JORDANŮV KAN. TVAR PŘI ŘEŠENÍ SOUSTAV LIN. DIF. ROVNIC

Neznámá funkce $x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$

splňuje dif. rovnici

$$x'(t) = A\,x(t), \quad x(0) = v \in \mathbb{R}^n$$

$$x_1'(t) = a_{11}\,x_1(t) + \dots + a_{1n}\,x_n(t)$$

$$\vdots$$

$$x_n'(t) = a_{n1}\,x_1(t) + \dots + a_{nn}\,x_n(t)$$

A je matice $n \times n$

Řešení této rovnice je

$$x(t) = e^{At} \cdot v$$

kde e^{At} je matice určená řadou

$$E + At + \frac{A^2t^2}{2!} + \frac{A^3t^3}{3!} + \dots$$

(2)

Řada $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i t^i}{i!}$ je nekonečná, nicméně pro některé je můžeme sečíst snadno spočítat

např. $A = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$ je diagonální matice

$$D^i = \begin{pmatrix} \lambda_1^i & & & 0 \\ & \lambda_2^i & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n^i \end{pmatrix}$$

$$\sum_0^{\infty} \frac{D^i t^i}{i!} = \begin{pmatrix} \sum \frac{\lambda_1^i t^i}{i!} & 0 & \\ 0 & \sum \frac{\lambda_2^i t^i}{i!} & \\ & & \ddots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & e^{\lambda_2 t} & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}$$

Další krok $A = J$ je matice v Jord. kanonickém tvaru.

K výpočtu použijeme, že

$$e^{B+C} = e^{B} \cdot e^{C}$$

pokud $B \cdot C = C \cdot B$.

$$e^{B+C} = E + (B+C) + \frac{(B+C)^2}{2!} + \frac{(B+C)^3}{3!} + \dots$$

$$= E + B + C + \frac{B^2 + BC + CB + C^2}{2!} + \dots$$

$$e^{B} \cdot e^{C} = \left(E + B + \frac{B^2}{2} + \dots\right)\left(E + C + \frac{C^2}{2!} + \dots\right) =$$

$$= E + B + C + \frac{B^2}{2} + \frac{C^2}{2} + BC + \dots$$

$$J = \begin{pmatrix} \begin{matrix}\lambda_1 & 1 & 0\\ 0 & \lambda_1 & 1\\ 0 & 0 & \lambda_1\end{matrix} & & \\ & \boxed{\begin{matrix}\lambda_2 & 1\\ 0 & \lambda_2\end{matrix}} & \\ & & \ddots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{matrix}\lambda_1 & & 0\\ & \lambda_1 & \\ 0 & & \lambda_1\end{matrix} & & \\ & \boxed{\begin{matrix}\lambda_2 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{matrix}} & \\ & & \ddots \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} \begin{matrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{matrix} & & \\ & \boxed{\begin{matrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{matrix}} & \\ & & \ddots \end{pmatrix} = D + C,$$

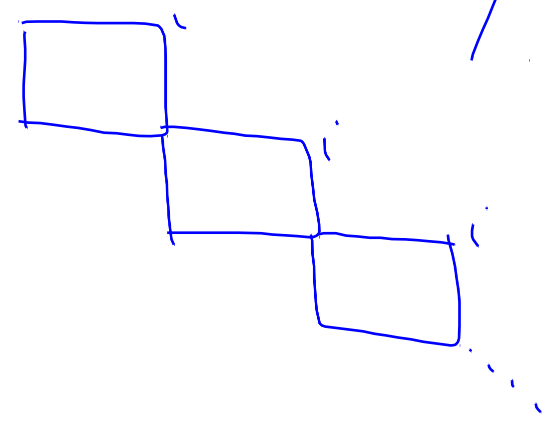
kde C má nenulová čísla pouze tam $c_{i,i+1}$.

Matice D a C spolu komutují.

$$e^{Jt} = e^{Dt+Ct} = e^{Dt} \cdot e^{Ct} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & & & \\ & e^{\lambda_1 t} & & & & \\ & & e^{\lambda_1 t} & & & \\ & & & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & & & e^{\lambda_2 t} & \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix} \cdot e^{Ct}$$

$$C = \begin{pmatrix} \begin{matrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{matrix} & & & \\ & \begin{matrix} 0 & 1 & \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{matrix} & & \\ & & \begin{matrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{matrix} & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$$

$C^i =$



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^4 = 0$$

Je-li největší buňka v C rozměru $k \times k$, pak $C^k = 0$.

Tedy

$$e^{Ct} = E + Ct + \frac{C^2 t^2}{2!} + \dots + \frac{C^{k-1} t^{k-1}}{(k-1)!}$$

Řada pro výpočet e^{Ct} je dokonce konečná.

Závěr:

$$e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & & 0 \\ & e^{\lambda_1 t} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & e^{\lambda_k t} & \\ 0 & & & & \ddots \; e^{\lambda_k t} \end{pmatrix} \left(E + Ct + \dots + \frac{C^{k-1} t^{k-1}}{(k-1)!} \right)$$

Příklad

$$J = \left(\begin{array}{ccc|cc} \lambda_1 & 1 & 0 & & \\ 0 & \lambda_1 & 1 & & \\ 0 & 0 & \lambda_1 & & \\ \hline & & & \lambda_2 & 1 \\ & & & 0 & \lambda_2 \end{array}\right)$$

$$e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & & \\ & e^{\lambda_1 t} & & & \\ & & e^{\lambda_1 t} & & \\ & & & e^{\lambda_2 t} & \\ & & & & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} \left(E + \left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & 1 & 0 & & \\ 0 & 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 0 & & \\ \hline & & & 0 & 1 \\ & & & 0 & 0 \end{array}\right) t + \frac{1}{2} \left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & & \\ \hline & & & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 \end{array}\right) t^2 \right)$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} e^{\lambda_1 t} \ddots & \\ \hline & \ddots \end{array}\right) \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & t & \frac{t^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & te^{\lambda_1 t} & \frac{t^2}{2}e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_1 t} & te^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\lambda_2 t} & te^{\lambda_2 t} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}$$

Umíme vyřešit rovnici

$$y'(t) = J\,y(t)$$
$$y(0) = v$$

a takové řešení je

$$y(t) = e^{Jt}v = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & te^{\lambda_1 t} & \frac{t^2}{2}e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_1 t} & te^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\lambda_2 t} & te^{\lambda_2 t} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{pmatrix}$$

Nyní chceme řešit soustavu

$$x'(t) = A\,x(t) \qquad (*)$$
$$x(0) = v$$

v případě, že matice A je podobná matici J v JKT

Nechť $J = P^{-1} A P \Rightarrow A = P J P^{-1}$

Nechť $y(t)$ je řešením rovnice

$$y'(t) = J y(t), \text{ tj } y(t) = e^{Jt}$$

Potom $x(t) = P y(t)$ je řešením rovnice (*)

$$x'(t) = P y'(t) = P J y(t) = P J P^{-1} x(t)$$
$$= A x(t)$$

Tedy $x(t) = P e^{Jt}$ řeší soustavu $x'(t) = A x(t)$.

Vezmeme-li $x(t) = P e^{Jt} P^{-1} v$,

pak $x(0) = P \cdot E \cdot P^{-1} v = v$.

(10)

Řešení soustavy

$$x'(t) = Ax(t)$$
$$x(0) = v$$

ji

$$x(t) = Pe^{Jt}P^{-1}v$$

$$e^{At} = e^{PJP^{-1}t} = E + PJP^{-1}t + (PJP^{-1})^2\frac{t^2}{2} + \dots$$

$$\dots = E + PJP^{-1}t + PJ\underbrace{P^{-1}P}JP^{-1}\frac{t^2}{2} + \dots$$

$$= PEP^{-1} + PJP^{-1}t + PJ^2P^{-1}\frac{t^2}{2} + \dots$$

$$= P\left(E + Jt + J^2\frac{t^2}{2} + \dots\right)P^{-1} = Pe^{Jt}P^{-1}$$

Základní myšlenka důkazu Jord. věty

Jord. věta: Nechť $\varphi : U \to U$ je lin. operátor na prostoru dimenze n. Nechť součet alg. násobností jeho vlastních čísel je n. Potom existuje v U báze α taková, že

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = J$$

je matice v JKT. Tato matice až na pořadí buněk nezávisí na volbě báze α.

K důkazu potřebujeme pojem kořenové podprostoru. Nechť λ je vlastní číslo operátoru φ. Kořenový podprostor vlastního čísla λ je množina

$$R_\lambda = \{u \in U,\ \exists k \in \mathbb{N},\ (\varphi - \lambda\, id)^k u = 0\}$$

$$(\varphi - \lambda\, id)^k = \underbrace{(\varphi - \lambda\, id) \circ (\varphi - \lambda\, id) \circ \dots \circ (\varphi - \lambda\, id)}_{k\times}$$

Vlastnosti R_λ:

(1) je to vekt. podprostor v U

$u_1, u_2 \in R_\lambda$ $\qquad (\varphi - \lambda\, id)^{k_1} u_1 = 0$

$\qquad\qquad\qquad (\varphi - \lambda\, id)^{k_2} u_2 = 0$

Nechť $k = \max(k_1, k_2)$. Potom $(\varphi - \lambda\, id)^{k} u_1 = 0$

$\qquad\qquad\qquad (\varphi - \lambda\, id)^{k} u_2 = 0$

Proto

$$(\varphi - \lambda\, id)^k (a u_1 + b u_2) = a(\varphi - \lambda\, id)^k u_1 + b(\varphi - \lambda\, id)^k u_2 = 0 + 0 = 0$$

$a u_1 + b u_2 \in R_\lambda$

(2) Všechny vlastní vektory k vl. číslu λ leží v R_λ.

$\varphi(u) = \lambda u \Rightarrow (\varphi - \lambda\, id)(u) = 0 \Rightarrow u \in R_\lambda$.

(3) R_λ je invariantní podprostor vůči φ.

Lemma: Nechť lin. operátory φ a ψ spolu komutují:

$$\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi .$$

Pak $\operatorname{Ker} \psi$ je invariantní podprostor operátoru φ.

Dk: $u \in \operatorname{Ker} \psi$, $\psi(u) = 0$.

Chceme ukázat, že $\varphi(u) \in \operatorname{Ker} \psi$.

$$\psi(\varphi(u)) = \varphi(\psi(u)) = \varphi(0) = 0 .$$

Tedy $\varphi(u) \in \operatorname{Ker} \psi$.

Zpět k R_λ. Nechť $u_1, u_2, \dots, u_s$ je báze R_λ.

Potom $(\varphi - \lambda\, id)^{k_i} u_i = 0$.

Zvolme $k = \max(k_1, k_2, \dots, k_s)$. Potom $(\varphi - \lambda\, id)^{k}(u_i) = 0$.

Proto $\forall u \in R_\lambda$ je $(\varphi - \lambda\, id)^{k}(u) = 0$.

Proto

$$R_\lambda = \operatorname{Ker} (\varphi - \lambda\, id)^{k}$$

φ a $(\varphi - \lambda\, id)$ komutují

$$\varphi \circ (\varphi - \lambda\, id) = \varphi^2 - \lambda \varphi$$

$$(\varphi - \lambda\, id) \circ \varphi = \varphi^2 - \lambda \varphi$$

$$\varphi \circ (\varphi - \lambda\, id)^k = \varphi \circ (\varphi - \lambda\, id) \circ (\varphi - \lambda\, id) \dots \circ (\varphi - \lambda\, id) =$$

$$= (\varphi - \lambda\, id) \circ \varphi \circ (\varphi - \lambda\, id) \circ \dots = (\varphi - \lambda\, id)^k \circ \varphi$$

φ a $(\varphi - \lambda\, id)^k$ komutují

Podle lemmatu je tedy $R_\lambda = Ker\, (\varphi - \lambda\, id)^k$ invariantní podprostor operátoru φ.

První krok důkazu Jord. věty spočívá v tom, že dokážeme

Věta 1: Nechť $\varphi : U \to U$ je lin. operátor na prostoru dimenze n. Nechť φ má vlastní čísla $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_r$ a nechť součet algebraických násobností těchto vlastních čísel je n. Potom je U direktním součtem

$$U = R_{\lambda_1} \oplus R_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus R_{\lambda_r}$$

Direktní součet více podprostorů

$U_1, U_2, \dots, U_r$ podprostory v U

Součet

$$U_1 + U_2 + \dots + U_r = \{ u \in U ; \exists u_1 \in U_1, \exists u_2 \in U_2, \dots, u_r \in U_r : u = u_1 + u_2 + \dots + u_r \}$$

Součet $U_1 + U_2 + \dots + U_r$ je direktní, jestliže každý jeho vektor lze psát ve tvaru

$$u = u_1 + u_2 + \dots + u_r \qquad u_i \in U_i$$

právě jedním způsobem.

Pak píšeme $U_1 \oplus U_2 \oplus U_3 \oplus \dots \oplus U_r$.

Každý řetězec pro vlastní čísla λ patří do R_λ.

$$u_s \longrightarrow \quad \longrightarrow u_3 \xrightarrow{\varphi - \lambda id} u_2 \xrightarrow{\varphi - \lambda id} u_1 \xrightarrow{\varphi - \lambda id} 0$$

$$(\varphi - \lambda id) u_1 = 0$$

$$(\varphi - \lambda id)^2 u_2 = (\varphi - \lambda id)(\varphi - \lambda id) u_2 = (\varphi - \lambda id)(u_1) = 0$$

$$(\varphi - \lambda id)^i u_i = 0$$

Při výpočtu JKT hledáme báze kořenových podprostorů ve formě řetězců.

Důkaz věty 1

V 1. kroku dokážeme, že součet $R_{\lambda_1} + R_{\lambda_2} + \dots + R_{\lambda_r}$ je direktní. V druhém kroku dokážeme, že

$$\dim R_{\lambda_i} = \text{alg. násobnost } \lambda_i$$

a protože je součet direktní, tak platí

$$\dim(R_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus R_{\lambda_2}) = \dim R_{\lambda_1} + \dim R_{\lambda_2} + \dots + \dim R_{\lambda_r}$$

$=$ součet alg. násobností vl. čísel $= n$

Tedy $R_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus R_{\lambda_r}$ je podprostor v U, který má stejnou dimenzi jako U, proto se mu musí rovnat.

Omezíme-li operátor $\psi = \varphi - \lambda \mathrm{id}$ na prostor R_λ

$$\varphi - \lambda \mathrm{id} : R_\lambda \to R_\lambda$$

pak existuje k takové, že $(\varphi - \lambda \mathrm{id})^k = 0 : R_\lambda \to R_\lambda$

To nás vede k definici

NILPOTENTNÍHO OPERÁTORU:

$\psi : V \to V$ je nilpotentní operátor, jestliže existuje $k \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\psi^k = 0.$$

Operátor $\psi : V \to V$ se nazývá cyklický, jestliže V má bázi $u_1, u_2, \ldots u_s$ takovou, že

$$u_s \to \quad u_3 \xrightarrow{\psi} u_2 \xrightarrow{\psi} u_1 \xrightarrow{\psi} 0$$

$$\psi(u_1) = 0, \quad \psi(u_i) = u_{i-1}, \quad i \geq 2.$$

Každý cyklický operátor je nilpotentný.

Opačné tvrdenie nie je pravdivé, ale platí niečo dôležitejšie, a to:

Veta 2 Nech $\varphi : V \to V$ je nilpotentný operátor. Potom sa V rozkladá na direktný súčet invariantných podpriestorov

$$V = W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \oplus W_l$$

takých, že $\varphi / W_j : W_j \to W_j$ je cyklický operátor.

Důkaz Jord. věty pomocí vět 1 a 2.

Najdeme rozklad

$$U = R_{\lambda_1} \oplus R_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus R_{\lambda_r}.$$

Operátor $(\varphi - \lambda_i\, id)/R_{\lambda_i} : R_{\lambda_i} \to R_{\lambda_i}$

je nilpotentní. Proto na něj můžeme aplikovat větu 2.
Podle ní

$$R_{\lambda_i} = W_{\lambda_i,1} \oplus W_{\lambda_i,2} \oplus \dots \oplus W_{\lambda_i,l_i}$$

a $(\varphi - \lambda_i id)/W_{\lambda_i,j}$ je cyklický. Jeho matice v cyklické bázi je

$$(\varphi - \lambda_i \cdot id)_{\alpha_{\lambda_i,j} \cdot \alpha_{\lambda_i,j}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

$$\varphi = (\varphi - \lambda_i id) + \lambda_i id$$

$\varphi / W_{\lambda_1, j}$ má v příslušné bázi matici

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & & 0 \\ & \lambda_1 & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_1 \end{pmatrix} = \text{Jord. buňka.}$$

Protože

$$U = R_{\lambda_1} \oplus R_{\lambda_2} \oplus \ldots = W_{\lambda_1,1} \oplus \ldots W_{\lambda_1, \ell_1} \oplus W_{\lambda_2,1} \oplus \ldots$$

můžeme z bází $W_{\lambda_i, j}$ vyrobit bázi celého U. To je hledaná báze α a v ní má φ matici v JkT.

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = J$$