Domácí úkoly ke cvičení č. 6

1. V euklidovském vektorovém prostoru $\mathbf{E}_5$, to jest ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^5$ se standardním skalárním součinem najděte ke každému z níže uvedených vektorových podprostorů $\mathbf{S}$, $\mathbf{T}$, $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$, $\mathbf{W} \subseteq \mathbb{R}^5$ nějakou jeho ortonormální bázi. Každý z těchto podprostorů je zadán jako lineární obal uvedeného souboru vektorů:

$$\begin{aligned}
\mathbf{S} &= [(1,2,-1,3,1),(5,2,-1,7,1),(2,-1,2,-4,-2)],\\
\mathbf{T} &= [(2,-3,2,-2,2),(2,5,-5,-2,-4),(3,6,-11,4,-4)],\\
\mathbf{U} &= [(1,2,2,6,6),(5,5,-3,11,1),(1,2,2,4,8)],\\
\mathbf{V} &= [(1,1,3,3,4),(1,3,-5,-7,-1),(1,-1,5,7,-3)],\\
\mathbf{W} &= [(3,-1,2,3,-2),(5,-4,-1,4,1),(4,1,-11,-7,11)].
\end{aligned}$$

Využijte techniku Grammova-Schmidtova ortogonalizačního procesu s následným normováním vektorů.

2. Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}_4[x]$ všech polynomů jedné proměnné x stupně nejvýše 4 nad tělesem $\mathbb{R}$ je pro každé dva polynomy $f, g \in \mathbb{R}_4[x]$ definováno reálné číslo

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,dt.$$

Ověřte, že zobrazení $\mathbb{R}_4[x] \times \mathbb{R}_4[x] \to \mathbb{R}$ přiřazující každé dvojici polynomů $f, g \in \mathbb{R}_4[x]$ takto definované reálné číslo $\langle f, g\rangle$ je skalární součin na vektorovém prostoru $\mathbb{R}_4[x]$. Dále ověřte, že množina polynomů

$$\mathbf{K} = \{f \in \mathbb{R}_4[x] : f(-1) = 0 = f(1)\}$$

tvoří vektorový podprostor ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}_4[x]$, a určete jeho dimenzi. Najděte v euklidovském vektorovém prostoru $\mathbb{R}_4[x]$ s výše definovaným skalárním součinem nějakou ortonormální bázi tohoto vektorového podprostoru $\mathbf{K}$.

3. V euklidovském vektorovém prostoru $\mathbf{E}_5$ jsou dány vektorové podprostory **P**, **Q** zadané jako lineární obaly níže uvedených souborů vektorů:

$$\mathbf{P} = [(1, 2, -1, -3, 3), (1, -2, 3, 1, -1)],$$
$$\mathbf{Q} = [(1, 3, -1, -2, 2), (1, -3, 5, 4, -4), (1, 5, 3, -10, 10)].$$

Najděte ortogonální doplňky těchto vektorových podprostorů **P**, **Q** v euklidovském vektorovém prostoru $\mathbf{E}_5$.

4. Nechť kvadratická forma $L : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}$ na vektorovém prostoru $\mathbb{R}^5$ má ve standardních souřadnicích prostoru $\mathbb{R}^5$ vyjádření tvaru

$$L(\mathbf{x}) = (x_1+x_2)^2+(x_2+x_3)^2+(x_3+x_4)^2+(x_4+x_5)^2+(x_1+x_5)^2.$$

Bez použití diagonalizace kvadratické formy L ověřte, že kvadratická forma L je pozitivně definitní (tedy nikoliv pouze pozitivně semidefinitní). Nechť dále $\ell : \mathbb{R}^5 \times \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}$ je symetrická bilineární forma na vektorovém prostoru $\mathbb{R}^5$ určující kvadratickou formu L v tom smyslu, že pro každý vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^5$ platí

$$L(\mathbf{x}) = \ell(\mathbf{x}, \mathbf{x}).$$

Vyjádřete tuto symetrickou bilineární formu ℓ opět ve standardních souřadnicích prostoru $\mathbb{R}^5$. Pak ovšem ℓ je skalární součin na vektorovém prostoru $\mathbb{R}^5$. Nechť $\mathbf{Y}, \mathbf{Z} \subseteq \mathbb{R}^5$ jsou vektorové podprostory prostoru $\mathbb{R}^5$ zadané jako lineární obaly níže uvedených souborů vektorů:

$$\mathbf{Y} = [(1, 1, 1, -1, -1), (1, -1, -1, 1, 1)],$$
$$\mathbf{Z} = [(1, 1, -1, -1, -1), (1, 1, -1, -1, 1), (1, -1, -1, -1, 1)].$$

V euklidovském vektorovém prostoru $\mathbb{R}^5$ s výše definovaným skalárním součinem ℓ najděte ortogonální doplňky obou uvedených vektorových podprostorů **Y**, **Z**.