi(v) \rangle = \left\langle \sum a_i \varphi(u_i), \sum b_j \varphi(u_j) \right\rangle =$$

$$= \sum_{i,j} a_i b_j \langle \varphi(u_i), \varphi(u_j) \rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = \langle u, v \rangle$$

(1) $\Longleftrightarrow$ (3)

$\alpha$ orton. báze $u_1, u_2, \dots, u_n$

$$A = (\varphi)_{\alpha,\alpha} \qquad \overline{A}^T \cdot A = E$$

$$(*) \qquad r_i(\overline{A}^T) \cdot s_j(A) = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

$$s_j(A) = (\varphi(u_j))_\alpha$$

$$r_i(\overline{A}^T) = s_i(\overline{A})^T = \overline{(s_i(A))}^T = \overline{(\varphi(u_i))_\alpha}^T$$

Rovnost $(*)$ je ekvivalentní s tím, že

$$\overline{(\varphi(u_i))_\alpha}^T \cdot (\varphi(u_j))_\alpha = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

$$\|$$

$$\langle \varphi(u_j) \mid \varphi(u_i) \rangle$$

**Definice** Matice $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{C})$ se nazývá unitární, jestliže

$$A \cdot \bar{A}^T = E \qquad (A^{-1} = \bar{A}^T)$$

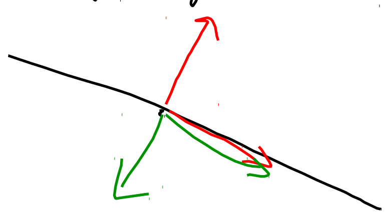
Matice $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ se nazývá ortogonální, jestliže

$$A \cdot A^T = E \qquad (A^{-1} = A^T).$$

Příklady ortogonálních operátorů.

(1) $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ otočení kolem počátku převádí ortonorm. bázi na ortonorm. bázi, proto je to ortogonální zobrazení.

(2) $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ je symetrie podle přímky procházející počátkem.



(3) $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ otočení kolem přímky procházející počátkem

(4) $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ symetrie podle přímky nebo roviny procházející počátkem

<u>Věta</u>: Determinant ortogonální matice je $= \pm 1$.
Determinant unitární matice A má abs. hodnotu 1.

$$|\det A| = 1.$$

Důkaz pro unitární matici

$$A \cdot \bar{A}^T = E$$

$$\det (A \cdot \bar{A}^T) = \det E = 1$$

$$\det A \cdot (\det \bar{A}^T) = 1$$

$$\det A \cdot \overline{\det A} = 1$$

$$|\det A|^2 = 1 \quad \Rightarrow |\det A| = 1.$$

# Vlastní čísla a vlastní vektory unitárních operátorů

**Věta** Nechť $\varphi: U \to U$ je unitární.

(1) Každé vlastní číslo má abs. hodnotu rovnu 1.

(2) Vlastní vektory k různým vlastním číslům jsou navzájem kolmé.

(3) V $U$ existuje ortonormální báze tvořená vlastními vektory.

První dvě vlastnosti platí i pro ortogonální operátor, 3. vlastnost na ortogonální operátor neplatí (otočení v $\mathbb{R}^2$).

Důkaz

(1) $\varphi(u) = \lambda u \quad , u \neq \vec{0}$

$$\underset{\neq 0}{\langle u, u\rangle} = \langle \varphi(u), \varphi(u)\rangle = \langle \lambda u, \lambda u\rangle = \lambda\overline{\lambda}\langle u, u\rangle = |\lambda|^2 \underset{\neq 0}{\langle u, u\rangle}$$

Proto $1 = |\lambda|^2 \Rightarrow |\lambda| = 1$.

(2) $\varphi(u_1) = \lambda_1 u_1, \quad \varphi(u_2) = \lambda_2 u_2$

$$\langle u_1, u_2\rangle = \langle \varphi(u_1), \varphi(u_2)\rangle = \langle \lambda_1 u_1, \lambda_2 u_2\rangle = \lambda_1\overline{\lambda_2}\langle u_1, u_2\rangle$$

Kdyby $\langle u_1, u_2\rangle \neq 0$, pak

$$\lambda_1\overline{\lambda_2} = 1 \qquad \lambda_2 \cdot \overline{\lambda_2} = 1$$

$$\lambda_1 \cdot \frac{1}{\lambda_2} = 1 \quad \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2, \text{ spor s předpokladem.}$$

Proto $\langle u_1, u_2\rangle = 0$. $u_1$ a $u_2$ jsou na sebe kolmé.

(3) Indukcí podle dimenze $U$. Pro $\dim U = 1$ věta platí.

Nechť platí pro unitární operátory na prostorech dimenze $n-1 \geq 1$.

Nechť $\dim U = n$, $\varphi : U \to U$ unitární.

Char. polynom operátoru $\varphi$ <u>má v komplexních číslech kořen</u>

Tento kořen – označme ho $\lambda_n$ je vlastní číslo $\varphi$ s vlastním vektorem $u$, nechť $\|u\| = 1$.

Ukážeme, že

$$V = [u]^{\perp}$$

je invariantní podprostor pro $\varphi$.

$$v \in V \qquad \langle \varphi(v), \varphi(u) \rangle = \langle v, u \rangle = 0$$

$$\langle \varphi(v), \lambda_n u \rangle = \overline{\lambda_n} \langle \varphi(v), u \rangle, \quad \lambda_n \neq 0$$

Proto $\langle \varphi(v), u \rangle = 0$ a tedy $\varphi(v) \perp u$, $\varphi(v) \in V$.

$\dim V = n-1$

$\varphi|_V : V \to V$ je unitární

Použijeme indukční předpoklad a dostaneme, že ve $V$ je orton. báze $u_1, u_2, \dots, u_{n-1}$ tvořená vl. vektory operátoru $\varphi$.

Pak vektory $u_1, u_2, \dots, u_{n-1}, u_n = u$ tvoří ortonormální bázi prostoru $U$ a jsou to vlastní vektory operátoru $\varphi$.