UNITÁRNÍ A ORTOGONÁLNÍ OPERÁTORY

$\varphi : U \to U$

$$\langle \varphi(u), \varphi(v) \rangle = \langle u, v \rangle$$

$$\left.\begin{array}{lll} \text{nad } \mathbb{C} & \varphi & \text{unitární} \\ \text{nad } \mathbb{R} & \varphi & \text{ortogonální} \end{array}\right\} \text{ operátor}$$

A matice $n \times n$ nad $\mathbb{C}$ unitární

$$A^{-1} = \bar{A}^T \iff \bar{A}^T A = E \iff A \cdot \bar{A}^T = E$$

řádky unitární matice tvoří ortonormální bázi

$$\begin{array}{ll} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{array} = r_i(A) \cdot s_j(\bar{A}^T) = r_i(A) \cdot \overline{r_j(A)} = \langle r_i(A), r_j(A) \rangle$$

Totéž platí pro sloupce

A matici $n \times n$ nad $\mathbb{R}$ ortogonální

$$A^{-1} = A^{T} \iff A^{T}A = E \iff A A^{T} = E$$

Opět řádky i sloupce matice tvoří ortonormální bázi v $\mathbb{R}^n$.

<u>Příklady</u> $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ ortog. matice

$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$\varphi(x) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ otočení o úhel α v rovině kolem počátku

$$A = \begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 & -1/3 \\ 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

Minule

$|\det A| = \underline{1}$

Pro unitární i ortogonální

- vlastní čísla mají abs. hodnotu 1
- vlastní vektory k různým vlastním číslům jsou na sebe kolmé

UNITÁRNÍ (znovu) $\varphi : U \to U$

- v U existuje báze ortonormální tvořená vl. vektory operátoru φ

Tato věta neplatí pro ortogonální operátory

– viz otočení o úhel α v $\mathbb{R}^2$, $0 < \alpha < \pi$

Invariantní podprostory ortogonálních operátorů

Pro zjednodušení se budeme zabývat ort. operátory

$$\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \qquad \varphi(x) = Ax$$

kde A je ortogonální matice.

- $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R}) \subseteq Mat_{n\times n}(\mathbb{C})$ má vlastní číslo $\lambda = a + ib$.

  A jako komplexní matice definuje $\tilde{\varphi} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, $\varphi(x) = Ax$. K vlastnímu číslu $\lambda = a+ib$ existuje v $\mathbb{C}^n$ vlastní vektor $u = u_1 + iu_2$, $u_1, u_2 \in \mathbb{R}^n$.

  Potom rovněž $\bar{\lambda} = a - ib$ je vlastní číslo $\tilde{\varphi}$ s vlastním vektorem $\bar{u} = u_1 - iu_2$.

$$u = u_1 + iu_2$$

$$\begin{pmatrix} 3+2i \\ -2i \\ 1-3i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Důkaz: nechť $A u = \lambda u$

Provedeme kompl. sdružení

$$\overline{A u} = \overline{\lambda u}$$

$$\bar{A} \bar{u} = \bar{\lambda} \bar{u} \qquad A \text{ je reálná matice}$$

$$A \bar{u} = \bar{\lambda} \bar{u}$$

$\bar{\lambda}$ je vl. číslo a $\bar{u}$ je vl. vektor.

- $\lambda = \cos\alpha + i \sin\alpha$ a pro vlastní vektor $u = u_1 + i u_2$ platí:

$$\|u_1\| = \|u_2\| \qquad u_1 \perp u_2$$

To si za předpokladu, že $\lambda \notin \mathbb{R}$

Důkaz λ a $\bar{\lambda}$ jsou v tomto případě 2 různá vl. čísla unitárního operátoru $\tilde{\varphi}: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ $\tilde{\varphi}(x) = Ax$.

Příslušné vlastní vektory jsou na sebe kolmé:

$$0 = \langle u_1 + i u_2, u_1 - i u_2 \rangle_{\mathbb{C}^2} = \langle u_1, u_1 \rangle + \langle i u_2, -i u_2 \rangle + \langle u_1, -i u_2 \rangle + \langle i u_2, u_1 \rangle$$

$$= \|u_1\|^2 + (i)\overline{(-i)}\,\|u_2\|^2 + \overline{(-i)}\langle u_1, u_2\rangle + i\langle u_2, u_1\rangle$$

$$= \left(\|u_1\|^2 - \|u_2\|^2\right) + i\left(2\langle u_1, u_2\rangle\right)$$

0 se anulează reala și imaginara, adică

$$\|u_1\|^2 - \|u_2\|^2 = 0$$

$$\langle u_1, u_2\rangle = 0,$$

ceea ce trebuia demonstrat.

- valoarea proprie $\lambda = a + ib = \cos\alpha + i\sin\alpha \notin \mathbb{R}$
  vectorul propriu $u = u_1 + i u_2$ pentru $\tilde{\varphi} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$
  Planul $[u_1, u_2] \subseteq \mathbb{R}^n$ e invariant subspațiu de dim 2 în $\mathbb{R}^n$ a φ și obținem unghiul α de la u_2 la u_1.

<u>Důkaz:</u>

$$A(u_1 + i u_2) = (\cos\alpha + i \sin\alpha)(u_1 + i u_2)$$

$$A u_1 + i A u_2 = (\cos\alpha\, u_1 - \sin\alpha\, u_2) + i(\sin\alpha\, u_1 + \cos\alpha\, u_2)$$

Porovnáním reálné a imag. složky dostaneme

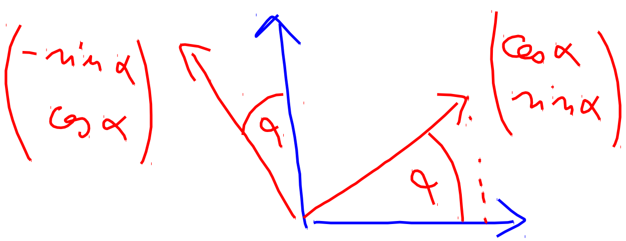
$$A u_1 = \cos\alpha\, u_1 - \sin\alpha\, u_2$$

$$A u_2 = \sin\alpha\, u_1 + \cos\alpha\, u_2$$

$V = [u_1, u_2]$ je invariantní podprostor operátoru $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(x) = Ax$.

$$\alpha = (u_2, u_1)$$

$$(\varphi/V)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} (\varphi(u_2))_\alpha & (\varphi(u_1))_\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$



8

Věta: Nechť $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je ortogonální operátor. Potom je $\mathbb{R}^n$ direktním součtem navzájem kolmých podprostorů dimenze 1 a 2, které jsou invariantní vůči φ. V podprostorech dimenze 1 je φ identita nebo $-$identita, v podprostorech dimenze 2 je φ otočení.

Důkaz: Reálná vl. čísla jsou 1 a -1. Ty určují jednorozměrné inv. podprostory, kde buď $\varphi(u)=u$ nebo $\varphi(u)=-u$. Vlastním číslům $\cos\alpha \pm i\sin\alpha \notin \mathbb{R}$ odpovídají 2-rozměrné podprostory. Stačí dokázat, že jsou na sebe kolmé.

$\lambda \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ vl. čísla pro $\tilde{\varphi}\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$

$\mu \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ —— // ——

Příslušné vl. vektory $\tilde{\varphi}$ jsou na sebe kolmé λ, μ, $\bar{\mu}$

$\lambda \neq \mu$, $\bar{\mu}$

$\lambda \neq \bar{\mu}$

$u = u_1 + i u_2$

$v = v_1 + i v_2$

$\bar{v} = v_1 - i v_2$

$$0 = \langle u_1 + i u_2, v_1 + i v_2 \rangle$$

$$0 = \langle u_1 + i u_2, v_1 - i v_2 \rangle$$

Odtud dokážeme, že

$$[u_1, u_2] \perp [v_1, v_2]$$

$$0 = \langle u_1, v_1\rangle + \langle iu_2, iv_2\rangle + \langle iu_2, v_1\rangle + \langle u_1, iv_2\rangle$$

$$0 = \langle u_1, v_1\rangle - \langle iu_2, iv_2\rangle + \langle iu_2, v_1\rangle - \langle u_1, iv_2\rangle$$

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \langle u_1, u_2\rangle + \langle u_2, v_2\rangle \\ 0 &= \langle u_2, v_1\rangle - \langle u_1, v_2\rangle \\ 0 &= \langle u_1, v_1\rangle - \langle u_2, v_2\rangle \\ 0 &= \langle u_2, v_1\rangle + \langle u_1, v_2\rangle \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} &\langle u_1, v_1\rangle = \langle u_2, v_2\rangle = 0 \\ &\langle u_2, v_1\rangle = \langle u_1, v_2\rangle = 0 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &u_1 \perp v_1, v_2 \\ &u_2 \perp v_1, v_2 \\ &[u_1, u_2] \perp [v_1, v_2] \end{aligned}$$

Součet dimenzí je n. Podmínka dána. Proto je $\mathbb{R}^n$ jejich direktním součtem.

Věta Každá ortogonální matice A řádu 3×3 reprezentuje ortogonální zobrazení $\varphi(x) = Ax : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, které je buď

(1) otočení kolem osy procházející počátkem

nebo

(2) složení otočení kolem osy se symetrií podle roviny kolmé k této ose.

Ve vhodné bázi $\alpha = (u_1, u_2, u_3)$ má φ matici

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \left(\begin{array}{c|cc} \pm 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{array}\right)$$

kde u_1 je směrový vektor osy otáčení a $[u_2, u_3]$ je invariantní rovina (podle které děláme symetrii).

Důkaz: Char. polynom je stupně 3. Tedy musí mít reálný kořen. Ten je ± 1.

(1) Možnost 3 reálné kořeny ± 1, $\cos\alpha \pm i\sin\alpha$, $\alpha = 0, \pi$

(2) jeden reálný kořen a 2 kořeny $\cos\alpha \pm i\sin\alpha$, $\alpha \in (0, \pi)$

Podle předchozího je $\mathbb{R}^3 = [u_1] \oplus [u_2, u_3]$

vl. vektor k ± 1 $\qquad$ $u_3 + i u_2$ je vl. vektor k $\cos\alpha + i\sin\alpha$

φ je násobení ± 1 na $[u_1]$

φ je otočení o úhel α od u_2 k u_3 v $[u_2, u_3]$

Ta nám dává $[u_1]$ jako osu otáčení úhel α

Podle toho zda vl. číslo k u_1 je 1 nebo -1 dostaneme (1) nebo (2) ve větě.

Příklad 1

$\varphi(x) = Ax : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \qquad A = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \end{pmatrix}$

$\det(A - \lambda E) = (1-\lambda)(\lambda^2 - \lambda + 1)$

$\det\left(\frac{1}{3}(\quad) - \lambda E\right) = \det \frac{1}{3}\left((\quad) - 3\lambda E\right) = \frac{1}{27} \det$

$\begin{pmatrix} 2-3\lambda & -1 & 2 \\ 2 & 2-3\lambda & -1 \\ -1 & 2 & 2-3\lambda \end{pmatrix} =$

Vlastní čísla	vlastní vektor	normovaný vl. vektor
$\lambda_1 = 1$	$(1, 1, 1)$	$v_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

určuje osu otáčení

$\lambda_2 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{3} + i \sin\frac{\pi}{3}$

$\lambda_3 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{3} - i \sin\frac{\pi}{3}$

$u = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 0 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$

$$v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 0 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

v bázi $\alpha = \left(v_1, \frac{v_2}{\|v_2\|}, \frac{v_3}{\|v_3\|} \right)$ má φ matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} \\ 0 & \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{pmatrix}$$

φ je otočení kolem osy $[v_1]$ o úhel $\frac{\pi}{3}$ od v_2 k v_3.

14

Příklad 2 $\varphi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je otočení kolem osy

$x_1 = x_2, \; x_3 = 0$

o úhel $\frac{\pi}{2}$ tak, že $\varphi(1,0,0)$ má všechny složky kladné.
Najděte matici φ ve stand. bázi $\varphi(x) = Ax$.

Řešení: První najdeme matici φ ve vhodné ortonormální bázi a tu převedeme na matici φ ve stand. bázi.

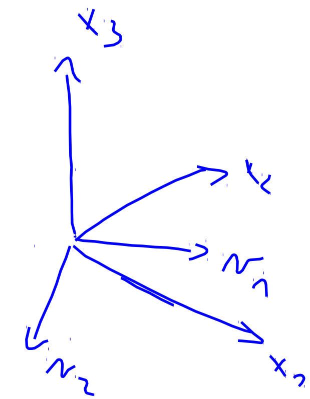
Vhodná ort. báze – směrový vektor osy otáčení
– dva vektory v rovině kolmé

$$v_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) \quad (1,1,0) \text{ je směr. vektor osy otáčení}$$

$$v_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$$

$$v_3 = (0,0,1)$$

Matice φ v ortonormální bázi α je



$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \left((\varphi(v_1))_\alpha \; (\varphi(v_2))_\alpha \; (\varphi(v_3))_\alpha \right)$$

$$= \left((v_1)_\alpha, (v_3)_\alpha, (-v_2)_\alpha \right)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\frac{\pi}{2} & -\sin\frac{\pi}{2} \\ 0 & \sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} \end{pmatrix}$$

$$(\varphi)_{\varepsilon,\varepsilon} = (id)_{\varepsilon,\alpha} (\varphi)_{\alpha,\alpha} (id)_{\alpha,\varepsilon}$$

$$= (id)_{\varepsilon,\alpha} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} (id)^{-1}_{\varepsilon,\alpha}$$

využíváme zobecnění

Matice přechodu mezi ortonormálními bázemi je ortogonální.

Proto $(id)^{-1}_{\varepsilon,\alpha} = (id)^{T}_{\varepsilon,\alpha}$

V našem případě dostaneme

$$(\varphi)_{\varepsilon,\varepsilon} = (id)_{\varepsilon,\alpha}\,(\varphi)_{\alpha,\alpha}\,(id)^{T}_{\varepsilon,\alpha} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -\sqrt{2}/2 \\ 1/2 & 1/2 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \end{pmatrix} = A$$