Seminář z matematiky II – jaro 2014 – 1. písemka

Všechna svoje tvrzení zdůvodněte.

1. Dokažte, že množina

$$\{\, a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Q} \,\}$$

   spolu s obvyklými operacemi $+$ a $\cdot$ na $\mathbb{R}$ tvoří vektorový prostor nad tělesem $(\{\, a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q} \,\}, +, \cdot)$. Dokažte, že množina $\{\, a\sqrt{3} + b\sqrt{6} \mid a, b \in \mathbb{Q} \,\}$ je jeho podprostorem, a určete dimenzi tohoto podprostoru.

2. Podmnožina C vektorového prostoru V nad $\mathbb{R}$ se nazývá konvexní kužel, jestliže $0 \in C$ a pro každá $u, v \in C$ a $a, b \in \mathbb{R}$ splňující $a, b \geq 0$ platí $au + bv \in C$. Dokažte, že pro libovolnou podmnožinu $M \subseteq V$ je množina

$$\{\, a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n \mid n \in \mathbb{N}_0,\ a_1, \ldots, a_n \geq 0,\ v_1, \ldots, v_n \in M \,\}$$

   nejmenší konvexní kužel obsahující množinu M.

3. Pro libovolná reálná čísla m a n definujme zobrazení $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ předpisem

$$f(a + b \cdot \mathrm{i}) = m \cdot a + n \cdot b \cdot \mathrm{i}\,.$$

   Rozhodněte, pro která m a n je toto zobrazení lineární, chápeme-li $\mathbb{C}$ jako vektorový prostor nad $\mathbb{R}$ (respektive nad $\mathbb{C}$) s obvyklými operacemi.

4. Nechť $V = \mathrm{C}^1(\langle 0, 1\rangle)$ je vektorový prostor všech reálných funkcí se spojitou první derivací definovaných na intervalu $\langle 0, 1\rangle$ (s obvyklými operacemi). Pro každý z následujících předpisů rozhodněte, zda definuje skalární součin na V:

   (a) $\langle f, g\rangle = \int_0^1 (f(x) \cdot g'(x) + f'(x) \cdot g(x))\,\mathrm{d}x$,

   (b) $\langle f, g\rangle = \int_0^1 (f(x) + f'(x)) \cdot (g(x) + g'(x))\,\mathrm{d}x$.

5. Nechť V a W jsou vektorové prostory nad tělesem K a $f\colon V \to W$ lineární zobrazení. Nechť vektory $v_1, \ldots, v_n$ tvoří bázi V. Udejte nutnou a postačující podmínku na zobrazení f, aby vektory $f(v_1), \ldots, f(v_n)$ tvořily bázi W.

6. Uvažujme vektorový prostor $V = \mathrm{C}(\mathbb{R})$ všech spojitých reálných funkcí spolu s obvyklými operacemi a jeho podprostory $U = \{\, f \in V \mid f(1) = 0 \,\}$ a W tvořený všemi konstantními funkcemi. Dokažte, že $V = U \oplus W$.