JORDANŮV KANONICKÝ TVAR

JKT matice je blokově diag. matice s Jordanovými buňkami na diagonále

$$\begin{pmatrix} \boxed{J_{k_1}(\lambda_1)} & & & & 0 \\ & \boxed{J_{k_2}(\lambda_2)} & & & \\ & & \boxed{\ddots} & & \\ 0 & & & \ddots & \\ & & & & \boxed{\ddots} \end{pmatrix}$$

$$J_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}$$

Řetězec pro vl. číslo λ operátoru $\varphi : U \to U$ je posloupnost vektorů $(v_1, v_2, \dots, v_k)$, $v_1 \neq \vec{o}$.

$$(\varphi - \lambda\, id)(v_1) = 0, \quad (\varphi - \lambda\, id)(v_2) = v_1, \quad \dots\dots \quad (\varphi - \lambda\, id)(v_k) = v_{k-1}.$$

Matice operátoru $\varphi|[v_1, v_2, \dots v_k] : [v_1 \dots v_k] \to [v_1 \dots v_k]$ v bázi $\alpha = (v_1, v_2, \dots v_k)$ je

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = J_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & & \\ 0 & \lambda & 1 & & \\ 0 & 0 & \lambda & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & & \lambda \end{pmatrix}$$

Základní úloha: pro operátor $\varphi : U \to U$ najít bázi, v níž má φ Jord. kan. tvar.

To není možné vždy. Je to možné, právě když φ má součet alg. násobností všech vl. čísel roven dimenzi prostoru, na kterém je definován.

③

Pravidla pro počítání

① Každé vl. číslo bude na diagonále JKT tolikrát, kolik činí jeho alg. násobnost.

② Vl. číslo λ bude v tolika buňkách, kolik činí jeho geometrická násobnost $= \dim \operatorname{Ker}(\varphi - \lambda \mathrm{id})$

③ Velikost největší buňky s vl. číslem λ = nejmenší k takové, že hodnost $(A-\lambda E)^k = n$ – alg. násobnost λ

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} (A-\lambda E)^2 = 0 = 4 - \text{alg. násobnost } \lambda \\ A - \lambda E \neq 0 \end{array}$$

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \lambda \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} (A-\lambda E)^3 = 0 = 4 - \text{alg. násobnost } \lambda \\ (A-\lambda E)^2 \neq 0 \end{array}$$

$\lambda_1 \neq \lambda_2$

$$A = \left(\begin{array}{cc|c|cc} \lambda_1 & 1 & & & \\ 0 & \lambda_1 & & & \\ \hline & & \boxed{\lambda_1} & & \\ \hline & & & \lambda_2 & 1 \\ & & & 0 & \lambda_2 \end{array}\right)$$

$$A - \lambda_1 E = \left(\begin{array}{cc|c|cc} 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & & & \\ \hline & & \boxed{0} & & \\ \hline & & & \lambda_2-\lambda_1 & 1 \\ & & & 0 & \lambda_2-\lambda_1 \end{array}\right)$$

$$(A - \lambda_1 E)^2 = \left(\begin{array}{cc|c|cc} 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & & & \\ \hline & & \boxed{0} & & \\ \hline & & & (\lambda_2-\lambda_1)^2 & * \\ & & & 0 & (\lambda_2-\lambda_1)^2 \end{array}\right)$$

$h(A-\lambda_1 E)^2 = 2 = 5 -$ alg. nás. λ_1

S těmito třemi pravidly si vystačíme pouze pro matice malých rozměrů (do 4×4).
K nalezení příslušné báze je potřeba hledat řetězce vektorů.

Příklad 4

typ ne minule

$\varphi: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4 \qquad \varphi(x) = Ax$

$$A = \begin{pmatrix} -13 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -30 & 12 & 9 & 5 \\ -12 & 6 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

vl. čísla -1 alg. násobnosti 4
geom. násobnosti 2

2 možnosti

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 1 & & \\ 0 & -1 & & \\ \hline & & -1 & 1 \\ & & 0 & -1 \end{array}\right) \quad \text{nebo} \quad \begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & \\ 0 & -1 & 1 & \\ 0 & 0 & -1 & \\ \hline & & & -1 \end{array}$$

$(A+E)^2 = 0$ to vede k 1. možnosti. Umíme určit Jord. kan. tvar, ale neznáme vhodnou bázi, ve které $(\varphi)_{\alpha,\alpha} = J$.

⑥

Našli jsme řetězce

$$u_1 = (0,-1,0,3)^T \xrightarrow{A+E} u = (1,0,3,0)^T$$

$$v_1 = (0,-2,0,5)^T \xrightarrow{A+E} v = (0,0,1,-2)^T$$

$$\alpha = (u, u_1, v, v_1)$$

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = J = \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 1 & & \\ 0 & -1 & & \\ \hline & & -1 & 1 \\ & & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = (id)_{\alpha,\varepsilon} (\varphi)_{\varepsilon,\varepsilon} (id)_{\varepsilon,\alpha}$$

$$J = P^{-1} A P$$

$$P = (id)_{\varepsilon,\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Jiný způsob řešení — je možný pouze v případě, že máme jediné vl. číslo

Hledáme řetězce náhodným výběrem

$x = (1,0,0,0)$

$(A+E)x = (-12, 0, -30, -12)^T = y$

$(A+E)y = (0, 0, 0, 0)^T$

$x \xrightarrow{A+E} y \xrightarrow{A+E} 0$

máme řetězec délky 2:

$z = (0,1,0,0)$

$(A+E)z = (5, 0, 12, 6) = w$

$(A+E)w = (0,0,0,0)$

$z \xrightarrow{A+E} w \xrightarrow{A+E} 0$

$B = (y, x, w, z)$

$$(\varphi)_{B,B} = \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$$Q = \begin{pmatrix} -12 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -30 & 0 & 12 & 0 \\ -12 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$J = (\varphi)_{B,B} = (id)_{B,\varepsilon}(\varphi)_{\varepsilon,\varepsilon}(id)_{\varepsilon,B} = Q^{-1} A Q$$

Příklad 5

$\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4 \qquad \varphi(x) = Ax$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & -3 \\ 6 & 9 & 4 & -8 \\ -3 & -4 & -1 & 4 \\ 9 & 9 & 6 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda E) = (1-\lambda)^4$$

$\lambda = 1$ je vl. číslo alg. násobnosti 4

Vl. vektory $\quad u = (0,1,0,1)^T$

$\qquad\qquad\quad v = (-2,0,3,0)^T$

Geom. násobnost je 2.

Máme 2 možnosti

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \text{nebo} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Prvně zjistíme, kterým vl. vektorem začíná řetězec délky 3 nebo 2.

9

Zjišťujeme pro která a, b má řešení soustava

$$(A-E)\,w = a u + b v$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 2 & -3 & -2b \\ 6 & 8 & 4 & -8 & a \\ -3 & -4 & -2 & 4 & 3b \\ 9 & 9 & 6 & -9 & a \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 2 & -3 & -2b \\ 0 & 2 & 0 & -2 & a+4b \\ 0 & -1 & 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a+6b \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 2 & -3 & -2b \\ 0 & -1 & 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a+6b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a+6b \end{array}\right)$$

Soustava má řešení, právě když $a+6b=0$

Odtud již plyne, že v $\mathbb{R}^4$ nejsou dva lin. nezávislé řetězce délky 2. Nastane případ

$$J = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & 0 & & 1 \end{array}\right)$$

Zvolíme $a=-6,\ b=1$

$$-6u + v = (-2, -6, 3, -6)^T$$

Řešení soustavy je

$$w = \left(\tfrac{1}{3}, -1, 0, 0\right) + a_1 u + b_1 v$$

Budeme pokračovat v hledání řetězce délky 3.

Hledáme z takové, že

$$(A-E)\,z = w = \left(\tfrac{1}{3}, -1, 0, 0\right)^T + a_1 u + b_1 v$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 2 & -3 & 1/3 - 2b_1 \\ 6 & 8 & 4 & -8 & -1 + a_1 \\ -3 & -4 & -2 & 4 & 3b_1 \\ 9 & 9 & 6 & -9 & a_1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 2 & -3 & 1/3 - 2b_1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & -5/3 + a_1 + 4b_1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & b_1 + 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 + 6b_1 - 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 2 & -3 & 1/3 - 2b_1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & b_1 + 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 + a_1 + 6b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 + a_1 + 6b_1 \end{array}\right)$$

Soustava má řešení právě když $a_1 + 6b_1 = 1$

Zvolíme $a_1 = 1$, $b_1 = 0$

$$w = \left(\tfrac{1}{3}, 0, 0, 1\right)^T$$

$$z = \left(0, 0, \tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{3}\right)^T$$

Tím dostaneme řetězec

$$z \xrightarrow{A-E} w \xrightarrow{A-E} -6u + v \xrightarrow{A-E} 0$$

délky 3

$$v \xrightarrow{A-E} 0$$

Řetězec délky 1

Vezmeme bázi

$$\alpha = \left(-6u+v,\ w,\ z,\ v\right) = \left(\begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

V této bázi je

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = J = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \\ \hline & 0 & & 1 \end{array}\right) = (id)_{\alpha,\varepsilon}(\varphi)_{\varepsilon,\varepsilon}(id)_{\varepsilon,\alpha}$$

$$= P^{-1} \; A \; P$$

$$P = \begin{pmatrix} -2 & 1/3 & 0 & -2 \\ -6 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2/3 & 3 \\ -6 & 1 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$$

(12)

Řešení náhodným vybíráním řetězců

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad u_2 = (A-E)u_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix} \qquad u_3 = (A-E)u_2 = \begin{pmatrix} -6 \\ -18 \\ 9 \\ -18 \end{pmatrix}$$

$$(A-E)u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Řetězec

$$u_1 \xrightarrow{A-E} u_2 \xrightarrow{A-E} u_3 \xrightarrow{A-E} \vec{0}$$

$$v = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{A-E} \vec{0}$$

jiná báze $B = (u_3, u_2, u_1, v)$

daná

$$(\varphi)_{B,B} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \\ \hline & 0 & & 1 \end{array}\right)$$

$$(\varphi)_{B,B} = Q^{-1} A Q$$

$$Q = (id)_{\varepsilon, B} = \begin{pmatrix} -6 & 3 & 1 & -2 \\ -18 & 6 & 0 & 0 \\ 9 & -3 & 0 & 3 \\ -18 & 9 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{(A-E)^2 \neq 0 \Downarrow \text{řetězec délky } 3}$$

Může se stát, že si zvolíme začátek špatně.

$$u_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix} \qquad (A-E)u_2 = \begin{pmatrix} -6 \\ -18 \\ 9 \\ -18 \end{pmatrix} = u_3 \qquad (A-E)u_3 = \vec{0}$$

máme řetězec délky 2.

Aplikace Jord. kan. tvaru pro soustavy dif. rovnic

V analýze

$$x'(t) = a\,x(t)$$
$$x(0) = x_0$$

$x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ neznámá funkce

a číslo

Řešení je

$$x(t) = x_0 e^{at}$$

Z Taylorova rozvoje

$$e^{at} = 1 + \frac{at}{1!} + \frac{(at)^2}{2!} + \frac{(at)^3}{3!} + \dots$$

V analýze 3 se dokazuje, že za jistých podmínek

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1}$$

(Derivujeme člen po členu.)

(14)

Zobecnění: soustava dif. rovnic pro neznámé funkce $x_1, x_2, \dots x_n$ je

$$(*) \quad \begin{aligned} x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ &\dots \\ x_n' &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n \end{aligned}$$

$x_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$$

Soustavu (*) můžeme psát

$$x'(t) = A\,x(t) \qquad A \text{ matice } (a_{ij})$$

Tato soustava má řešení

$$x(t) = e^{At} \cdot x_0, \qquad x_0 \in \mathbb{R}^n$$

$$e^{At} = E + \frac{At}{1!} + \frac{A^2t^2}{2!} + \frac{A^3t^3}{3!} + \dots$$

Součtem této řady je matice. Tato řada je nekonečná.

15

Má-li A shodný tvar, pak je řada konečná.

Uvažujme J v Jord. kan. tvaru a spočítáme e^{Jt}

$$J = D + V$$

D – diagonální, V – jedničky nad hlavní diagonálou

$$2E \cdot B = B \cdot 2E$$

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & & & \\ & 2 & & & \\ & & 3 & 1 & \\ & & & 3 & \\ & & & & 3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & & & \\ 0 & 2 & & & \\ & & 3 & 0 & \\ & & 0 & 3 & \\ & & & & 3 \end{pmatrix}}_{D} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & 0 & 0 & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}}_{V}$$

a, b čísla

$$e^{a+b} = e^a \cdot e^b$$

Pro matice A, B obecně neplatí $e^{A+B} = e^A e^B$,

ale platí to, když $A \cdot B = B \cdot A$.

V našem případě $D \cdot V = V \cdot D$.

$$e^{Jt} = e^{Dt+Vt} = e^{Dt}\cdot e^{Vt} =$$

$$= \underbrace{e^{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix} t} \cdot e^{Vt}}_{\text{o tom že komutují se lze jednoduše přesvědčit výpočtem}} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & 0 \\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} \cdot e^{Vt}$$

Vlastnost V je taková, že existuje k takové, že $V^k = 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}^k = 0$$

Proto řada

$$e^{Vt} = E + \frac{Vt}{1!} + \frac{V^2t^2}{2!} + \dots + \frac{V^kt^k}{k!} + \dots$$

má od členu $\frac{V^kt^k}{k!}$ samé nulové matice

Takže je ve skutečnosti konečná.

18

Tedy řada

$$e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & \\ & e^{\lambda_2 t} & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\left(E + Vt + \frac{V^2 t^2}{2!} + \cdots \frac{V^{k-1} t^{k-1}}{(k-1)!} \right)}_{\text{matice jejíž prvky jsou polynomy stupně nejvýše } k-1}$$

Příště aplikujeme Jord. větu