Seminář z matematiky II – jaro 2014 – 3. písemka

Všechna svoje tvrzení dokažte.

1. (10 bodů) Rozhodněte, zda předpis
$$a\,\rho\,b \iff b = 2 \vee (2 \mid b - a \wedge a \neq 2 \wedge a \leq b),$$
pro $a, b \in \mathbb{N}$, korektně definuje uspořádání ρ na množině $\mathbb{N}$.

2. (5 bodů) Rozhodněte, zda předpis
$$a\,\rho\,b \iff \exists\, n \in \mathbb{N}\colon a \mid 2^n \cdot b,$$
pro $a, b \in \mathbb{N}$, korektně definuje uspořádání ρ na množině $\mathbb{N}$.

3. (5 bodů) Rozhodněte, zda předpis
$$\frac{a}{b}\,\rho\,\frac{c}{d} \iff a \leq c \wedge b \leq d,$$
pro $a, c \in \mathbb{Z}$ a $b, d \in \mathbb{N}$, korektně definuje uspořádání ρ na množině $\mathbb{Q}$.

4. (10 bodů) Nechť ρ je tranzitivní binární relace na množině A. Dokažte, že potom $\rho \setminus \rho^{-1} \cup \mathrm{id}_A$ je uspořádání na A.

5. (10 bodů) Nechť ρ a σ jsou tranzitivní binární relace na množině A, přičemž ρ je navíc reflexivní a platí $\rho \circ \sigma \subseteq \sigma$. Dokažte, že potom $\sigma \circ \rho \cup \rho$ je nejmenší tranzitivní relace na A obsahující ρ i σ.

6. (10 bodů) Nechť ρ je uspořádání na množině A a τ jemu příslušná relace pokrytí. Dokažte, že pro libovolnou $\sigma \subseteq \tau$ je $\rho \setminus \sigma$ uspořádání na A.

7. (10 bodů) Nechť (A, ρ) a (B, σ) jsou uspořádané množiny, přičemž každá podmnožina množiny A má v (A, ρ) infimum. Nechť $f\colon A \to B$ je izomorfismus (A, ρ) na (B, σ). Dokažte, že potom každá podmnožina množiny B má v (B, σ) infimum.