SAMOADJUNGOVANÉ OPERÁTORY

U, V vekt. prostory se skalárním součinem nad $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$

$\varphi : U \to V$ lineární zobrazení

Zobrazení $\varphi^* : V \to U$ nazýváme adjungované k φ, jestliže platí:

$$\forall u \in U, \forall v \in V$$

$$\langle \varphi(u), v \rangle_V = \langle u, \varphi^*(v) \rangle_U$$

<u>Příklad</u>: $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k \quad \varphi(x) = Ax \quad A$ je matice $k \times n$

Potom zobrazení $\varphi^* : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ je dáno předpisem

$$\varphi^*(y) = A^T y$$

Ověříme, že platí požadovaná rovnost

$$\langle \varphi(x), y\rangle = \langle Ax, y\rangle = (Ax)^T \cdot y = x^T \cdot A^T y$$

$$= \langle x, A^T y\rangle = \langle x, \varphi^*(y)\rangle$$

<u>Příklad</u> $\varphi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^k \quad \varphi(x) = Ax$

Najdi adjungované zobrazení kde $\varphi^*(y) = \bar{A}^T y$

$$A = \begin{pmatrix} i & 1-i & 2+3i \\ 1 & 4+i & 1+2i \end{pmatrix} \qquad \bar{A}^T = \begin{pmatrix} -i & 1 \\ 1+i & 4-i \\ 2-3i & 1-2i \end{pmatrix}$$

$$\langle \varphi(x), y\rangle = \langle Ax, y\rangle = (Ax)^T \cdot \bar{y} = x^T \cdot A^T \cdot \bar{y} =$$

$$= x^T \cdot \overline{(\bar{A}^T y)} = \langle x, \bar{A}^T y\rangle = \langle x, \varphi^*(y)\rangle$$

Věta: Ke každému lineárnímu zobrazení $\varphi: U \to V$ existuje adjungované.

Důkaz: Nechť α, β jsou ortonormální báze v U a V. Nechť $(\varphi)_{\beta,\alpha} = A$ a zvolme $\varphi^*: V \to U$ tak, že $(\varphi^*)_{\alpha,\beta} = \overline{A}^T$. Pak φ^* je adjungované k φ.

podle příkladu

$$\langle \varphi(u), v \rangle = \langle A(u)_\alpha, (v)_\beta \rangle = \langle (u)_\alpha, \overline{A}^T (v)_\beta \rangle =$$
$$= \langle u, \varphi^* v \rangle$$

<u>Samoadjungovaná zobrazení</u> jsou lineární operátory $\varphi: U \longrightarrow U$ takové, že

$$\varphi = \varphi^*$$

tj. $\langle \varphi(u), v \rangle = \langle u, \varphi(v) \rangle$

pro všechna $u, v \in U$.

<u>Věta:</u> Nechť $\varphi: U \longrightarrow U$ a α je ortonormální báze v U. Potom je φ samoadjungované právě když matice φ v bázi α má <u>vlastnost</u>

$$(\varphi)_{\alpha\alpha} = \overline{(\varphi)_{\alpha\alpha}}^T$$

<u>Důkaz:</u> Víme, že matice φ^* je $\overline{(\varphi)_{\alpha\alpha}}^T$. Proto rovnost $\varphi = \varphi^*$ je ekvivalentní rovnosti $(\varphi)_{\alpha\alpha} = \overline{(\varphi)_{\alpha\alpha}}^T$.

Definice: Reálná matice A typu $n \times n$ se nazývá symetrická, jestliže

$$A = A^T.$$

Komplexní matice A typu $n \times n$ se nazývá hermitovská, jestliže

$$A = \overline{A}^T$$

Matice náhodj. operátorů v ortonormální bázi jsou symetrické (nad $\mathbb{R}$) a hermitovské (nad $\mathbb{C}$).

Příklad hermitovské matice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1+i & 2+3i \\ 1-i & 4 & -3-i \\ 2-3i & -3+i & 5 \end{pmatrix} \qquad \overline{A}^T = A.$$

Věta: Nechť $\varphi : U \longrightarrow U$ je samoadjungovaný operátor (nad $\mathbb{C}$ nebo nad $\mathbb{R}$). Potom

(1) všechna vlastní čísla φ jsou reálná,

(2) vlastní vektory příslušné různým vl. číslům jsou na sebe kolmé,

(3) v U existuje ortonormální báze α tvořená vlastními vektory. V této bázi

$$(\varphi)_{\alpha\alpha} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

kde λ_i jsou vl. čísla.

Důkaz:

(1) $\varphi(u) = \lambda u, \ u \neq \vec{o}$

$$\lambda\langle u,u\rangle = \langle \lambda u, u\rangle = \langle \varphi(u), u\rangle = \langle u, \varphi(u)\rangle = \langle u, \lambda u\rangle = \bar{\lambda}\langle u,u\rangle$$

Protože $\langle u,u\rangle \neq 0$, je $\lambda = \bar{\lambda}$ a λ musí být reálné.

(2) Nechť $\varphi(u) = \lambda u, \ \varphi(v) = \mu v \quad \lambda \neq \mu$

$$\lambda\langle u,v\rangle = \langle \lambda u, v\rangle = \langle \varphi(u), v\rangle = \langle u, \varphi(v)\rangle = \langle u, \mu v\rangle = \bar{\mu}\langle u,v\rangle = \mu\langle u,v\rangle$$

Odtud dostaneme $\quad (\lambda - \mu)\langle u,v\rangle = 0$

Protože $\lambda - \mu \neq 0$, musí být $\langle u,v\rangle = 0$.

Tedy $u \perp v$.

(3) Důkaz indukcí podle dimenze U. Pro $n=1$ je tvrzení zřejmé. Nechť platí pro $n-1 \geq 1$.

Nechť $\dim U = n$, $\varphi : U \to U$.

Podle char. polynom operátoru φ má kompl. kořen, tento kořen je vl. číslem φ a to je reálné.

Tedy φ má vl. číslo λ_1 a vl. vektorem u_1, $\|u_1\| = 1$.

Dokážeme, že $[u_1]^\perp$ je invariantní podprostor pro φ. Nechť $v \in [u_1]^\perp$ a chceme dokázat, že $\varphi(v) \in [u_1]^\perp$

$$\langle \varphi(v), u_1 \rangle = \langle v, \varphi(u_1) \rangle = \langle v, \lambda_1 u_1 \rangle = $$
$$= \lambda_1 \langle v, u_1 \rangle = 0.$$

Tedy $\varphi(v) \perp u_1$ a proto $\varphi(v) \in [u_1]^\perp$.

$\dim [u_1]^\perp = n-1$. $\quad \varphi|_{[u_1]^\perp} : [u_1]^\perp \to [u_1]^\perp$

je samoadjungovaný operátor. Podle ind. předpokladu

existují v $[u_1]^\perp$ ortonormální báze tvořená vl. vektory

$u_2, u_3, \dots u_n$. Tedy $\alpha = (u_1, u_2, \dots u_n)$ je ortonormální

báze v U tvořená vl. vektory.

$$(\varphi)_{\alpha\alpha} = \left((\varphi(u_1))_\alpha \ (\varphi(u_2))_\alpha \dots (\varphi(u_n))_\alpha \right) = \left((\lambda_1 u_1)_\alpha (\lambda_2 u_2)_\alpha \dots (\lambda_n u_n)_\alpha \right)$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & & \\ 0 & \lambda_2 & & 0 \\ 0 & 0 & & \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Geometrický příklad samoadj. operátoru

Nechť U je vekt. prostor se skal. součinem a V jeho podprostor. Potom kolmá projekce prostoru U na podprostor V může být chápána jako operátor

$$P : U \longrightarrow U \qquad \operatorname{im} P = V$$

Tento operátor je samoadjungovaný.

Nechť $u \in U$, $v \in U$

$$\langle Pu, v\rangle = \langle Pu, Pv + v - Pv\rangle = \langle Pu, Pv\rangle + \overbrace{\langle \underset{V}{\underset{\cap}{Pu}}, \underset{V^{\perp}}{\underset{\cap}{v - Pv}}\rangle}^{0}$$

$$= \langle Pu, Pv\rangle$$

$$= \langle Pu, Pv\rangle + \underbrace{\langle u - Pu, Pv\rangle}_{0} = \langle u, Pv\rangle$$

Jiný důkaz: Zvolme ortonormální bázi $u_1, u_2 \dots u_k$ podprostoru V a rozšiřme ji na ortonormální bázi $\alpha = (u_1 \dots u_k \dots u_n)$ prostoru U. Potom

$$(\varphi)_{\alpha\alpha} = \Big((\varphi(u_1))_\alpha \cdots (\varphi(u_k))_\alpha \; (\varphi(u_{k+1}))_\alpha \cdots (\varphi(u_n))_\alpha \Big)$$

$$= \Big((u_1)_\alpha \cdots (u_k)_\alpha \; (\vec{o})_\alpha \cdots (\vec{o})_\alpha \Big) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & 1 & & & & 0 & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & 0 & & & 0 & & \\ & & & & & 0 & \\ & & & & & & \ddots \; 0 \end{pmatrix}$$

Kolmá projekce je samozřejmě operátor, který má vl. čísla 1 a 0. Násobnost 1 je rovna dim V.

Věta: Každý samoadjungovaný operátor $\varphi : U \to U$ je tvaru

$$\varphi = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \dots + \lambda_n P_n$$

kde P_i jsou kolmé projekce do navzájem kolmých podprostorů.

Důkaz: Jde o důsledek předchozí věty. Nechť $(u_1, \dots, u_n)$ je ortonormální báze tvořená vl. vektory a nechť $P_i : U \to [u_i]$ je kolmá projekce.

Potom platí

$$\varphi(u) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i u_i\right) = \sum x_i \varphi(u_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \lambda_i u_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x_i u_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (P_i u) = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i\right)(u)$$

Důsledek Pro každou symetrickou reálnou matici A existuje ortogonální matice P tak, že

$$P^T A P = P^{-1} A P$$

je diagonální.

Důkaz: Zobrazení $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\varphi(x) = Ax$ je samoadjungované. Podle jedné z předchozích vět existuje v $\mathbb{R}^n$ ortonormální báze α tvořená vl. vektory. Tedy

ε a α jsou ortonorm. báze, tedy matice přechodu je ORTOGONÁLNÍ

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \; \lambda_n \end{pmatrix} = (\varphi)_{\alpha\alpha} = (id)_{\alpha\varepsilon}(\varphi)_{\varepsilon\varepsilon}(id)_{\varepsilon\alpha} = (id)^{-1}_{\varepsilon\alpha}(\varphi)_{\varepsilon\varepsilon}(id)_{\varepsilon\alpha}$$

$$= \underline{P}^{-1} A P = \underline{P}^T A P$$

Věta: Nechť U je reálný vekt. prostor se skal. součinem a $g: U \to \mathbb{R}$ je kvadr. forma. Potom v U existuje ortonormální báze α v jejíž souřadnicích je

$$g(u) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \dots + \lambda_n x_n^2$$

kde $(u)_\alpha = (x_1, x_2 \dots x_n)^T$ a $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n$ jsou vlastní čísla matice kvadr. formy.

Důkaz: Vezmeme v U nějakou ortonormální bázi β. V této bázi má g symetrickou matici B

$\beta = (v_1, v_2 \dots v_n)$ K této matici podle předchozího tvrzení existuje orton. matice P taková, že

$$A = P^T B P$$

je diagonální. Najdeme bázi α takovou, aby A byla matici kvadr. formy g v této bázi

$$A = \underbrace{(id)^T_{\beta\alpha}}_{P^T} \, B \, \underbrace{(id)_{\beta\alpha}}_{P}$$

Položíme

$$\alpha = (u_1, u_2, \dots u_n) = (v_1, v_2 \dots v_n)_{\beta} P$$

V této bázi má g diagonální matici

Pokud β byla ortonormální báze a P ortogonální matice,

je α ortonormální báze

Praktický výpočet

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$g(x) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2$$

Předchozí postup na diagonalizaci

$$\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & e_1 \\ -1 & 2 & e_2 \\ \hline e_1 & e_2 & \end{array} \sim \begin{array}{cc|c} 1 & -1 & e_1 \\ 0 & 1 & e_1+e_2 \\ \hline e_1 & e_2 & \end{array} \sim \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & e_1 \\ 0 & 1 & e_1+e_2 \\ \hline e_1 & e_1+e_2 & \end{array}$$

V bázi $B = (e_1, e_1+e_2) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ má g vyjádření

$$g(y) = y_1^2 + y_2^2$$

ALE TATO BÁZE NENÍ ORTONORMÁLNÍ

Hledání ortonormální báze

$g(x) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2$ Matice je $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

Najdeme vl. čísla a vlastní vektory pro samoadj. operátor $\varphi(x) = Bx$.

$$\det(B - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-2) - 1 = \lambda^2 - 3\lambda + 1$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$v_1 = \left(1, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right) \qquad \langle v_1, v_2 \rangle = 1 + \frac{1-5}{4} = 0$$

$$\alpha = \left(\frac{v_1}{\|v_1\|}, \frac{v_2}{\|v_2\|}\right)$$

$$v_2 = \left(1, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

V této bázi má g vyjádření

$$g(u) = \lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} z_1^2 + \frac{3-\sqrt{5}}{2} z_2^2$$