Príklady na precvičovanie – elementárne komplexné funkcie

Riešené príklady

Príklad 1

Racionálnu lomenú funkciu
$$\frac{1}{z^3 - 2z^2 + z - 2}$$
rozložte nad $\mathbb{C}$ na parciálne zlomky.

Riešenie:

Postupujeme štandardným spôsobom, avšak s tým malým rozdielom, že v obore komplexných čísiel sa menovateľ daného zlomku dá úplne rozložiť na lineárne činitele. Platí
$$z^3 - 2z^2 + z - 2 = (z-2)(z^2+1) = (z-2)(z-\mathrm{i})(z+\mathrm{i}).$$
Máme teda rozklad
$$\frac{1}{z^3 - 2z^2 + z - 2} = \frac{A}{z-2} + \frac{B}{z-\mathrm{i}} + \frac{C}{z+\mathrm{i}},$$
pre neznáme koeficienty $A, B, C \in \mathbb{C}$. Klasickou metódou zistíme, že
$$\frac{1}{z^3 - 2z^2 + z - 2} = \frac{\frac{1}{5}}{z-2} + \frac{-\frac{1}{10} + \frac{1}{5}\,\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}} + \frac{-\frac{1}{10} - \frac{1}{5}\,\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}.$$

Príklad 2

Pre dané $a, b \in \mathbb{R}$ zistite, akú krivku v komplexnej rovine určuje nasledujúca komplexná funkcia reálnej premennej $t \in (-\infty, \infty)$.
$$z(t) = \mathrm{e}^{(a+\mathrm{i}b)t}.$$

Riešenie:

V komplexnej funkcii $z(t)$ reálnej premennej t oddelíme jej reálnu a imaginárnu časť, t.j., $z(t) = x(t) + \mathrm{i}y(t)$. Získame tak parametrické vyjadrenie hľadanej krivky. Platí $z(t) = \mathrm{e}^{at}\cos bt + \mathrm{i}\mathrm{e}^{at}\sin bt$, čiže
$$x(t) = \mathrm{e}^{at}\cos bt, \qquad y(t) = \mathrm{e}^{at}\sin bt.$$

V prípade $b = 0$ a zároveň $a = 0$ sa jedná o bod $[1, 0]$. Ak $b = 0$ a $a \neq 0$, máme $x = \mathrm{e}^{at}$ a $y = 0$, čo je parametrické vyjadrenie otvorenej kladnej reálnej polosi $(0, \infty)$ (premyslite si to :)). Pre $b \neq 0$, $a = 0$ dostaneme kružnicu so stredom v bode $[0, 0]$ a s polomerom 1 (obehnutú nekonečne veľakrát v zápornom i kladnom smere). Nakoniec, pre $ab \neq 0$ zavedením polárnych súradníc dostaneme

$$\rho(t) = \mathrm{e}^{at}, \qquad \varphi(t) = bt.$$

Vylúčením parametra t získame $\rho = \mathrm{e}^{\frac{a}{b}\varphi}$, $\varphi \in (-\infty, \infty)$. Toto je rovnica tzv. *logaritmickej špirály* so stredom v bode $[0, 0]$. V závislosti na znamienkach čísiel a, b môžu nastať štyri možnosti:

- $a > 0$, $b > 0$ – špirála je kladne orientovaná a odvíja sa od stredu,
- $a > 0$, $b < 0$ – špirála je záporne orientovaná a odvíja sa od stredu,
- $a < 0$, $b > 0$ – špirála je kladne orientovaná a navíja sa na stred,
- $a < 0$, $b < 0$ – špirála je záporne orientovaná a navíja sa na stred.

Príklad 3

Stanovte definičné obory funkcií, chápaných ako priradenia na $\mathbb{C}$.

$$\text{a) } w = \frac{1}{\mathrm{ch} z}, \qquad \text{b) } w = \log(-2z - \mathrm{i}).$$

Riešenie:

a) Zrejme problematické budú nulové body funkcie ch$z$. Pripomeňme, že komplexná funkcia hyperbolický kosínus je definovaná ako

$$\mathrm{ch} z = \frac{\mathrm{e}^z + \mathrm{e}^{-z}}{2},$$

kde e^z je komplexná exponenciálna funkcia (komplexné rozšírenie klasickej reálnej exponenciálnej funkcie e^x). Potrebujeme teda nájsť body $z \in \mathbb{C}$, pre ktoré platí (vykonáme úpravy)

$$\frac{\mathrm{e}^z + \mathrm{e}^{-z}}{2} = 0 \implies \mathrm{e}^z + \mathrm{e}^{-z} = 0 \implies \mathrm{e}^{2z} = -1.$$

Ďalej môžeme postupovať dvomi spôsobmi. Pri prvom spôsobe využijeme poznatok, že ak $z = x + \mathrm{i}y$, potom

$$\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^x \cos y + \mathrm{i}\mathrm{e}^x \sin y.$$

Teda

$$\mathrm{e}^{2z} = -1 \iff \mathrm{e}^{2x}\cos 2y + \mathrm{i}\mathrm{e}^{2x}\sin 2y = -1$$
$$\Updownarrow$$
$$\mathrm{e}^{2x}\cos 2y = -1, \quad \mathrm{e}^{2x}\sin 2y = 0.$$

Riešenia tejto sústavy dvoch rovníc s dvomi neznámymi x, y majú tvar $x = 0$ a $y = k\pi + \pi/2$, $k \in \mathbb{Z}$ (samy overte :)). To znamená, že definičný obor funkcie w v zadaní je

$$\mathcal{D}(w) = \left\{ z \in \mathbb{C},\ z \neq \mathrm{i}\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right),\ k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Pri druhom spôsobe môžeme priamo využiť vlastnosti funkcie e^z. Platí $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -1$, a nakoľko funkcia e^z je periodická s periódami $2k\pi\mathrm{i}$, $k \in \mathbb{Z}$, máme

$$\mathrm{e}^{2z} = -1 \iff 2z = \mathrm{i}\pi + 2k\pi\mathrm{i}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Preto všetky nulové body funkcie $\mathrm{ch} z$ majú tvar $z = \mathrm{i}(k\pi + \pi/2)$, $k \in \mathbb{Z}$.

b) Z definície hlavnej vetvy log mnohoznačnej logaritmickej funkcie Log vieme, že je definovaná pre každé nenulové komplexné číslo. Preto

$$\mathcal{D}(w) = \left\{ z \in \mathbb{C},\ z \neq -\frac{\mathrm{i}}{2} \right\}.$$

Príklad 4

Nájdite obrazy daných množín v príslušných priradeniach.

a) obraz imaginárnej osi $\mathrm{i} \cdot \mathbb{R}$ v priradení $w = \dfrac{1+z}{1-z}$,

b) obraz kružnice $|z| = R,\ R \in \mathbb{R}^+,$ v priradení $w = z + \dfrac{1}{z}$,

c) obraz komplexnej roviny $\mathbb{C}$ bez bodu 0 v priradení $w = \dfrac{1}{2\mathrm{i}}\left(\dfrac{z}{\bar{z}} - \dfrac{\bar{z}}{z}\right)$.

Riešenie:

a) Parametrické vyjadrenie imaginárnej osi má zrejme tvar $z = \mathrm{i}t$, kde $t \in \mathbb{R}$. Preto jej obrazom v priradení w je množina

$$w(\mathrm{i} \cdot \mathbb{R}) = \left\{ \frac{1+\mathrm{i}t}{1-\mathrm{i}t}, \quad t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Pre každé reálne t platí
$$\frac{1+\mathrm{i}t}{1-\mathrm{i}t}=\frac{(1+\mathrm{i}t)^2}{1+t^2}=\frac{1-t^2+2\mathrm{i}t}{1+t^2}=\frac{1-t^2}{1+t^2}+\mathrm{i}\cdot\frac{2t}{1+t^2}.$$
Získali sme teda parametrické vyjadrenie množiny $w\,(\mathrm{i}\cdot\mathbb{R})$, konkrétne ($w=u+\mathrm{i}v$)
$$u=\frac{1-t^2}{1+t^2},\qquad v=\frac{2t}{1+t^2},\qquad t\in\mathbb{R}.$$
Nie je ťažké overiť, že hľadaná množina je kružnica $u^2+v^2=1$ bez bodu $[-1,0]$, pretože
$$\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2+\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2=\frac{1+t^4+2t^2}{(1+t^2)^2}=1,$$
pričom bod $[-1,0]$ nie je obrazom žiadneho $z\in\mathrm{i}\cdot\mathbb{R}$ v priradení w (samy overte; okrem toho zistite hodnotu $\lim_{t\to\pm\infty}w(\mathrm{i}t)$:)).

b) Parametrické vyjadrenie kružnice $|z|=R$ je napríklad $z=R\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, $t\in[-\pi,\pi)$. Pre každý takýto bod z potom platí
$$\begin{aligned}w(z)&=R\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}+\frac{1}{R}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}=R\,(\cos t+\mathrm{i}\sin t)+\frac{1}{R}\,(\cos t-\mathrm{i}\sin t)\\&=\left(R+\frac{1}{R}\right)\cos t+\mathrm{i}\cdot\left(R-\frac{1}{R}\right)\sin t.\end{aligned}$$
Hľadaná množina má teda parametrické vyjadrenie
$$u=\left(R+\frac{1}{R}\right)\cos t,\qquad v=\left(R-\frac{1}{R}\right)\sin t,\qquad t\in[-\pi,\pi).$$
V prípade $R=1$ sa jedná o reálny interval $[-2,2]$, presnejšie, o dvojnásobný interval $[-2,2)$ zjednotený s bodom 2 (samy overte; obzvlášť si premyslite, že každý bod $w\in[-2,2)$ je obrazom práve dvoch hodnôt $t\in[-\pi,\pi)\setminus\{0\}$, kým bod 2 je obrazom jediného vzoru $t=0$). Ak $R\neq 1$, potom sa jedná o elipsu s rovnicou
$$\frac{u^2}{\left(R+\frac{1}{R}\right)^2}+\frac{v^2}{\left(R-\frac{1}{R}\right)^2}=1.$$

c) Najprv si všimnime, že pre každé komplexné číslo $z\neq 0$ predstavuje $w(z)$ imaginárnu časť čísla $z/\bar{z}$, nakoľko
$$w(z)=\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\frac{z}{\bar{z}}-\frac{\bar{z}}{z}\right)=\frac{\frac{z}{\bar{z}}-\overline{\left(\frac{z}{\bar{z}}\right)}}{2\mathrm{i}}=\mathrm{Im}\left(\frac{z}{\bar{z}}\right).$$

Ďalej platí

$$\left|\frac{z}{\bar{z}}\right| = \frac{|z|}{|\bar{z}|} = \frac{|z|}{|z|} = 1.$$

Teda hodnoty $z/\bar{z}$ ležia na kružnici so stredom v bode $[0,0]$ a s polomerom 1. Nie je ťažké ukázať, že ak z prebieha cez množinu $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, potom $z/\bar{z}$ vyčerpáva celú jednotkovú kružnicu (overte samy; komplexné číslo z uvažujte v exponenciálnom tvare a pomocou neho vyjadrite $z/\bar{z}$:)). To znamená, že $w(\mathbb{C}\setminus\{0\})$ predstavuje množinu imaginárnych častí bodov jednotkovej kružnice. Jedná sa teda o reálny interval $[-1,1]$ (taktiež zdôvodnite samy pomocou vhodného nákresu :)).

Príklad 5

Riešte v $\mathbb{C}$ rovnicu

$$2\,\mathrm{ch}z + \mathrm{sh}z = \mathrm{i}.$$

Riešenie:

Dosadením

$$\mathrm{ch}z = \frac{\mathrm{e}^z + \mathrm{e}^{-z}}{2}, \quad \mathrm{sh}z = \frac{\mathrm{e}^z - \mathrm{e}^{-z}}{2},$$

a po úprave prevedieme rovnicu v zadaní na tvar

$$3\mathrm{e}^z + \mathrm{e}^{-z} = 2\mathrm{i}.$$

Zavedením substitúcie $s = \mathrm{e}^z$ dostaneme kvadratickú rovnicu s neznámou s

$$3s^2 - 2\mathrm{i}s + 1 = 0.$$

Posledná rovnica má dve riešenia, a to $s_1 = \mathrm{i}$ a $s_2 = -\mathrm{i}/3$. Platí teda

$$\mathrm{e}^z = \begin{cases} \mathrm{i}, \\ -\frac{\mathrm{i}}{3}, \end{cases} \iff z = \begin{cases} \mathrm{Log}\,(\mathrm{i}), \\ \mathrm{Log}\,(-\frac{\mathrm{i}}{3}). \end{cases}$$

Výpočtom jednotlivých logaritmov zistíme, že (overte samy :))

$$z = \begin{cases} \mathrm{i}\cdot\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right), \\ -\ln 3 + \mathrm{i}\cdot\left(\frac{-\pi}{2} + 2k\pi\right), \end{cases} \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Príklad 6

Dokážte, že pre každé $z \in \mathbb{C}$ platí

$$\mathrm{Argsh} z = \mathrm{Log}\,(z \pm \sqrt{z^2+1}).$$

Riešenie:

Nech $z \in \mathbb{C}$ je také, že $\mathrm{Argsh} z$ je definované. Označme $w = \mathrm{Argsh} z$. Podľa definície argumentu hyperbolického sínusu potom platí $z = \mathrm{sh}\, w$, a následne

$$z = \frac{\mathrm{e}^w - \mathrm{e}^{-w}}{2}.$$

Z poslednej rovnice vyjadríme w pomocou z. Zavedením substitúcie $s = \mathrm{e}^w$ dostaneme kvadratickú rovnicu pre neznámu s. Konkrétne,

$$z = \frac{s - \frac{1}{s}}{2} \quad \Longrightarrow \quad s^2 - 2zs - 1 = 0.$$

Jej riešením dostaneme (využijeme úpravu na štvorec :))

$$(s-z)^2 - z^2 - 1 = 0,$$

$$(s-z)^2 = z^2 + 1,$$
$$s - z = \pm\sqrt{z^2+1},$$
$$s = z \pm \sqrt{z^2+1}.$$

Symbolom $\pm\surd$ rozumieme dve hodnoty komplexnej druhej odmocniny. Po návrate k neznámej w teda platí

$$\mathrm{e}^w = z \pm \sqrt{z^2+1}.$$

Podľa definície komplexného logaritmu je však posledná rovnosť ekvivalentná s rovnicou

$$w = \mathrm{Log}\,(z \pm \sqrt{z^2+1}),$$

čo dokazuje identitu v zadaní príkladu. Naviac, nakoľko výraz $z \pm \sqrt{z^2+1}$ je rôzny od nuly pre ľubovoľné $z \in \mathbb{C}$ (samy overte), tieto úvahy platia pre každé komplexné číslo z.

Príklad 7

Nájdite všetky funkčné hodnoty.

$$\text{a) } \operatorname{sh}(2-\mathrm{i}), \qquad \text{b) } \cos(2+\mathrm{i}), \qquad \text{c) } \operatorname{Argsh}(\mathrm{i}).$$

Riešenie:

a) Pomocou definície komplexného hyperbolického sínusu postupne platí

$$\operatorname{sh}(2-\mathrm{i}) = \frac{\mathrm{e}^{2-\mathrm{i}} - \mathrm{e}^{-(2-\mathrm{i})}}{2} = \frac{\mathrm{e}^2(\cos 1 - \mathrm{i}\sin 1) - \mathrm{e}^{-2}(\cos 1 + \mathrm{i}\sin 1)}{2}$$

$$= \frac{\mathrm{e}^2 - \mathrm{e}^{-2}}{2} \cdot \cos 1 - \mathrm{i} \cdot \frac{\mathrm{e}^2 + \mathrm{e}^{-2}}{2} \cdot \sin 1.$$

b) Štandardným „rozkosínusovaním“ dostaneme

$$\cos(2+\mathrm{i}) = \cos 2 \cos \mathrm{i} - \sin 2 \sin \mathrm{i}.$$

Keďže

$$\cos \mathrm{i} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}}}{2} = \frac{\mathrm{e}^{-1} + \mathrm{e}}{2},$$

$$\sin \mathrm{i} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}}}{2\mathrm{i}} = \frac{\mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}}{2\mathrm{i}} = \mathrm{i} \cdot \frac{\mathrm{e} - \mathrm{e}^{-1}}{2},$$

platí

$$\cos(2+\mathrm{i}) = \frac{\mathrm{e}^{-1} + \mathrm{e}}{2} \cdot \cos 2 - \mathrm{i} \cdot \frac{\mathrm{e} - \mathrm{e}^{-1}}{2} \cdot \sin 2.$$

c) Využijúc identitu v Príklade 6, máme

$$\operatorname{Argsh}(\mathrm{i}) = \operatorname{Log}(\mathrm{i} \pm \sqrt{\mathrm{i}^2 + 1}) = \operatorname{Log}(\mathrm{i}).$$

Podľa definície komplexného logaritmu ďalej platí (ln označuje reálny prirodzený logaritmus)

$$\operatorname{Log}(\mathrm{i}) = \ln|\mathrm{i}| + \mathrm{i} \cdot \operatorname{Arg}(\mathrm{i}) = \ln 1 + \mathrm{i} \cdot \operatorname{Arg}(\mathrm{i}) = \mathrm{i} \cdot \operatorname{Arg}(\mathrm{i}).$$

Základný argument čísla i je $\pi/2$, preto množina všetkých argumentov čísla i má tvar

$$\operatorname{Arg}(\mathrm{i}) = \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Nakoniec teda platí

$$\operatorname{Argsh}(\mathrm{i}) = \operatorname{Log}(\mathrm{i}) = \mathrm{i}\cdot\left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\} = \left\{\mathrm{i}\cdot\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right),\ k\in\mathbb{Z}\right\}.$$

Množina hodnôt Argsh (i) je teda nekonečná (avšak spočítateľná), pričom každá hodnota má tvar

$$\mathrm{i}\cdot\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right), \quad k\in\mathbb{Z}.$$

Príklad 8

V daných komplexných funkciách oddeľte reálnu a imaginárnu časť.

$$\text{a) } w = \operatorname{tg} z, \qquad \text{b) } w = z^{\mathrm{i}}.$$

Riešenie:

a) Podľa definície komplexného tangensu platí ($z = x + \mathrm{i}y$)

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{\sin(x+\mathrm{i}y)}{\cos(x+\mathrm{i}y)} = \frac{\sin x\cos \mathrm{i}y + \cos x \sin \mathrm{i}y}{\cos x \cos \mathrm{i}y - \sin x \sin \mathrm{i}y}.$$

Nakoľko

$$\cos \mathrm{i}y = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}y} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}y}}{2} = \frac{\mathrm{e}^{-y} + \mathrm{e}^{y}}{2} = \operatorname{ch} y,$$

$$\sin \mathrm{i}y = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}y} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}y}}{2\mathrm{i}} = \frac{\mathrm{e}^{-y} - \mathrm{e}^{y}}{2\mathrm{i}} = \mathrm{i}\cdot\frac{\mathrm{e}^{y} - \mathrm{e}^{-y}}{2} = \mathrm{i}\cdot\operatorname{sh} y,$$

získaný výraz pre $\operatorname{tg} z$ nadobudne tvar

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin x \operatorname{ch} y + \mathrm{i}\cos x \operatorname{sh} y}{\cos x \operatorname{ch} y - \mathrm{i}\sin x \operatorname{sh} y}.$$

Následnými úpravami dostaneme

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin x \operatorname{ch} y + \mathrm{i}\cos x \operatorname{sh} y}{\cos x \operatorname{ch} y - \mathrm{i}\sin x \operatorname{sh} y}\cdot\frac{\cos x \operatorname{ch} y + \mathrm{i}\sin x \operatorname{sh} y}{\cos x \operatorname{ch} y + \mathrm{i}\sin x \operatorname{sh} y}$$

$$= \frac{\sin x\cos x \operatorname{ch}^2 y - \cos x \sin x \operatorname{sh}^2 y + \mathrm{i}\cdot\left[\sin^2 x \operatorname{ch} y \operatorname{sh} y + \cos^2 x \operatorname{sh} y \operatorname{ch} y\right]}{\cos^2 x \operatorname{ch}^2 y + \sin^2 x \operatorname{sh}^2 y}$$

$$= \frac{\sin x \cos x \cdot \overbrace{\left(\mathrm{ch}^2 y - \mathrm{sh}^2 y\right)}^{1} + \mathrm{i} \cdot \overbrace{\left[\sin^2 x + \cos^2 x\right]}^{1} \cdot \mathrm{sh}\, y\, \mathrm{ch}\, y}{\cos^2 x\, \mathrm{ch}^2 y + \sin^2 x\, \mathrm{sh}^2 y}$$

$$= \frac{\sin x \cos x + \mathrm{i} \cdot \mathrm{sh}\, y\, \mathrm{ch}\, y}{\cos^2 x\, \mathrm{ch}^2 y + \sin^2 x\, \mathrm{sh}^2 y}.$$

Menovateľ posledného zlomku sa dá takto zjednodušiť

$$\cos^2 x\, \mathrm{ch}^2 y + \sin^2 x\, \mathrm{sh}^2 y = \cos^2 x \cdot \left(1 + \mathrm{sh}^2 y\right) + \left(1 - \cos^2 x\right) \cdot \mathrm{sh}^2 y$$
$$= \cos^2 x + \mathrm{sh}^2 y.$$

Teda napokon dostaneme

$$\mathrm{tg}\, z = \frac{\sin x \cos x}{\cos^2 x + \mathrm{sh}^2 y} + \mathrm{i} \cdot \frac{\mathrm{sh}\, y\, \mathrm{ch}\, y}{\cos^2 x + \mathrm{sh}^2 y}.$$

b) Podľa definície všeobecnej komplexnej mocniny, komplexného logaritmu a komplexnej exponenciály platí

$$z^{\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\mathrm{Log}\, z} = \mathrm{e}^{\mathrm{i} \cdot (\ln |z| + \mathrm{i}\,\mathrm{Arg}\, z)} = \mathrm{e}^{-\mathrm{Arg}\, z + \mathrm{i} \ln |z|}$$

$$= \mathrm{e}^{-\mathrm{Arg}\, z} \left(\cos \ln |z| + \mathrm{i} \sin \ln |z|\right) = \mathrm{e}^{-\mathrm{Arg}\, z} \cos \ln |z| + \mathrm{i} \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{Arg}\, z} \sin \ln |z|.$$

To teda znamená, že

$$\mathrm{Re}\left[z^{\mathrm{i}}\right] = \mathrm{e}^{-\mathrm{Arg}\, z} \cos \ln |z|, \qquad \mathrm{Im}\left[z^{\mathrm{i}}\right] = \mathrm{e}^{-\mathrm{Arg}\, z} \sin \ln |z|.$$

Príklad 9

Vypočítajte limitu

$$\lim_{z \to 0} \frac{\mathrm{ch} z - 1}{\sin z}.$$

Riešenie:

Dosadením $z = 0$ do danej limity zistíme, že sa jedná o neurčitosť typu $0/0$. Ďalej funkcie $\mathrm{ch} z - 1$ a $\sin z$ sú celé, t.j., holomorfné v celej komplexnej rovine. Podľa *komplexnej verzie* L'Hospitalovho pravidla to znamená, že limita v zadaní príkladu *existuje*, pričom platí (derivujeme podľa z)

$$\lim_{z \to 0} \frac{\mathrm{ch} z - 1}{\sin z} = \lim_{z \to 0} \frac{(\mathrm{ch} z - 1)'}{(\sin z)'}.$$

Keďže $(\mathrm{ch}z - 1)' = (\mathrm{ch}z)' = \mathrm{sh}z$ a $(\sin z)' = \cos z$, máme

$$\lim_{z\to 0} \frac{\mathrm{ch}z - 1}{\sin z} = \lim_{z\to 0} \frac{\mathrm{sh}z}{\cos z} = \frac{\mathrm{sh}\,0}{\cos 0} = \frac{0}{1} = 0.$$

Príklad 10

Priamo overte platnosť Cauchyho–Riemannových rovností na celom $\mathbb{R}^2$ pre funkciu

$$w = \mathrm{e}^{z^2}.$$

Riešenie:

Potrebujeme nájsť reálnu a imaginárnu časť funkcie $w = u + \mathrm{i}v$. Pre $z = x + \mathrm{i}y$ postupne dostaneme

$$w = \mathrm{e}^{z^2} = \mathrm{e}^{(x+\mathrm{i}y)^2} = \mathrm{e}^{x^2-y^2+2\mathrm{i}xy} = \mathrm{e}^{x^2-y^2}(\cos 2xy + \mathrm{i}\cdot\sin 2xy)$$

$$= \mathrm{e}^{x^2-y^2}\cos 2xy + \mathrm{i}\cdot\mathrm{e}^{x^2-y^2}\sin 2xy$$

$$\Downarrow$$

$$u = \mathrm{e}^{x^2-y^2}\cos 2xy, \qquad v = \mathrm{e}^{x^2-y^2}\sin 2xy.$$

Vypočítame prvé parciálne derivácie funkcií u, v (po úprave)

$$u'_x = 2\mathrm{e}^{x^2-y^2}(x\cos 2xy - y\sin 2xy), \quad u'_y = -2\mathrm{e}^{x^2-y^2}(y\cos 2xy + x\sin 2xy),$$

$$v'_x = 2\mathrm{e}^{x^2-y^2}(x\sin 2xy + y\cos 2xy), \quad v'_y = 2\mathrm{e}^{x^2-y^2}(-y\sin 2xy + x\cos 2xy).$$

Funkcie u, v teda spĺňajú na celom $\mathbb{R}^2$ Cauchyho–Riemannove rovnosti $u'_x = v'_y$ a $u'_y = -v'_x$.