Príklady na precvičovanie – Cauchyho teória rezíduí a jej aplikácie

Riešené príklady

Príklad 1
Vypočítajme krivkový integrál

$$\int_{\varphi} \frac{z^3 \, \mathrm{e}^{\frac{1}{z}}}{z+1} \, \mathrm{d}z,$$

kde krivka φ je kladne orientovaná kružnica $|z| = 2$.

Riešenie:
Na výpočet integrálu v zadaní príkladu aplikujeme Cauchyho vetu o rezíduách. Potrebujeme teda zistiť všetky izolované singularity funkcie

$$f(z) = \frac{z^3 \, \mathrm{e}^{\frac{1}{z}}}{z+1},$$

ktoré sa nachádzajú vo vnútri kružnice φ a stanoviť v nich rezíduá funkcie f. Vidíme, že f má izolované singularity v bodoch $z = -1$ (jednoduchý pól) a $z = 0$ (podstatná singularita), pričom oba body ležia vo vnútri φ (podľa vhodného náčrtku). Pre r ezíduum v póle $z = -1$ platí

$$\operatorname{res}_{-1} f(z) = \lim_{z \to -1} (z+1) \cdot f(z) = \lim_{z \to -1} z^3 \, \mathrm{e}^{\frac{1}{z}} = -\frac{1}{\mathrm{e}}.$$

Rezíduum funkcie f v bode $z = 0$ zistíme priamo z definície rezídua rozvinutím f do Laurentovho radu na nejakom prstencovom okolí bodu 0 (t.j., rozvinutím f do *akéhokoľvek* radu podľa mocnín z^n, kde $n \in \mathbb{Z}$). Podľa definície exponenciálnej funkcie platí

$$\mathrm{e}^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{z}\right)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{-n}}{n!} \quad \text{pre každé } z \neq 0.$$

Ďalej, funkcia $1/(1+z)$ je pre $|z| < 1$ súčtom geometrického radu s kvocientom $q = -z$, nakoľko

$$\frac{1}{1+z} = \frac{1}{1-(-z)} = \sum_{m=0}^{\infty} (-z)^m = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m z^m, \quad |z| < 1.$$

Pre funkciu f potom dostaneme vyjadrenie

$$f(z) = \frac{z^3 \, \mathrm{e}^{\frac{1}{z}}}{z+1} = z^3 \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{z}} \cdot \frac{1}{z+1} = z^3 \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{-n}}{n!} \right) \cdot \left(\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m z^m \right)$$

platné pre $0 < |z| < 1$. Jedná sa teda (po roznásobení) o hľadaný Laurentov rad funkcie f na prstencovom okolí bodu 0. Zaujíma nás Laurentov koeficient pri mocnine z^{-1}, keďže práve to je, podľa definície, rezíduum $\operatorname{res}_0 f(z)$. Pri postupnom roznásobovaní daných nekonečných súčtov má exponent všeobecnej mocniny, ktorú dostaneme, tvar

$$\underbrace{3}_{\text{príspevok od } z^3} + \underbrace{(-n)}_{\text{príspevok od prvej sumy}} + \underbrace{m}_{\text{príspevok od druhej sumy}},$$

kde m, n sú nezáporné celé čísla. Chceme, aby $3-n+m = -1$, teda $n = 4+m$. Index m z druhej sumy je teda nezávislý, kým index n z prvej sumy závisí na aktuálnej hodnote indexu m, a to $n = 4+m$. Jednotlivé členy, ktoré budú prispievať k celkovému členu s mocninou z^{-1}, sú teda postupne

$$\begin{gathered}
z^3 \cdot \frac{z^{-4}}{4!} \cdot (-1)^0 z^0, \\
z^3 \cdot \frac{z^{-5}}{5!} \cdot (-1)^1 z^1, \\
z^3 \cdot \frac{z^{-6}}{6!} \cdot (-1)^2 z^2, \\
z^3 \cdot \frac{z^{-7}}{7!} \cdot (-1)^3 z^3, \\
\vdots \\
z^3 \cdot \frac{z^{-4-m}}{(4+m)!} \cdot (-1)^m z^m, \\
\vdots \\
\Downarrow
\end{gathered}$$

$$\text{celkový koeficient pri } z^{-1} = \frac{(-1)^0}{4!} + \frac{(-1)^1}{5!} + \frac{(-1)^2}{6!} + \cdots + \frac{(-1)^m}{(4+m)!} + \cdots,$$

a tak pre rezíduum funkcie f v bode 0 máme

$$\operatorname{res}_0 f(z) = \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} - \frac{1}{7!} + \cdots + \frac{(-1)^m}{(4+m)!} + \cdots.$$

Tento súčet vieme určiť, pretože platí

$$\mathrm{e}^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \underbrace{\frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} - \frac{1}{7!} + \cdots}_{\text{toto je už } \operatorname{res}_0 f(z)}.$$

Preto dostaneme

$$\frac{1}{\mathrm{e}} = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \operatorname{res}_0 f(z) \implies \operatorname{res}_0 f = \frac{1}{\mathrm{e}} - \frac{1}{3}.$$

Hodnota integrálu v zadaní príkladu potom bude

$$\int_{\varphi} \frac{z^3\,\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}}{z+1}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i} \cdot [\operatorname{res}_{-1} f(z) + \operatorname{res}_0 f(z)] = 2\pi\mathrm{i} \cdot \left[-\frac{1}{\mathrm{e}} + \frac{1}{\mathrm{e}} - \frac{1}{3}\right] = -\frac{2\pi\mathrm{i}}{3}.$$

V nasledujúcich príkladoch aplikujeme Cauchyho teóriu krivkových integrálov na výpočet určitých a nevlastných integrálov z reálnych funkcií jednej reálnej premennej. Najprv ilustrujeme použitie niekoľkých už „hotových“ formúl, konkrétne:

(i) Integrály typu

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos mt\,\mathrm{d}t, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin mt\,\mathrm{d}t, \quad m > 0.$$

Predpoklady:

- Funkcia $f(z)$ má v $\mathbb{C}$ iba konečne veľa izolovaných singularít, pričom na reálnej osi má najviac jednoduché póly.
- Platí $\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$.

Potom

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos mt\,\mathrm{d}t = \operatorname{Re}\left[2\pi\mathrm{i} \cdot \sum_{\operatorname{Im} w>0} \operatorname{res}_w f(z)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}mz} + \pi\mathrm{i} \cdot \sum_{\operatorname{Im} w=0} \operatorname{res}_w f(z)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}mz}\right],$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin mt\,\mathrm{d}t = \operatorname{Im}\left[2\pi\mathrm{i} \cdot \sum_{\operatorname{Im} w>0} \operatorname{res}_w f(z)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}mz} + \pi\mathrm{i} \cdot \sum_{\operatorname{Im} w=0} \operatorname{res}_w f(z)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}mz}\right].$$

(ii) Integrál typu

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Predpoklady:

- Funkcia $f(z)$ má v hornej komplexnej polrovine (t.j., obsahujúcej nezápornú imaginárnu polos) iba konečne veľa izolovaných singularít, pričom žiadna z nich neleží na reálnej osi.
- Platí

$$\lim_{\substack{z\to\infty \\ \operatorname{Im} z\geq 0}} z f(z) = 0.$$

Potom

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 2\pi\mathrm{i}\cdot \sum_{\operatorname{Im} w>0} \operatorname{res}_w f(z).$$

(iii) Integrál typu

$$\int_0^{\infty} f(t)\, t^{a-1}\,\mathrm{d}t, \quad a\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}.$$

Predpoklady:

- Funkcia $f(z)$ má v $\mathbb{C}$ iba konečne veľa izolovaných singularít neležiacich v reálnom intervale $(0,\infty)$.
- Platí

$$\lim_{z\to\infty} |z|^a f(z) = 0 = \lim_{z\to 0} |z|^a f(z).$$

Potom

$$\int_0^{\infty} f(t)\, t^{a-1}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{\sin \pi a}\cdot \sum_{w\in\mathbb{C}\setminus[0,\infty)} \operatorname{res}_w (-z)^{a-1} f(z),$$

kde mocnina z^{a-1} je chápaná v zmysle hlavnej hodnoty (vetvy) podľa

$$z^{a-1} := \mathrm{e}^{(a-1)\cdot[\ln|z| + \mathrm{i}\cdot\arg z]}.$$

(iv) Integrály typu

$$\int_0^{\infty} f(t)\,\ln t\,\mathrm{d}t, \qquad \int_0^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Predpoklady:

- Funkcia $f(z)$ má v $\mathbb{C}$ iba konečne veľa izolovaných singularít neležiacich v reálnom intervale $(0, \infty)$.
- Platí
$$\lim_{z\to\infty} z \ln^2 |z|\, f(z) = 0 = \lim_{z\to 0} z \ln^2 |z|\, f(z).$$

Potom

$$\int_0^\infty f(t)\, \ln t\, \mathrm{d}t = -\frac{1}{2} \cdot \mathrm{Re}\left[\sum_{w\in\mathbb{C}\setminus[0,\infty)} \mathrm{res}_w\, f(z) \log_{2\pi}^2 z \right],$$

$$\int_0^\infty f(t)\, \ln t\, \mathrm{d}t = -\frac{1}{2\pi} \cdot \mathrm{Im}\left[\sum_{w\in\mathbb{C}\setminus[0,\infty)} \mathrm{res}_w\, f(z) \log_{2\pi}^2 z \right],$$

pričom logaritmická funkcia $\log_{2\pi} z$ je definovaná predpisom

$$\log_{2\pi} z := \ln |z| + \mathrm{i} \cdot \varphi,$$

kde $\varphi \in [0, 2\pi)$ je argument komplexného čísla z. Okrem toho platí $(\log_{2\pi} z)' = 1/z$ v bodoch, kde je funkcia $\log_{2\pi} z$ holomorfná.

Príklad 2

Vypočítajme nevlastný integrál

$$\int_0^\infty \frac{\sin at}{t\,(t^2 + b^2)}\, \mathrm{d}t, \quad a, b \in \mathbb{R}^+.$$

Riešenie:

Jedná sa o integrál typu (i). Komplexná funkcia $f(z)$ má tvar

$$f(z) = \frac{1}{z(z^2 + b^2)}.$$

Platí $\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$, ako sa možno ľahko presvedčiť. Funkcia f je racionálna lomená funkcia, izolované singularity má práve v koreňoch svojho menovateľa, t.j. v číslach 0, $\pm\mathrm{i}b$. Všetky tri singularity sú jednoduché póly. Zaujímajú nás iba tie, ktoré majú nezápornú imaginárnu časť, teda 0 a $\mathrm{i}b$

(vzhľadom na podmienku $b > 0$). Potrebujeme v nich zistiť rezíduá funkcie $f(z)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}az}$. Postupne dostaneme

$$\operatorname{res}_0 f(z)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}az} = \lim_{z\to 0} z \cdot \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}az}}{z(z^2+b^2)} = \frac{1}{b^2},$$

$$\operatorname{res}_{\mathrm{i}b} f(z)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}az} = \lim_{z\to \mathrm{i}b} (z-\mathrm{i}b) \cdot \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}az}}{z(z^2+b^2)} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}a\cdot \mathrm{i}b}}{\mathrm{i}b\cdot(\mathrm{i}b+\mathrm{i}b)} = -\frac{\mathrm{e}^{-ab}}{2b^2}.$$

Dosadením do vhodnej formuly v (i) dostaneme

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin at}{t\,(t^2+b^2)}\,\mathrm{d}t = \operatorname{Im}\left[2\pi\mathrm{i}\cdot \operatorname{res}_{\mathrm{i}b} f(z)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}az} + \pi\mathrm{i}\cdot \operatorname{res}_0 f(z)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}az}\right] =$$

$$\operatorname{Im}\left[2\pi\mathrm{i}\cdot\left(-\frac{\mathrm{e}^{-ab}}{2b^2}\right) + \pi\mathrm{i}\cdot\frac{1}{b^2}\right] = \pi\cdot\frac{1-\mathrm{e}^{-ab}}{b^2}.$$

Nakoľko funkcia pod integrálom v zadaní príkladu je párna, platí

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin at}{t\,(t^2+b^2)}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin at}{t\,(t^2+b^2)}\,\mathrm{d}t = \pi\cdot\frac{1-\mathrm{e}^{-ab}}{2b^2}.$$

Príklad 3

Stanovme nevlastný integrál

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{3t+1}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t.$$

Riešenie:

Jedná sa o integrál typu (ii). Komplexná funkcia $f(z)$ má tvar

$$f(z) = \frac{3z+1}{(z^2+1)^2}.$$

Platí $\lim_{z\to\infty} zf(z) = 0$. Je to racionálna lomená funkcia s izolovanými singularitami v bodoch $\pm\mathrm{i}$, ktoré neležia na reálnej osi. Podstatná je pre nás singularita $w = \mathrm{i}$, nakoľko $\operatorname{Im} w > 0$. V tomto bode má funkcia f dvojnásobný pól. Preto pre rezíduum $\operatorname{res}_{\mathrm{i}} f(z)$ platí

$$\operatorname{res}_{\mathrm{i}} f(z) = \lim_{z\to \mathrm{i}} \left[(z-\mathrm{i})^2\cdot\frac{3z+1}{(z^2+1)^2}\right]' = \lim_{z\to \mathrm{i}}\left[\frac{3z+1}{(z+\mathrm{i})^2}\right]' =$$

$$\lim_{z\to \mathrm{i}} \frac{3(\mathrm{i}-z)-2}{(z+\mathrm{i})^3} = -\frac{\mathrm{i}}{4}.$$

Dosadením do formuly v (ii) dostaneme pre integrál v zadaní vyjadrenie

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{3t+1}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t = 2\pi\mathrm{i}\cdot\left(-\frac{\mathrm{i}}{4}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Príklad 4

Nájdime hodnotu nevlastného integrálu

$$\int_0^{\infty} \frac{t^{a-1}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t, \quad a\in(0,1).$$

Riešenie:

Jedná sa o integrál typu (iii). Komplexná funkcia $f(z)$ má tvar

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2}.$$

Nie je ťažké overiť, že platí

$$\lim_{z\to\infty} |z|^a f(z) = 0 \quad \text{a} \quad \lim_{z\to 0} |z|^a f(z) = 0.$$

Funkcia f má jednoduché póly v bodoch $\pm\mathrm{i}$, neležiace na kladnej reálnej osi. Potrebujeme stanoviť rezíduá funkcie $(-z)^{a-1}\,f(z)$ v týchto bodoch. Nakoľko mocninová funkcia $(-z)^{a-1}$ je holomorfná na okoliach bodov $\pm\mathrm{i}$, platí

$$\operatorname{res}_{\mathrm{i}}(-z)^{a-1}f(z) = \lim_{z\to\mathrm{i}}(z-\mathrm{i})\cdot\frac{(-z)^{a-1}}{1+z^2} = \lim_{z\to\mathrm{i}}\frac{(-z)^{a-1}}{\mathrm{i}+z} = \frac{(-\mathrm{i})^{a-1}}{2\mathrm{i}} =$$

$$\frac{\mathrm{e}^{(a-1)\cdot[\ln|-\mathrm{i}|+\mathrm{i}\cdot\arg(-\mathrm{i})]}}{2\mathrm{i}} = \frac{\mathrm{e}^{(a-1)\cdot\mathrm{i}\cdot(-\pi/2)}}{2\mathrm{i}} = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(a-1)\pi/2}}{2\mathrm{i}}.$$

Analogicky zistíme rezíduum v bode $-\mathrm{i}$ (samy overte :))

$$\operatorname{res}_{-\mathrm{i}}(-z)^{a-1}f(z) = -\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(a-1)\pi/2}}{2\mathrm{i}}.$$

Pri výpočte rezíduí sme využili fakt, že mocninu $(-z)^{a-1}$ chápeme v zmysle jej hlavnej hodnoty (vetvy) podľa predpisu v (iii). Následným dosadením do danej formuly v (iii) dostaneme pre integrál v zadaní príkladu vyjadrenie

$$\int_0^{\infty}\frac{t^{a-1}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{\sin\pi a}\cdot\left[\operatorname{res}_{\mathrm{i}}(-z)^{a-1}f(z) + \operatorname{res}_{-\mathrm{i}}(-z)^{a-1}f(z)\right] =$$

$$\frac{\pi}{\sin \pi a} \cdot \underbrace{\left[\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(a-1)\pi/2}}{2\mathrm{i}} - \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(a-1)\pi/2}}{2\mathrm{i}} \right]}_{\text{toto je } -\sin\left(\frac{\pi(a-1)}{2}\right)} = -\frac{\pi}{\sin \pi a} \cdot \sin\left(\frac{\pi(a-1)}{2}\right) =$$

$$\frac{-\pi}{\sin \pi a} \cdot \sin\left(\frac{\pi a}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{\underbrace{\sin \pi a}_{2\sin\frac{\pi a}{2}\cos\frac{\pi a}{2}}} \cdot \cos\frac{\pi a}{2} = \frac{\pi \cos\frac{\pi a}{2}}{2\sin\frac{\pi a}{2}\cos\frac{\pi a}{2}} = \frac{\pi}{2\sin\frac{\pi a}{2}}.$$

Príklad 5

Určime nevlastné integrály

$$\int_0^\infty \frac{\ln t}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t, \qquad \int_0^\infty \frac{1}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t.$$

Riešenie:

Ide o integrály typu (iv). Komplexná funkcia $f(z)$ má tvar

$$f(z) = \frac{1}{(1+z^2)^2}.$$

Platí (ukážte samy :))

$$\lim_{z\to\infty} z\ln^2|z|\,f(z) = 0 \quad \text{a} \quad \lim_{z\to 0} z\ln^2|z|\,f(z) = 0.$$

Funkcia f má dvojnásobné póly v bodoch $\pm\mathrm{i}$. Chceme nájsť rezíduá funkcie $f(z)\log^2_{2\pi} z$ v týchto bodoch. Podľa rovnosti v (iv) je funkcia $\log^2_{2\pi} z$ holomorfná na istých okoliach bodov $\pm\mathrm{i}$. Preto máme

$$\operatorname{res}_{\mathrm{i}} f(z)\log^2_{2\pi} z = \lim_{z\to\mathrm{i}} \left[(z-\mathrm{i})^2 \cdot \frac{\log^2_{2\pi} z}{(1+z^2)^2} \right]' = \lim_{z\to\mathrm{i}} \left[\frac{\log^2_{2\pi} z}{(z+\mathrm{i})^2} \right]' =$$

$$\lim_{z\to\mathrm{i}} \frac{2\log_{2\pi} z\left[(z+\mathrm{i})\cdot\frac{1}{z} - \log_{2\pi} z\right]}{(z+\mathrm{i})^3} = \frac{2\log_{2\pi}\mathrm{i}\left[2\mathrm{i}\cdot\frac{1}{\mathrm{i}} - \log_{2\pi}\mathrm{i}\right]}{(2\mathrm{i})^3}.$$

Keďže platí

$$\log_{2\pi}\mathrm{i} = \ln|\mathrm{i}| + \mathrm{i}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi\mathrm{i}}{2},$$

pre hodnotu $\operatorname{res}_{\mathrm{i}} f(z)\log^2_{2\pi} z$ dostaneme

$$\operatorname{res}_{\mathrm{i}} f(z)\log^2_{2\pi} z = \frac{2\cdot\frac{\pi\mathrm{i}}{2}\cdot\left[2-\frac{\pi\mathrm{i}}{2}\right]}{-8\mathrm{i}} = -\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\cdot\frac{\pi^2}{16}.$$

Podobnou procedúrou získame hodnotu $\operatorname{res}_{-\mathrm{i}} f(z) \log_{2\pi}^2 z$ (overte samy :))

$$\operatorname{res}_{-\mathrm{i}} f(z) \log_{2\pi}^2 z = \frac{3\pi}{4} - \mathrm{i} \cdot \frac{9\pi^2}{16}.$$

Pre hodnotu prvého integrálu v zadaní príkladu potom platí

$$\int_0^\infty \frac{\ln t}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2} \cdot \operatorname{Re}\left[\operatorname{res}_{\mathrm{i}} f(z) \log_{2\pi}^2 z + \operatorname{res}_{-\mathrm{i}} f(z) \log_{2\pi}^2 z\right] =$$

$$-\frac{1}{2} \cdot \operatorname{Re}\left[-\frac{\pi}{4} + \mathrm{i} \cdot \frac{\pi^2}{16} + \frac{3\pi}{4} - \mathrm{i} \cdot \frac{9\pi^2}{16}\right] = -\frac{1}{2} \cdot \operatorname{Re}\left[\frac{\pi}{2} - \mathrm{i} \cdot \frac{\pi^2}{2}\right] = -\frac{\pi}{4}.$$

Hodnota druhého integrálu v zadaní príkladu má tvar

$$\int_0^\infty \frac{1}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2\pi} \cdot \operatorname{Im}\left[\operatorname{res}_{\mathrm{i}} f(z) \log_{2\pi}^2 z + \operatorname{res}_{-\mathrm{i}} f(z) \log_{2\pi}^2 z\right] =$$

$$-\frac{1}{2\pi} \cdot \operatorname{Im}\left[\frac{\pi}{2} - \mathrm{i} \cdot \frac{\pi^2}{2}\right] = \frac{\pi}{4}.$$

V ďalších príkladoch si ukážeme, čo sa pri výpočtoch určitých, resp. nevlastných reálnych integrálov pomocou komplexnej Cauchyho teórie deje „v skutočnosti“. Poznamenajme, že nasledujúce integrály nie sú z typov (i), (ii), (iii) a (iv).

Príklad 6

Nájdime hodnoty tzv. *Fresnelových* integrálov

$$\int_0^\infty \cos t^2\,\mathrm{d}t, \quad \int_0^\infty \sin t^2\,\mathrm{d}t.$$

Riešenie:

Obidva integrály konvergujú (Pokúste sa ukázať samy :)). Uvažujme komplexnú funkciu f tvaru

$$f(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}z^2}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Funkcia f je celá, t.j., je holomorfná v celej komplexnej rovine. Podľa Cauchyho integrálnej vety teda pre každú uzavretú kladne orientovanú krivku φ platí

$$\int_\varphi \mathrm{e}^{\mathrm{i}z^2}\mathrm{d}z = 0.$$

Uvažujme nasledovnú uzavretú kladne orientovanú krivku φ

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3, \text{ kde}$$

$$\varphi_1 : z = t, \quad t \in [0, R], \qquad \varphi_2 : z = R\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}, \quad t \in [0, \pi/4],$$
$$\varphi_3 : z = (R - t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}, \quad t \in [0, R],$$

kde R je dané kladné reálne číslo. (Znázornite v komplexnej rovine. Mali by ste dostať jednu osminku kruhovej „tortičky“ so stredom v bode 0 :)). Potom

$$0 = \int_{\varphi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}z^2} \mathrm{d}z = \underbrace{\int_{\varphi_1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}z^2} \mathrm{d}z}_{I_1} + \underbrace{\int_{\varphi_2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}z^2} \mathrm{d}z}_{I_2} + \underbrace{\int_{\varphi_3} \mathrm{e}^{\mathrm{i}z^2} \mathrm{d}z}_{I_3}. \tag{1}$$

Jednotlivé integrály I_1, I_2 a I_3 prepíšeme pomocou daných parametrizácií (všimnime si, že parametrizácie kriviek φ_1, φ_2 a φ_3 sú súhlasné s kladnou orientáciou krivky φ)

$$I_1 = \int_{\varphi_1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}z^2} \mathrm{d}z = |z = t, \quad \mathrm{d}z = \mathrm{d}t| = \int_0^R \mathrm{e}^{\mathrm{i}t^2} \mathrm{d}t = \int_0^R \left(\cos t^2 + \mathrm{i} \cdot \sin t^2\right) \mathrm{d}t$$
$$= \int_0^R \cos t^2 \, \mathrm{d}t + \mathrm{i} \cdot \int_0^R \sin t^2 \, \mathrm{d}t,$$

$$I_2 = \int_{\varphi_2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}z^2} \mathrm{d}z = \left|z = R\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}, \quad \mathrm{d}z = \mathrm{i}R\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t\right| = \int_0^{\pi/4} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot(R\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})^2} \cdot \mathrm{i}R\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t$$
$$= \mathrm{i}R \int_0^{\pi/4} \mathrm{e}^{\mathrm{i}R^2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot 2t}} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t = \mathrm{i}R \int_0^{\pi/4} \mathrm{e}^{-R^2 \sin 2t + \mathrm{i}\cdot R^2 \cos 2t} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t$$
$$= \mathrm{i}R \int_0^{\pi/4} \mathrm{e}^{-R^2 \sin 2t} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}R^2 \cos 2t} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t,$$

$$I_3 = \int_{\varphi_3} \mathrm{e}^{\mathrm{i}z^2} \mathrm{d}z = \left|z = (R - t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}, \quad \mathrm{d}z = -\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}\,\mathrm{d}t\right| =$$

$$\int_0^R \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\left[(R-t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}\right]^2} \cdot \left(-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}\right) \mathrm{d}t = -\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4} \int_0^R \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot(R-t)^2 \cdot \overbrace{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}}^{\text{toto je i}}}\,\mathrm{d}t =$$

$$-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}\int_0^R \mathrm{e}^{-(R-t)^2}\mathrm{d}t.$$

Zavedením substitúcie $s = R - t$ v poslednom integrále máme (samy ukážte)

$$I_3 = -\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}\int_0^R \mathrm{e}^{-s^2}\mathrm{d}s.$$

Dosadením týchto vyjadrení integrálov I_1 a I_3 do rovnosti (1) získame

$$0 = \int_0^R \cos t^2\,\mathrm{d}t + \mathrm{i}\cdot\int_0^R \sin t^2\,\mathrm{d}t + I_2 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}\int_0^R \mathrm{e}^{-s^2}\mathrm{d}s. \tag{2}$$

Integrál I_2 odhadneme v absolútnej hodnote zhora

$$|I_2| = \left|\mathrm{i}R\int_0^{\pi/4} \mathrm{e}^{-R^2\sin 2t}\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}R^2\cos 2t}\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t\right| \leq$$

$$|\mathrm{i}|\cdot|R|\cdot\int_0^{\pi/4}\left|\mathrm{e}^{-R^2\sin 2t}\right|\cdot\overbrace{\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}R^2\cos 2t}\right|}^{\text{toto je 1}}\cdot\overbrace{\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right|}^{\text{toto je 1}}\,\mathrm{d}t = R\int_0^{\pi/4}\mathrm{e}^{-R^2\sin 2t}\,\mathrm{d}t.$$

V poslednom integrále sa funkcia $\sin 2t$ dá nahradiť funkciou $4t/\pi$ s tým, že tento integrál sa zväčší (nakreslením grafov oboch funkcií na intervale $[0,\pi/4]$ sa samy presvedčte, že platí $4t/\pi \leq \sin 2t$ pre $t \in [0,\pi/4]$). Preto máme

$$|I_2| \leq R\int_0^{\pi/4}\mathrm{e}^{-4R^2t/\pi}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4R}\left(1-\mathrm{e}^{-R^2}\right) \tag{3}$$

(poslednú rovnosť overte priamou integráciou podľa premennej t samy :)). Dôvod, prečo robíme takéto hrozné výpočty a odhady je nasledovný. V rovnosti (2) budeme limitovať $R \to \infty$. Môžeme to urobiť, pretože rovnosť (2), resp. (1), platí pre *akúkoľvek* tortičku φ, a teda aj pre obrovské tortisko φ :) (pripomeňme, že funkcia $f(z)$ v úvode príkladu je holomorfná v celom $\mathbb{C}$). Celý fígeľ spočíva v tom, že pri takomto limitovaní prvý a druhý integrál v (2) nám prejdu na Fresnelove integrály v zadaní príkladu, kým integrál I_2 bude konvergovať do nuly (toto vyplýva z odhadu (3), podľa ktorého $|I_2| \to 0$ pre $R \to \infty$, overte samy :)). Posledný integrál v (2) sa zmení na Poissonov integrál $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-s^2}\mathrm{d}s$. Platí teda

$$0 = \int_0^R \cos t^2\,\mathrm{d}t + \mathrm{i}\cdot\int_0^R \sin t^2\,\mathrm{d}t + I_2 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}\int_0^R \mathrm{e}^{-s^2}\mathrm{d}s$$

$$\Downarrow \text{ pre } R \to \infty \Downarrow$$

$$0 = \int_0^\infty \cos t^2 \,\mathrm{d}t + \mathrm{i} \cdot \int_0^\infty \sin t^2 \,\mathrm{d}t - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-s^2} \mathrm{d}s.$$

Vieme, že

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-s^2} \mathrm{d}s = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \qquad \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4} = \frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}$$

(prvú identitu sa pokúste samy dokázať, napr. pomocou vhodného dvojného integrálu a transformácie do polárnych súradníc ;)). Dosadením dostaneme

$$0 = \int_0^\infty \cos t^2 \,\mathrm{d}t + \mathrm{i} \cdot \int_0^\infty \sin t^2 \,\mathrm{d}t - \frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Z tejto rovnosti porovnaním reálnych a imaginárnych častí daných výrazov vyplýva finálny výsledok

$$\int_0^\infty \cos t^2 \,\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{\pi}{8}} = \int_0^\infty \sin t^2 \,\mathrm{d}t.$$

Príklad 7

Nech n je dané prirodzené číslo. Pomocou výpočtu komplexného integrálu

$$I = \int_\varphi \left(z + \frac{1}{z}\right)^{2n} \frac{\mathrm{d}z}{z}, \quad \varphi : |z| = 1, \circlearrowleft,$$

nájdime hodnotu určitého integrálu

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2n} t \,\mathrm{d}t.$$

Riešenie:

Integrál I budeme počítať dvomi spôsobmi – jednak tradične, zavedením parametrizácie, a jednak pomocou Cauchyho teórie. Riešenie úlohy v príklade bude spočívať v porovnaní výsledkov oboch týchto spôsobov. Krivka φ je kladne orientované kružnica so stredom v bode 0 a s polomerom 1, má teda parametrické vyjadrenie $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, kde $t \in [0, 2\pi]$. Táto parametrizácia je zrejme súhlasná s orientáciou krivky φ v zadaní príkladu. Ďalej, $\mathrm{d}z = \mathrm{i} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \mathrm{d}t$. Zavedením parametrizácie do integrálu I dostaneme

$$I = \int_0^{2\pi} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}\right)^{2n} \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t} \cdot \mathrm{i} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} (2\cos t)^{2n} \cdot \mathrm{i} \,\mathrm{d}t = \mathrm{i} \cdot \int_0^{2\pi} 2^{2n} \cos^{2n} t \,\mathrm{d}t,$$

Pri úprave sme využili identitu $\cos t = (\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t})/2$. Na druhej strane, integrál I sa dá upraviť

$$I = \int_\varphi \left(\frac{z^2+1}{z}\right)^{2n} \frac{\mathrm{d}z}{z} = \int_\varphi \frac{(z^2+1)^{2n}}{z^{2n+1}} \,\mathrm{d}z.$$

Čitateľ zlomku pod integrálom je funkcia holomorfná vo vnútri φ a bod 0 (nulový bod menovateľa) leží vo vnútri φ. Podľa Cauchyho integrálnej formuly teda platí

$$I = \frac{2\pi\mathrm{i}}{(2n)!} \cdot \left[(z^2+1)^{2n}\right]^{(2n)}_{z=0}.$$

Potrebujeme nájsť hodnotu $2n$-tej derivácie funkcie $(z^2+1)^{2n}$ v bode $z = 0$. Jedná sa o polynóm stupňa $4n$, pričom podľa binomickej vety máme

$$(z^2+1)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} z^{2k} \binom{2n}{k}. \tag{4}$$

Po $2n$-tom derivovaní tohto polynómu dostaneme zrejme polynóm $2n$-tého stupňa, ktorého absolútny člen (člen s mocninou z^0) bude to, čo vznikne $2n$-tým derivovaním člena v pôvodnom polynóme (4) s $k = n$, t.j., člena $z^{2n}\binom{2n}{n}$ (dobre si toto premyslite; derivujeme prirodzené mocniny, ich stupne sa každou deriváciou znižujú o jednotku). Načo nám je však tento absolútny člen? Po dosadení $z = 0$ do hľadanej $2n$-tej derivácie polynómu (4) – to predsa chceme urobiť – nám ostane iba absolútny člen :) (tiež si dobre premyslite). Platí teda

$$\left[(z^2+1)^{2n}\right]^{(2n)}_{z=0} = \left[z^{2n}\binom{2n}{n}\right]^{(2n)} = 2n \cdot (2n-1) \cdot (2n-2) \cdots 2 \cdot 1 \cdot \binom{2n}{n} =$$

$$(2n)! \cdot \binom{2n}{n}.$$

To znamená, že máme

$$I = \frac{2\pi \mathrm{i}}{(2n)!} \cdot (2n)! \cdot \binom{2n}{n} = 2\pi \mathrm{i} \cdot \binom{2n}{n}.$$

Porovnaním oboch získaných výsledkov pre integrál I dostaneme (po úprave)

$$\mathrm{i} \cdot \int_0^{2\pi} 2^{2n} \cos^{2n} t \, \mathrm{d}t = 2\pi \mathrm{i} \cdot \binom{2n}{n}$$

$$\Downarrow$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2n} t \, \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2^{2n-1}} \cdot \binom{2n}{n}.$$