Komplexná analýza

Peter Šepitka

podzim 2014

Obsah

Obsah

Obor komplexných čísiel

Pod pojmom komplexné číslo a rozumieme usporiadanú dvojicu $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Prvá zložka α tejto dvojice sa nazýva reálna časť komplexného čísla a, druhá zložka β sa nazýva imaginárna časť komplexného čísla a, označujeme $\alpha = \operatorname{Re} a$ a $\beta = \operatorname{Im} a$. Definujeme sčítanie a násobenie komplexných čísiel

$$(\alpha,\, \beta) + (\gamma,\, \delta) := (\alpha + \gamma,\, \beta + \delta),$$
$$(\alpha,\, \beta) \cdot (\gamma,\, \delta) := (\alpha\gamma - \beta\delta,\, \alpha\delta + \beta\gamma).$$

Sčítanie i násobenie komplexných čísiel sú asociatívne a komutatívne binárne operácie a pre každú trojicu a, b, c komplexných čísiel platí distributívny zákon

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

Pre úplnosť definujeme násobenie komplexného čísla reálnym číslom

$$r(\alpha,\, \beta) := (r\alpha,\, r\beta), \quad r \in \mathbb{R}.$$

- Nula – $(0, 0)$ – neutrálny prvok vzhľadom na sčítanie, t.j.,
$$(\alpha,\, \beta) + (0, 0) = (0, 0) + (\alpha,\, \beta) = (\alpha,\, \beta).$$
- Jednotka – $(1, 0)$ – neutrálny prvok vzhľadom na násobenie, t.j.,
$$(\alpha,\, \beta) \cdot (1, 0) = (1, 0) \cdot (\alpha,\, \beta) = (\alpha,\, \beta).$$

- Opačné číslo ku komplexnému číslu $a = (\alpha,\ \beta)$

$$-a := (-\alpha,\ -\beta)$$

Komplexné číslo $-a$ je jediné riešenie rovnice

$$a + z = (0, 0).$$

- Inverzné číslo k nenulovému komplexnému číslu $a = (\alpha, \beta)$

$$a^{-1} := \left(\frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2},\ \frac{-\beta}{\alpha^2 + \beta^2} \right).$$

Komplexné číslo a^{-1} je jediné riešenie rovnice

$$a \cdot z = (1, 0).$$

- Odčítanie komplexných čísiel a, b definujeme $a - b := a + (-b)$.
- Delenie komplexných čísiel $a, b,\ b \neq (0, 0)$, definujeme $a/b := a \cdot b^{-1}$.

Množina všetkých komplexných čísiel sa označuje $\mathbb{C}$. Algebraická štruktúra $(\mathbb{C},\ +,\ \cdot)$ je teleso, ktoré sa nedá usporiadať (na rozdiel od $(\mathbb{R},\ +,\ \cdot)$).

Algebraický tvar komplexného čísla

Podmnožina komplexných čísiel

$$\mathcal{R} := \{a \in \mathbb{C},\ a = (\alpha,\, 0),\ \alpha \in \mathbb{R}\}$$

je podtelesom telesa $\mathbb{C}$ izomorfným s telesom $\mathbb{R}$ všetkých reálnych čísiel. Preto je možné množiny $\mathcal{R}$ a $\mathbb{R}$, ako algebraické štruktúry, stotožniť. To znamená, že v množine $\mathbb{C}$ budeme klásť $\alpha = (\alpha,\, 0)$ pre každé $\alpha \in \mathbb{R}$. Potom $0 = (0, 0)$ a $1 = (1, 0)$. Ďalej, komplexné číslo $(0, 1)$ sa označuje symbolom i, t.j., $\mathrm{i} = (0, 1)$, a nazýva sa imaginárna jednotka. Platí $\mathrm{i}^2 = (-1, 0) = -1$. Tieto označenia potom umožňujú vyjadriť komplexné číslo $a = (\alpha, \beta)$ v tzv. algebraickom tvare

$$a = (\alpha,\, \beta) = (\alpha,\, 0) + (0,\, \beta) = \alpha(1, 0) + \beta(0, 1) = \alpha + \mathrm{i}\beta. \tag{1}$$

Komplexné číslo $a = \alpha + \mathrm{i}\beta$ s $\beta = 0$ (teda s $\operatorname{Im} a = 0$) sa označuje ako reálne (komplexné) číslo, kým komplexné číslo $a = \alpha + \mathrm{i}\beta$ s $\beta \neq 0$ (teda s $\operatorname{Im} a \neq 0$) sa nazýva imaginárne (komplexné) číslo. Imaginárne číslo s nulovou reálnou časťou sa nazýva rýdzo imaginárne (komplexné) číslo. Komplexne združené číslo $\bar{a}$ k číslu $a = \alpha + \mathrm{i}\beta \in \mathbb{C}$ je definované ako $\bar{a} = \alpha - \mathrm{i}\beta$.

Absolútna hodnota (veľkosť) $|a|$ komplexného čísla $a = \alpha + \mathrm{i}\beta$ sa definuje

$$|a| := \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}. \tag{2}$$

Reálne číslo $|a|$ vyjadruje geometrickú vzdialenosť bodu $[\alpha, \beta]$ od bodu $[0, 0]$ v reálnej rovine. Všeobecne, pre $a, b \in \mathbb{C}$ reálne číslo $|a - b|$ vyjadruje vzájomnú vzdialenosť bodov $[\mathrm{Re}\, a, \mathrm{Im}\, a]$ a $[\mathrm{Re}\, b, \mathrm{Im}\, b]$ v reálnej rovine.

Poznámka 1 (Základné vlastnosti)

Nech $a, a_1, a_2 \in \mathbb{C}$. Potom platí:

- $\bar{\bar{a}} = a, \quad \overline{a_1 \pm a_2} = \bar{a}_1 \pm \bar{a}_2, \quad \overline{a_1 a_2} = \bar{a}_1 \bar{a}_2, \quad \overline{a_1 / a_2} = \bar{a}_1 / \bar{a}_2$, ak $a_2 \neq 0$.
- $a\bar{a} = |a|^2, \quad |a_1 a_2| = |a_1||a_2|, \quad |a_1/a_2| = |a_1|/|a_2|$, ak $a_2 \neq 0$.
- trojuholníkové nerovnosti $||a_1| - |a_2|| \leq |a_1 + a_2| \leq |a_1| + |a_2|$.
- $|\mathrm{Re}\, a| \leq |a|, \quad |\mathrm{Im}\, a| \leq |a|$.
- $$\mathrm{Re}\, a = \frac{a + \bar{a}}{2}, \quad \mathrm{Im}\, a = \frac{a - \bar{a}}{2\mathrm{i}}.$$
- $\mathrm{Re}\,(a_1 \pm a_2) = \mathrm{Re}\, a_1 \pm \mathrm{Re}\, a_2, \quad \mathrm{Im}\,(a_1 \pm a_2) = \mathrm{Im}\, a_1 \pm \mathrm{Im}\, a_2$.

Komplexná (Gaussova) rovina

Prirodzeným modelom množiny $\mathbb{C}$ komplexných čísiel je (euklidovská) rovina – komplexná (Gaussova) rovina. Každému komplexnému číslu $z = x + \mathrm{i}y$ je priradený bod v rovine so súradnicami $[x, y]$. Naopak, každému bodu $[x, y]$ roviny odpovedá práve jedno komplexné číslo $z = x + \mathrm{i}y$. Ďalej budeme preto pre jednoduchosť stotožnovať body roviny s komplexnými číslami. Vzdialenosť (metrika) sa v množine $\mathbb{C}$ definuje pomocou absolútnej hodnoty komplexného čísla zavedenej v (2), t.j., vzdialenosť dvoch komplexných čísiel z_1 a z_2 je definovaná $d(z_1, z_2) := |z_1 - z_2|$.

Ako je to s pojmom "komplexné" nekonečno? Pre množinu $\mathbb{C}$ komplexných čísiel sa definuje iba jedno "nekonečno". Konkrétne, k množine $\mathbb{C}$ sa formálne pridá jeden prvok, ktorý sa označuje symbolom ∞, spĺňajúci vlastnosti

$$\infty = -\infty = |\infty|, \quad \infty \cdot \infty = \infty,$$
$$z + \infty = \infty, \quad z/\infty = 0, \quad \infty/z = \infty \quad \text{pre } z \in \mathbb{C},$$
$$z \cdot \infty = \infty, \quad z/0 = \infty, \quad \text{pre } z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Nedefinujú sa výrazy $\infty + \infty$, $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, $0/0$, ∞/∞. Množina $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ sa spolu s danými algebraickými operáciami označuje $\tilde{\mathbb{C}}$ a nazýva sa rozšírená (uzavretá) komplexná rovina alebo tiež rozšírená (uzavretá) Gaussova rovina.

Goniometrický (polárny) tvar komplexného čísla

S modelom komplexnej roviny úzko súvisí tzv. goniometrický (polárny) tvar komplexných čísiel. Každé nenulové komplexné číslo z je možné vyjadriť v tvare

$$z = |z|\,(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi), \tag{3}$$

kde φ je argument komplexného čísla z definovaný rovnicami

$$\cos\varphi = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|}, \quad \sin\varphi = \frac{\operatorname{Im} z}{|z|}. \tag{4}$$

Argument φ nie je určený jednoznačne (ak φ je argument z, potom i $\varphi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, je argument z). Množina všetkých argumentov daného komplexného čísla sa označuje $\operatorname{Arg} z$ (je to tzv. mnohoznačná funkcia premennej z). Symbol $\arg z$ bude označovať základný (hlavný) argument komplexného čísla z, t.j., argument spĺňajúci $-\pi \le \arg z < \pi$. Základný argument $\arg z$ je pre dané z určený jednoznačne. Platí

$$\operatorname{Arg} z = \{\arg z + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\}. \tag{5}$$

Posledná rovnosť sa často zapisuje i v tvare $\operatorname{Arg} z \equiv \arg z \pmod{2\pi}$.

Zavedenie goniometrického tvaru v (3) umožňuje efektívne násobiť a deliť komplexné čísla. Konkrétne, ak

$$z_1 = |z_1| (\cos \varphi_1 + \mathrm{i} \sin \varphi_1), \quad z_2 = |z_2| (\cos \varphi_2 + \mathrm{i} \sin \varphi_2)$$

sú dve komplexné čísla a φ_1 a φ_2 sú ich ľubovoľné argumenty, potom platí

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= |z_1||z_2| (\cos \varphi_1 + \mathrm{i} \sin \varphi_1) (\cos \varphi_2 + \mathrm{i} \sin \varphi_2) \\ &= |z_1||z_2| [(\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) \\ &\qquad + \mathrm{i}(\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2)] \\ &= |z_1||z_2| [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \mathrm{i} \sin(\varphi_1 + \varphi_2)]. \end{aligned} \tag{6}$$

Z rovnosti (6) potom vyplýva

$$\operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2 \quad \text{a} \quad \arg(z_1 z_2) \equiv \arg z_1 + \arg z_2 \pmod{2\pi}, \tag{7}$$

ako aj tzv. Moivreov vzorec na výpočet n-tej mocniny komplexného čísla z

$$z^n = |z|^n [\cos(n \arg z) + \mathrm{i} \sin(n \arg z)], \quad n \in \mathbb{N}. \tag{8}$$

Okrem toho z relácií (7) vyplýva

$$\operatorname{Arg}(z^n) = n \operatorname{Arg} z \quad \text{a} \quad \arg(z^n) \equiv n \arg z \pmod{2\pi}. \tag{9}$$

Podobne, pre podiel z_1/z_2, $z_2 \neq 0$, platí

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \frac{|z_1|}{|z_2|}\,\frac{\cos\varphi_1 + \mathrm{i}\sin\varphi_1}{\cos\varphi_2 + \mathrm{i}\sin\varphi_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\,\frac{\cos\varphi_1 + \mathrm{i}\sin\varphi_1}{\cos\varphi_2 + \mathrm{i}\sin\varphi_2}\,\frac{\cos\varphi_2 - \mathrm{i}\sin\varphi_2}{\cos\varphi_2 - \mathrm{i}\sin\varphi_2} \\ &= \frac{|z_1|}{|z_2|}\,\frac{\cos(\varphi_1-\varphi_2) + \mathrm{i}\sin(\varphi_1-\varphi_2)}{\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2} \\ &= \frac{|z_1|}{|z_2|}\,[\cos(\varphi_1-\varphi_2) + \mathrm{i}\sin(\varphi_1-\varphi_2)]. \qquad (10)\end{aligned}$$

Potom máme

$$\operatorname{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2, \quad \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) \equiv \arg z_1 - \arg z_2 \pmod{2\pi}. \qquad (11)$$

Pre každé $z \in \mathbb{C}$ a $n \in \mathbb{N}$ je n-tá odmocnina zo z definovaná ako

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left[\cos\left(\frac{\arg z + 2k\pi}{n}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\arg z + 2k\pi}{n}\right)\right], \qquad (12)$$

kde $k = 0, \ldots, n-1$. Pre pevné n sa teda jedná o mnohoznačnú funkciu (premennej z), pričom pre každé $z \in \mathbb{C}$ existuje práve n jeho n-tých odmocnín.

Výraz $\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi$, $\varphi\in\mathbb{R}$, sa obvykle označuje symbolom $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$, t.j.,

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} := \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi. \tag{13}$$

Pre každé $z\in\mathbb{C}$ potom platí

$$z = |z|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}, \quad \varphi\in\operatorname{Arg} z. \tag{14}$$

Zápis (14) sa nazýva exponenciálny tvar komplexného čísla z. Pre každé φ, φ_1, $\varphi_2\in\mathbb{R}$ platí

$$|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}| = 1, \quad \arg \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} \equiv \varphi \pmod{2\pi}, \quad \overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi} = 1/\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}, \tag{15}$$

$$\cos\varphi = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}}{2}, \quad \sin\varphi = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}}{2\mathrm{i}}, \tag{16}$$

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi_1+\varphi_2)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_2}, \quad \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi_1-\varphi_2)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_1}/\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_2}, \tag{17}$$

$$\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\right)^m = \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}, \quad m\in\mathbb{Z}. \tag{18}$$

Neskôr ukážeme, že výraz $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ zavedený v (13) je rozšírením exponenciálnej funkcie e^x do oboru komplexných čísiel.

Príklad 1

Dané komplexné číslo napíšte v goniometrickom tvare

$$1 + \mathrm{i}.$$

Pre komplexné číslo $z = 1 + \mathrm{i}$ platí

$$\operatorname{Re} z = 1, \quad \operatorname{Im} z = 1, \quad |z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

Ľubovoľný argument φ čísla z potom spĺňa rovnosti

$$\cos\varphi = \operatorname{Re} z/|z| = 1/\sqrt{2}, \quad \sin\varphi = \operatorname{Im} z/|z| = 1/\sqrt{2}.$$

Riešenie tejto sústavy je napr. $\varphi = 9\pi/4$. Potom platí

$$z = \sqrt{2}\,[\cos(9\pi/4) + \mathrm{i}\sin(9\pi/4)].$$

Základný argument čísla z je $\arg z = \pi/4$ a podobne platí

$$z = \sqrt{2}\,[\cos(\pi/4) + \mathrm{i}\sin(\pi/4)].$$

Príklad 2

Dané komplexné číslo napíšte v goniometrickom tvare

$$-2\sqrt{3} - 2\mathrm{i}.$$

Pre komplexné číslo $z = -2\sqrt{3} - 2\mathrm{i}$ platí

$$\operatorname{Re} z = -2\sqrt{3}, \quad \operatorname{Im} z = -2, \quad |z| = \sqrt{(-2\sqrt{3})^2 + (-2)^2} = 4.$$

Ľubovoľný argument φ čísla z spĺňa rovnosti

$$\cos\varphi = \operatorname{Re} z/|z| = -\sqrt{3}/2, \quad \sin\varphi = \operatorname{Im} z/|z| = -1/2.$$

Základný argument čísla z je $\arg z = -5\pi/6$ a platí

$$z = 4\left[\cos\left(-5\pi/6\right) + \mathrm{i}\sin\left(-5\pi/6\right)\right].$$

Príklad 3

Vypočítajte

$$(1+\mathrm{i}\sqrt{3})^{15}.$$

Použijeme Moivreov vzorec (8). Komplexné číslo $z = 1+\mathrm{i}\sqrt{3}$ prepíšeme do goniometrického tvaru. Platí $|z| = 2$, $\arg z = \pi/3$, a teda

$$z = 2\left[\cos(\pi/3) + \mathrm{i}\sin(\pi/3)\right].$$

Potom podľa (8) máme

$$z^{15} = 2^{15}\left[\cos(15\pi/3) + \mathrm{i}\sin(15\pi/3)\right] = 2^{15}\left[\cos(5\pi) + \mathrm{i}\sin(5\pi)\right] = -2^{15}.$$

Poznamenajme, že rovnaký výsledok by sme získali klasickým roznásobením podľa binomickej vety.

Príklad 4

Vypočítajme v $\mathbb{C}$

$$\sqrt[3]{-8}.$$

Podľa (12) existujú práve 3 komplexné tretie odmocniny z čísla $z = -8$. Goniometrický tvar čísla z je

$$z = 8\,[\cos(-\pi) + \mathrm{i}\sin(-\pi)].$$

Podľa (12) platí

$$\sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{8}\left[\cos\left(\frac{-\pi + 2k\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{-\pi + 2k\pi}{3}\right)\right],$$

pričom $k = 0, 1, 2$. Postupne dostávame

$$\begin{aligned}
k = 0 &\longrightarrow \sqrt[3]{8}\left[\cos\left(\frac{-\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{-\pi}{3}\right)\right] = 1 - \mathrm{i}\sqrt{3},\\
k = 1 &\longrightarrow \sqrt[3]{8}\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right] = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3},\\
k = 2 &\longrightarrow \sqrt[3]{8}\,(\cos\pi + \mathrm{i}\sin\pi) = -2.
\end{aligned}$$

Obsah

Postupnosti v $\mathbb{C}$

Nech $r \in \mathbb{R}^+$ a $z_0 \in \mathbb{C}$. Otvoreným kruhom $K(z_0, r)$ so stredom v bode z_0 a s polomerom r rozumieme množinu $K(z_0, r) := \{z \in \mathbb{C},\ |z - z_0| < r\}$. Množina $K(z_0, r)$ sa často označuje aj ako r-okolie bodu z_0. Ak $z_0 = \infty$, definujeme $K(\infty, r) := \{z \in \tilde{\mathbb{C}},\ |z| > 1/r\}$. Nech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť komplexných čísiel. Komplexné číslo $a_0 \in \tilde{\mathbb{C}}$ sa nazýva limitou postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, ak pre každé ε-okolie bodu a_0 existuje index $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tak, že $a_n \in K(a_0, \varepsilon)$ pre každý index $n \geq n_\varepsilon$. Potom píšeme $\lim_{n\to\infty} a_n = a_0$ alebo aj $a_n \to a_0$.

Veta 1

Nech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť v $\mathbb{C}$ a $a_0 \in \mathbb{C}$. Potom $a_n \to a_0$ práve vtedy, keď

$$\lim_{n\to\infty} |a_n - a_0| = 0 \iff \lim_{n\to\infty} \mathit{Re}\, a_n = \mathit{Re}\, a_0 \quad \& \quad \lim_{n\to\infty} \mathit{Im}\, a_n = \mathit{Im}\, a_0. \tag{19}$$

V tomto prípade platí i $\overline{a_n} \to \overline{a_0}$. Podobne, $a_n \to \infty$ práve vtedy, keď

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = \infty, \quad \textit{resp.}, \quad \lim_{n\to\infty} 1/|a_n| = 0. \tag{20}$$

Číselné rady v $\mathbb{C}$

Nech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť v $\mathbb{C}$. Postupnosť $\{s_k\}_{k=1}^{\infty}$ (tzv. postupnosť čiastočných súčtov) definovaná ako $s_k := \sum_{n=1}^{k} a_n$ sa nazýva nekonečný rad s členmi a_n a označuje sa $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, resp. $\sum a_n$. Rad $\sum a_n$ konverguje (resp., je konvergentný), ak existuje konečná limita postupnosti $\{s_k\}_{k=1}^{\infty}$. Túto limitu potom označujeme ako súčet s radu a píšeme $s = \sum a_n$. V opačnom prípade rad $\sum a_n$ diverguje (resp., je divergentný).

Veta 2

Nech $\sum a_n$, $\sum b_n$ sú konvergentné rady a $a, b \in \mathbb{C}$. Potom platí:

- $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ *(nutná podmienka konvergencie radu).*
- *Rad $\sum \overline{a_n}$ konverguje so súčtom $\sum \overline{a_n} = \overline{\sum a_n}$.*
- *Rad $\sum (aa_n + bb_n)$ konverguje a $\sum (aa_n + bb_n) = a\sum a_n + b\sum b_n$.*

Veta 3

Komplexný rad $\sum a_n$ konverguje práve vtedy, keď konverguje každý z reálnych radov $\sum \mathrm{Re}\, a_n$ a $\sum \mathrm{Im}\, a_n$, pričom platí $\sum a_n = \sum \mathrm{Re}\, a_n + i \sum \mathrm{Im}\, a_n$.

Komplexný rad $\sum a_n$ sa nazýva absolútne konvergentný, ak rad $\sum |a_n|$ je konvergentný. Každý absolútne konvergentný rad je i konvergentný a platí

$$\left|\sum a_n\right| \leq \sum |a_n|.$$

Ak $\sum a_n$ konverguje, ale rad $\sum |a_n|$ diverguje, potom hovoríme, že rad $\sum a_n$ konverguje neabsolútne (relatívne). Platia nasledujúce výsledky.

Veta 4

Komplexný rad $\sum a_n$ konverguje absolútne práve vtedy, keď každý z reálnych radov $\sum \mathrm{Re}\, a_n$ a $\sum \mathrm{Im}\, a_n$ konverguje absolútne.

Veta 5 (Riemannova veta o prerovnaní absolútne konvergentného radu)

Ak komplexný rad $\sum a_n$ konverguje absolútne, potom každé prerovnanie tohto radu konverguje absolútne s rovnakým súčtom, t.j., platí

$$\sum a_{\tau(n)} = \sum a_n$$

pre každú permutáciu τ množiny $\mathbb{N}$ (t.j., pre každú bijekciu $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$).

Pri vyšetrovaní (absolútnej) konvergencie komplexných radov môžeme aplikovať mnohé kritériá využívané v reálnej analýze.

- Porovnávacie kritérium – ak komplexný rad $\sum a_n$ spĺňa $|a_n| \leq b_n$ pre každé $n \in \mathbb{N}$, kde $\sum b_n$ je konvergentný reálny rad, potom rad $\sum a_n$ konverguje absolútne.
- D'Alembertovo podielové kritérium – ak komplexný rad $\sum a_n$ spĺňa $|a_{n+1}/a_n| \leq q < 1$ pre každé $n \in \mathbb{N}$, potom $\sum a_n$ konverguje absolútne. Ak $|a_{n+1}/a_n| \geq 1$ pre každé $n \in \mathbb{N}$, potom rad $\sum a_n$ diverguje. Obzvlášť, ak existuje $\lim_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n| = q \in \mathbb{R}^*$, potom pre $q < 1$ $(q > 1)$ rad $\sum a_n$ konverguje absolútne (diverguje).
- Cauchyho odmocninové kritérium – ak komplexný rad $\sum a_n$ spĺňa $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q < 1$ pre každé $n \in \mathbb{N}$, potom $\sum a_n$ konverguje absolútne. Ak $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$ pre každé $n \in \mathbb{N}$, potom rad $\sum a_n$ diverguje. Obzvlášť, ak existuje $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = q \in \mathbb{R}^*$, potom pre $q < 1$ $(q > 1)$ rad $\sum a_n$ konverguje absolútne (diverguje).
- Cauchyho integrálne kritérium – ak rad $\sum a_n$ spĺňa $|a_n| = f(n)$ pre každé $n \in \mathbb{N}$, kde $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ je nezáporná, nerastúca a spojitá funkcia, potom rad $\sum a_n$ konverguje absolútne práve vtedy, keď nevlastný integrál $\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje.

Príklad 5

Stanovme limitu
$$\lim_{n\to\infty} \frac{(1+\mathrm{i})^n}{n!}.$$
Nájdeme reálnu a imaginárnu časť príslušnej postupnosti. Podľa Príkladu 1 platí
$$\begin{aligned}\frac{(1+\mathrm{i})^n}{n!} &= \frac{\left(\sqrt{2}\left[\cos(\pi/4) + \mathrm{i}\sin(\pi/4)\right]\right)^n}{n!} \\ &= \frac{(\sqrt{2})^n \cos(\pi n/4)}{n!} + \mathrm{i}\,\frac{(\sqrt{2})^n \sin(\pi n/4)}{n!}.\end{aligned}$$
Teda máme
$$\mathrm{Re}\left(\frac{(1+\mathrm{i})^n}{n!}\right) = \frac{(\sqrt{2})^n \cos(\pi n/4)}{n!}, \quad \mathrm{Im}\left(\frac{(1+\mathrm{i})^n}{n!}\right) = \frac{(\sqrt{2})^n \sin(\pi n/4)}{n!}.$$
Keďže platí
$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Re}\left(\frac{(1+\mathrm{i})^n}{n!}\right) = 0 = \lim_{n\to\infty} \mathrm{Im}\left(\frac{(1+\mathrm{i})^n}{n!}\right),$$
podľa Vety 1 limita v zadaní príkladu existuje a je rovná $0 + \mathrm{i}0 = 0$.

Príklad 6

Dokážme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{i}^n}{n2^n} = 0.$$

Uvedený výsledok vyplýva z Vety 1, pretože platí

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\mathrm{i}^n}{n2^n} - 0 \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|\mathrm{i}|^n}{n2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n2^n} = 0.$$

Príklad 7

Nájdime limitu

$$\lim_{n\to\infty} n\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}n}.$$

Táto limita existuje a je nevlastná, pretože platí

$$\lim_{n\to\infty} \left| n\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}n} \right| = \lim_{n\to\infty} n \left| \mathrm{e}^{\mathrm{i}n} \right| = \lim_{n\to\infty} n = \infty.$$

Pri výpočte sme využili prvú rovnosť v (15), t.j., $\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}n}\right| = 1$. Podľa Vety 1 potom

$$\lim_{n\to\infty} n\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}n} = \infty.$$

Príklad 8

Nájdime súčet radu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \mathsf{i}\,(-1)^{n-1} n}{n^2}.$$

V danom rade oddelíme jeho reálnu a imaginárnu časť. Dostaneme

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1 + \mathsf{i}\,(-1)^{n-1} n}{n^2}\right) = \frac{1}{n^2}, \quad \operatorname{Im}\left(\frac{1 + \mathsf{i}\,(-1)^{n-1} n}{n^2}\right) = \frac{(-1)^{n-1}}{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Keďže z reálnej analýzy máme

$$\sum 1/n^2 = \pi^2/6, \quad \sum (-1)^{n-1}/n = \ln 2,$$

podľa Vety 3 konverguje i rad v zadaní príkladu a platí

$$\sum \frac{1 + \mathsf{i}\,(-1)^{n-1} n}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} + \mathsf{i} \ln 2.$$

Príklad 9

Vyšetrime konvergenciu radu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{i}^n}{n}.$$

Oddelením reálnej a imaginárnej časti daného radu dostaneme

$$\mathrm{Re}\left(\frac{\mathrm{i}^n}{n}\right) = \begin{cases} (-1)^k/(2k), & n = 2k, \\ 0, & n = 2k-1, \end{cases}$$

$$\mathrm{Im}\left(\frac{\mathrm{i}^n}{n}\right) = \begin{cases} 0, & n = 2k, \\ (-1)^{k-1}/(2k-1), & n = 2k-1. \end{cases}$$

Obidva reálne rady $\sum$ Re a $\sum$ Im konvergujú (podľa Leibnizovho kritéria), a preto podľa Vety 3 konverguje i rad v zadaní príkladu.

Príklad 10

Vyšetrime konvergenciu radov

$$\text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(1+\mathrm{i})^n}{3^n}, \quad \text{b)} \sum_{n=1}^{\infty} a^n, \quad a \in \mathbb{C}.$$

a) Rad konverguje absolútne podľa D'Alembertovho kritéria, nakoľko

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(n+1)(1+\mathrm{i})^{n+1}}{3^{n+1}}}{\frac{n(1+\mathrm{i})^n}{3^n}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)(1+\mathrm{i})}{3n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\sqrt{2}}{3n} = \frac{\sqrt{2}}{3} < 1.$$

b) Aplikovaním Cauchyho odmocninového kritéria dostaneme

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a^n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a|^n} = \lim_{n\to\infty} |a| = |a|.$$

Pre $|a| < 1$ daný rad konverguje absolútne, pre $|a| > 1$ rad diverguje. V prípade $|a| = 1$ rad diverguje, pretože nie je splnená nutná podmienka konvergencie vo Vete 2 ($\lim_{n\to\infty} a^n \neq 0$, resp. neexistuje).

Funkcie v $\mathbb{C}$

Nech $\mathcal{D}$ je podmnožina v $\tilde{\mathbb{C}}$. Pod pojmom (komplexná) funkcia (komplexnej premennej) f budeme rozumieť priradenie, ktoré každému číslu $z \in \mathcal{D}$ priradí jednu alebo viac hodnôt $w \in \tilde{\mathbb{C}}$. Množina $\mathcal{D}$ sa nazýva definičný obor funkcie f a označuje sa $\mathcal{D}(f)$. Množina

$$\mathcal{H}(f) := \{w \in \tilde{\mathbb{C}},\ w = f(z),\ z \in \mathcal{D}(f)\}$$

sa nazýva obor hodnôt funkcie f. Ak je každému $z \in \mathcal{D}(f)$ priradená práve jedna hodnota $w = f(z) \in \mathcal{H}(f)$, potom hovoríme o jednoznačnej funkcii f. V opačnom prípade funkciu f označujeme ako mnohoznačnú. Vhodným zúžením oboru hodnôt $\mathcal{H}(f)$ mnohoznačnej funkcie f dostaneme jednoznačnú funkciu – tzv. jednoznačnú vetvu komplexnej funkcie f. Vo všeobecnosti teda komplexná funkcia komplexnej premennej nie je zobrazenie, pričom symbol $f(z)$ znamená podmnožinu v $\mathcal{H}(f)$. Inverznou funkciou k funkcii $f\ :\ w = f(z),\ z \in \mathcal{D}(f)$, rozumieme funkciu $f^{-1}\colon\ z = f^{-1}(w)$, ktorá každému $w \in \mathcal{H}(f)$ priradí práve tie $z \in \mathcal{D}(f)$, pre ktoré $w = f(z)$. Zrejme $\mathcal{D}(f^{-1}) = \mathcal{H}(f)$ a $\mathcal{H}(f^{-1}) = \mathcal{D}(f)$. Okrem toho, $f(f^{-1}(w)) = w$, pre každé $w \in \mathcal{H}(f)$, avšak neplatí všeobecne $f^{-1}(f(z)) = z$, pre $z \in \mathcal{D}(f)$. Inverzná funkcia f^{-1} môže byť jednoznačná i mnohoznačná.

Nech f je funkcia. Ak $\mathcal{D}(f) \subseteq \mathbb{R}$, jedná sa o funkciu reálnej premennej, inak hovoríme o funkcii komplexnej premennej. V prípade $\mathcal{H}(f) \subseteq \mathbb{R}$ máme reálnu funkciu, inak (t.j., pre $\mathcal{H}(f) \subseteq \tilde{\mathbb{C}}$) máme komplexnú funkciu. Ak platí dokonca $\mathcal{H}(f) \subseteq \mathbb{C}$, potom hovoríme o konečnej (komplexnej) funkcii.
Nech f je konečná funkcia komplexnej premennej. Potom existujú jediné reálne funkcie $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ také, že pre každé $z = x + \mathrm{i}y \in \mathcal{D}(f) \cap \mathbb{C}$ platí

$$f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}\, v(x, y). \tag{21}$$

Funkcie u a v sa nazývajú reálna a imaginárna časť funkcie f, t.j.,

$$u(x, y) = \mathrm{Re}\, f(z), \quad v(x, y) = \mathrm{Im}\, f(z). \tag{22}$$

Funkcia $\bar{f}$ definovaná $\bar{f}(z) := \overline{f(z)}$, $z \in \mathcal{D}(f)$, sa nazýva funkcia komplexne združená s f. Zrejme potom platí $\bar{f}(z) = u(x, y) - \mathrm{i}\, v(x, y)$ a

$$\mathrm{Re}\, f(z) = \frac{f(z) + \bar{f}(z)}{2}, \quad \mathrm{Im}\, f(z) = \frac{f(z) - \bar{f}(z)}{2\mathrm{i}}, \quad z \in \mathcal{D}(f). \tag{23}$$

Limitu a spojitosť komplexnej funkcie f komplexnej premennej definujeme podobným spôsobom ako v reálnej analýze. Nech $M \subseteq \tilde{\mathbb{C}}$ a z_0 je hromadný bod množiny M. Číslo $w_0 \in \tilde{\mathbb{C}}$ nazývame limitou funkcie f v bode z_0 vzhľadom na množinu M a píšeme

$$\lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in M}} f(z) = w_0,$$

ak pre každé okolie $\mathcal{O}(w_0)$ bodu w_0 existuje rýdze okolie $\mathcal{O}^*(z_0)$ bodu z_0 také, že pre každé $z \in \mathcal{O}^*(z_0) \cap M$ platí $f(z) \in \mathcal{O}(w_0)$. V prípade $M = \mathcal{D}(f)$ dostávame limitu funkcie f v tradičnom slova zmysle, t.j.,

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in \mathcal{D}(f)}} f(z) = w_0.$$

Okrem toho platia relácie

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0 \iff \lim_{z \to z_0} \operatorname{Re} f(z) = \operatorname{Re} w_0, \quad \lim_{z \to z_0} \operatorname{Im} f(z) = \operatorname{Im} w_0, \tag{24}$$

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0 \iff \lim_{z \to z_0} \bar{f}(z) = \overline{w_0}. \tag{25}$$

Funkcia f je spojitá v bode $z_0 \in \mathcal{D}(f)$, ak $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$. Pre spojitosť funkcie potom platia výsledky analogické s (24) a (25).

Príklad 11

Príkladom reálnych funkcií komplexnej premennej sú funkcie

$$w = \operatorname{Re} z, \quad w = |z|, \quad w = \arg z.$$

Jedná sa o jednoznačné funkcie. Funkcia $w = z^n$, pre $n \in \mathbb{N}$ pevné, je komplexná funkcia komplexnej premennej, kým funkcia $w = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$, $\varphi \in \mathbb{R}$, je komplexná funkcia reálnej premennej φ. Ďalej, funkcie

$$w = \operatorname{Arg} z, \quad w = \sqrt[n]{z}, \quad n \in \mathbb{N} \text{ pevné},$$

sú príkladmi mnohoznačných komplexných funkcií komplexnej premennej. Prvá z nich je nekonečne-značná, druhá je n-značná. Zúžením oboru hodnôt prvej z nich dostaneme napríklad už zmienenú jednoznačnú funkciu $\tilde{w} = \arg z$. Jednoznačnou vetvou druhej funkcie je napríklad funkcia (porovnaj s (12))

$$\tilde{w} = \sqrt[n]{|z|} \left(\cos \frac{\arg z}{n} + \mathrm{i} \sin \frac{\arg z}{n} \right).$$

Príklad 12

Stanovme limitu
$$\lim_{z\to 0}\frac{\operatorname{Re} z}{z}.$$
V limitovanej funkcii oddelíme jej reálnu a imaginárnu časť. Poznamenajme, že konvergencia $z = x + \mathrm{i}y \to 0$ je ekvivalentná s $x \to 0$ & $y \to 0$. Platí

$$\begin{aligned}\lim_{z\to 0}\frac{\operatorname{Re} z}{z} &= \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x}{x+\mathrm{i}y} = \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x}{x+\mathrm{i}y}\,\frac{x-\mathrm{i}y}{x-\mathrm{i}y}\\ &= \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x(x-\mathrm{i}y)}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(\frac{x^2}{x^2+y^2} - \mathrm{i}\,\frac{xy}{x^2+y^2}\right).\end{aligned}$$

Z reálnej analýzy funkcií dvoch premenných vieme ľahko ukázať, že limity

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2}{x^2+y^2}, \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}$$

neexistujú. Podľa (24) potom neexistuje ani limita v zadaní príkladu.

Príklad 13

Vypočítajme limitu
$$\lim_{z\to 0} \frac{z \operatorname{Re} z}{|z|}.$$
V limitovanej funkcii oddelíme jej reálnu a imaginárnu časť. Dostaneme
$$\lim_{z\to 0} \frac{z \operatorname{Re} z}{|z|} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+\mathrm{i}y)x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} + \mathrm{i}\, \frac{yx}{\sqrt{x^2+y^2}} \right).$$
V tomto prípade platí
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{yx}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$
Preto podľa (24) limita v zadaní príkladu má hodnotu $0+\mathrm{i}0 = 0$.

Príklad 14

Zistime limitu

$$\lim_{z\to \mathrm{i}} \frac{z^2+1}{z-\mathrm{i}}.$$

V limitovanej funkcii vykonáme algebraické úpravy (rozklad čitateľa na súčin)

$$\lim_{z\to \mathrm{i}} \frac{z^2+1}{z-\mathrm{i}} = \lim_{z\to \mathrm{i}} \frac{(z+\mathrm{i})(z-\mathrm{i})}{z-\mathrm{i}} = \lim_{z\to \mathrm{i}} (z+\mathrm{i}) = 2\mathrm{i}.$$

Príklad 15

Rozhodnime o existencii limity

$$\lim_{z\to 0} \frac{\bar{z}}{z}.$$

Dokážeme, že uvedená limita neexistuje. Nech z sa blíži k bodu $0 = 0 + \mathrm{i}0$ po reálnej osi, t.j., $z = x \in \mathbb{R}$. Potom $\bar{z}/z = \bar{x}/x = x/x = 1$, a v tomto prípade $\lim_{z\to 0} \bar{z}/z = 1$. Ak z sa bude k 0 blížiť po imaginárnej osi, t.j., $z = \mathrm{i}y \in \mathrm{i}\,\mathbb{R}$, potom platí $\bar{z}/z = -\mathrm{i}y/\mathrm{i}y = -1$, a v tomto prípade $\lim_{z\to 0} \bar{z}/z = -1$. Pri pohybe po dvoch rôznych cestách do bodu 0 sme dostali dve rôzne hodnoty limity. Preto daná limita neexistuje.

Obsah

Derivácia komplexnej funkcie

Definícia 1 (Komplexná diferencovateľnosť)

Nech G je otvorená podmnožina v $\mathbb{C}$ a f je konečná funkcia definovaná na G. Hovoríme, že f je komplexne diferencovateľná (monogénna) v bode $z_0 \in G$, ak existuje konečná limita

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \quad \left(\text{resp. } \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \in \mathbb{C}}} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} \right). \tag{26}$$

Limita v (26) sa nazýva derivácia funkcie f v bode z_0 a označuje sa $f'(z_0)$, resp. $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}(z_0)$.

V komplexnej analýze sa teda nedefinuje nevlastná derivácia a derivácia v bode ∞. Z Definície 1 vyplýva, že funkcia $f : G \to \mathbb{C}$ je komplexne diferencovateľná v bode $z_0 \in G$ práve vtedy, keď existuje komplexné číslo a s vlastnosťou

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h \in \mathbb{C}}} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0) - ah}{h} = 0. \tag{27}$$

V tomto prípade $a = f'(z_0)$. Výraz ah sa nazýva diferenciál funkcie f v bode z_0 a označuje sa $\mathrm{d}f(z_0)$, resp. $\mathrm{d}f(z_0)(h)$.

Komplexná derivácia má podobné základné vlastnosti ako derivácia v reálnom obore. Vo všeobecnosti je však komplexná diferencovateľnosť podstatne silnejší koncept než reálna diferencovateľnosť.

Veta 6

Ak funkcia f je komplexne diferencovateľná v bode $z_0 \in \mathbb{C}$, potom je v bode z_0 spojitá.

Dôkaz.

Výsledok vyplýva z Definície 1 a z nasledujúceho výpočtu

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0}\left(\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}(z-z_0)+f(z_0)\right) = f'(z_0)\cdot 0+f(z_0) = f(z_0).$$

∎

Poznámka 2

Poznamenajme, že podobne ako v reálnom obore spojitosť funkcie nezaručuje komplexnú diferencovateľnosť funkcie. Túto skutočnosť ilustruje Príklad 17.

Veta 7 (Základné vlastnosti)

(i) *Ak funkcie* f, g *sú komplexne diferencovateľné v bode* $z_0 \in \mathbb{C}$, *potom aj funkcie* $f \pm g$, $f \cdot g$ *a* f/g *(ak* $g(z_0) \neq 0$*) sú komplexne diferencovateľné v bode* z_0 *a platí*

$$(f \pm g)'(z_0) = f'(z_0) \pm g'(z_0),$$

$$(f \cdot g)'(z_0) = f'(z_0)\, g(z_0) + f(z_0)\, g'(z_0),$$

$$(f/g)'(z_0) = \left[f'(z_0)\, g(z_0) - f(z_0)\, g'(z_0)\right] / [g(z_0)]^2.$$

(ii) *Ak funkcia* f *je komplexne diferencovateľná v bode* $z_0 \in \mathbb{C}$ *a funkcia* g *je komplexne diferencovateľná v bode* $f(z_0)$, *potom aj zložená funkcia* $g \circ f$ *je komplexne diferencovateľná v* z_0 *a platí* $(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0))\, f'(z_0)$.

(iii) *Ak funkcia* f *je komplexne diferencovateľná v bode* $z_0 \in \mathbb{C}$ *a prostá na okolí bodu* z_0, *potom inverzná funkcia* f^{-1} *je komplexne diferencovateľná v bode* $w_0 = f(z_0)$ *a platí*

$$\left(f^{-1}\right)'(w_0) = 1/f'(z_0).$$

V nasledujúcom budeme pracovať s algebraickým tvarom komplexných čísiel a funkcií, t.j., podľa (21) pre dané $z \in \mathbb{C}$ a danú komplexnú funkciu f máme

$$z = x + \mathrm{i}y \quad \text{a} \quad f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y) \quad \text{pre } x, y \in \mathbb{R}. \tag{28}$$

Pripomeňme, že jednoznačne určené reálne funkcie u, v sú podľa (22) reálnou a imaginárnou časťou funkcie f.

Veta 8 (Nutná podmienka komplexnej diferencovateľnosti)

Nech funkcia f je komplexne diferencovateľná v bode $z_0 = x_0 + iy_0$. Potom funkcie u, v v (28) spĺňajú tzv. Cauchyho–Riemannove rovnice (podmienky)

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0). \tag{29}$$

Pre deriváciu $f'(z_0)$ potom platí

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\,\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i\,\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0). \tag{30}$$

Náčrt dôkazu.

Ak f je komplexne diferencovateľná v bode z_0, potom podľa Definície 1 je f definovaná na nejakom okolí bodu z_0 a existuje limita v (26). Hodnota tejto limity nezávisí na ceste, po ktorej sa s premenlivým bodom z blížime do bodu z_0. Uvažujme napríklad $z = x + \mathrm{i}y_0$, kde $x \in \mathbb{R}$ a $x \to x_0$. Do $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0$ sa teda blížime po priamke $y = y_0$. Platí potom

$$f'(z_0) = \lim_{\substack{z=x+\mathrm{i}y_0 \\ x\to x_0}} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x+\mathrm{i}y_0) - f(x_0+\mathrm{i}y_0)}{x - x_0}.$$

Pomocou funkcií u, v sa posledná limita dá rozpísať do tvaru

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{x\to x_0} \frac{u(x,y_0) + \mathrm{i}v(x,y_0) - u(x_0,y_0) - \mathrm{i}v(x_0,y_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x\to x_0} \left(\frac{u(x,y_0) - u(x_0,y_0)}{x - x_0} + \mathrm{i}\, \frac{v(x,y_0) - v(x_0,y_0)}{x - x_0} \right). \end{aligned}$$

Limitovaním posledného výrazu dostaneme prvú rovnosť v (30). Podobným spôsobom odvodíme i druhé vyjadrenie derivácie $f'(z_0)$ v (30), kde uvažujeme $z = x_0 + \mathrm{i}y$ s $y \in \mathbb{R}$ a $y \to y_0$ (priamka $x = x_0$). Porovnaním reálnych a imaginárnych častí vyjadrení v (30) dostaneme rovnosti (29). ∎

Poznámka 3

Z Vety 8 vyplýva, že nutnými podmienkami existencie komplexnej derivácie $f'(z_0)$ je existencia prvých parciálnych derivácií reálnych funkcií u, v v bode $[x_0, y_0]$ a platnosť Cauchyho–Riemannovych podmienok (29) v bode $[x_0, y_0]$. Ako však ukazuje nasledujúca veta, nie sú to zároveň aj postačujúce podmienky.

Veta 9 (Nutná a postačujúca podmienka komplexnej diferencovateľnosti)

Funkcia f je komplexne diferencovateľná v bode $z_0 \in \mathbb{C}$ práve vtedy, keď reálne funkcie u, v v (28) sú diferencovateľné v $[x_0, y_0]$ a platia rovnice v (29).

Nech $G \subseteq \mathbb{C}$ je otvorená množina. Hovoríme, že komplexná funkcia f je komplexne diferencovateľná na G, ak $f'(z)$ existuje v každom bode $z \in G$. Z Vety 9 vyplýva, že ak funkcie u, v v (28) majú spojité I. parciálne derivácie na G a spĺňajú podmienky (29) na G, potom f je komplexne diferencovateľná v G.

Cauchyho–Riemannove podmienky (29) výrazne obmedzujú triedu reálnych diferencovateľných funkcií u, v, ktoré môžu byť reálnymi, resp. imaginárnymi časťami komplexne diferencovateľných funkcií. Ak totiž funkcia $f = u + iv$ je komplexne diferencovateľná v otvorenej množine $G \subseteq \mathbb{C}$ a funkcie u, v majú naviac spojité i druhé parciálne derivácie na G, potom u, v sú riešeniami tzv. Laplaceovej rovnice na G, t.j., platí

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \quad \text{na } G. \tag{31}$$

Riešenia Laplaceovej rovnice sa označujú ako harmonické funkcie. Reálne a imaginárne časti komplexne diferencovateľných funkcií v G musia preto byť nutne harmonickými funkciami v G. Neskôr ukážeme, že požiadavka existencie a spojitosti druhých (dokonca i všetkých vyšších) parciálnych derivácií funkcií u, v na G je prekvapivo prirodzene zabudovaná v koncepte komplexnej derivácie funkcie f na množine G.

Veta 10

Nech $G \subseteq \mathbb{C}$ je jednoducho súvislá oblasť. Potom ku každej harmonickej funkcii u (resp. v) na G existuje funkcia f komplexne diferencovateľná na G tak, že $u = \mathrm{Re}\, f$ (resp. $v = \mathrm{Im}\, f$) na G.

Príklad 16

Dokážme, že pre každé pevné $n \in \mathbb{N}$ platí

$$(z^n)' = nz^{n-1}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Označme $f(z) = z^n$ a nech $z_0 \in \mathbb{C}$ je zafixované. Podľa Definície 1 máme

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{z \to z_0} \frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \left(z^{n-1} + z^{n-2} z_0 + \cdots + z z_0^{n-2} + z_0^{n-1}\right) \\ &= n z_0^{n-1}. \end{aligned}$$

Príklad 17

Funkcia $f(z) = \bar{z} = x - iy$ je síce spojitá v celej komplexnej rovine, ale nie je nikde v $\mathbb{C}$ komplexne diferencovateľná, pretože limita

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h \in \mathbb{C}}} \frac{\overline{z_0 + h} - \overline{z_0}}{h} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \in \mathbb{C}}} \frac{\overline{z_0} + \bar{h} - \overline{z_0}}{h} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \in \mathbb{C}}} \frac{\bar{h}}{h}$$

neexistuje pre žiadne $z_0 \in \mathbb{C}$ (porovnaj s Príkladom 15).

Príklad 18

Rozhodnime o existencii derivácie funkcie (ako funkcie v $\mathbb{C}$)

$$f(z) = 1/z$$

overením Cauchyho–Riemannovych rovností (29). Zrejme $\mathcal{D}(f) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Oddelíme reálnu a imaginárnu časť funkcie f

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x+\mathrm{i}y} = \frac{x-\mathrm{i}y}{(x+\mathrm{i}y)(x-\mathrm{i}y)} = \frac{x}{x^2+y^2} + \mathrm{i}\,\frac{-y}{x^2+y^2}.$$

Platí $u(x,y) = x/(x^2+y^2)$, $v(x,y) = -y/(x^2+y^2)$, a ďalej

$$u'_x = (y^2-x^2)/(x^2+y^2)^2, \qquad u'_y = (-2xy)/(x^2+y^2)^2,$$
$$v'_x = (2xy)/(x^2+y^2)^2, \qquad v'_y = (y^2-x^2)/(x^2+y^2)^2,$$

Funkcie u, v sú diferencovateľné na $\mathcal{D}(f)$ a platia rovnosti (29) na $\mathcal{D}(f)$. Teda podľa Vety 9 funkcia f je komplexne diferencovateľná na $\mathcal{D}(f)$ a platí

$$\left(\frac{1}{z}\right)' = u'_x + \mathrm{i}v'_x = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} + \mathrm{i}\,\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{(x-\mathrm{i}y)^2}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{(\bar{z})^2}{|z|^4} = -\frac{1}{z^2}.$$

Príklad 19

Určme komplexne diferencovateľnú funkciu f, ktorá spĺňa

$$\mathrm{Re}\, f(z) = x^3 - 3xy^2 + 3x^2 - 3y^2 + 1, \quad f(0) = 1.$$

Funkcia $u(x,y) = x^3 - 3xy^2 + 3x^2 - 3y^2 + 1$ je harmonická v $\mathbb{C}$, nakoľko

$$\begin{gathered} u'_x = 3x^2 - 3y^2 + 6x, \quad u''_{xx} = 6x + 6, \\ u'_y = -6xy - 6y, \quad u''_{yy} = -6x - 6, \\ \Downarrow \\ u''_{xx} + u''_{yy} = 0 \quad \text{v } \mathbb{R}^2. \end{gathered}$$

Podľa Vety 10 je funkcia u reálnou časťou istej funkcie f, ktorá je komplexne diferencovateľná na $\mathbb{C}$. Jej imaginárnu časť v určíme z podmienok (29)

$$v'_x = -u'_y = 6xy + 6y, \quad v'_y = u'_x = 3x^2 - 3y^2 + 6x.$$

Máme teda určiť kmeňovú funkciu v pre dvojicu $6xy + 6y$ a $3x^2 - 3y^2 + 6x$.

Príklad 19

Postupujúc štandardným spôsobom, dostaneme

$$v(x,y) = -y^3 + 3x^2y + 6xy + K, \quad K \in \mathbb{R}.$$

Keďže $f(0) = 1$, platí $v(0,0) = \operatorname{Im} f(0) = 0$, a teda $K = 0$. Funkcia f má tvar

$$f(z) = x^3 - 3xy^2 + 3x^2 - 3y^2 + 1 + \mathrm{i}\,(-y^3 + 3x^2y + 6xy).$$

Nakoniec, ak dosadeníme za reálne premenné x, y výrazy

$$x = (z + \bar{z})/2, \quad y = (z - \bar{z})/2\mathrm{i},$$

dostaneme vyjadrenie hodnoty $f(z)$ pomocou komplexnej premennej z. Po úpravách získame finálny predpis

$$f(z) = z^3 + 3z^2 + 1.$$

Holomorfné funkcie

Definícia 2 (Holomorfná funkcia)

Hovoríme, že funkcia f je holomorfná (analytická, regulárna) v bode $z_0 \in \mathbb{C}$, ak f má deriváciu na nejakom okolí bodu z_0. Funkcia f je holomorfná na množine $G \subseteq \mathbb{C}$, ak je holomorfná v každom bode $z \in G$.

Pojem holomorfnosti funkcie (na rozdiel od komplexnej diferencovateľnosti) je možné zaviesť i pre nevlastný bod ∞. Konkétne, funkcia $f(z)$ sa označuje ako holomorfná v bode ∞, ak funkcia $f(1/z)$ je holomorfná v bode $z_0 = 0$.

Príklad 20

Z predchádzajúcich príkladov (Príklady 16, 17 a 18) vyplýva, že funkcia $f(z) = z^n$ je holomorfná v celej komplexnej rovine, funkcia $g(z) = \bar{z}$ nie je holomorfná v žiadnom bode z $\tilde{\mathbb{C}}$ a funkcia $h(z) = 1/z$ je holomorfná na $\tilde{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$.

Príklad 21

Funkcia $f(z) = |z|^2$ nie je holomorfná v žiadnom bode z $\tilde{\mathbb{C}}$, hoci je komplexne diferencovateľná v bode $z_0 = 0$, ako sa možno ľahko presvedčiť.

Veta 11

Nech $G \subseteq \mathbb{C}$ je oblasť. Funkcia $f : G \to \mathbb{C}$ je konštantná na G práve vtedy, keď je holomorfná na G a $f'(z) = 0$ pre každé $z \in G$.

Dôkaz.

Implikácia "$\Rightarrow$" vyplýva priamo z Definícií 1 a 2. Naopak, nech f je holomorfná na G s $f'(z) = 0$ pre každé $z \in G$. Funkcie u, v z (28) podľa (30) spĺňajú

$$u'_x(x,y) = 0 = v'_x(x,y), \quad v'_y(x,y) = 0 = -u'_y(x,y) \quad \text{pre každé } [x,y] \in G,$$

z čoho vyplýva, že funkcie u, v sú konštantné na oblasti G. To znamená, že i funkcia $f = u + \mathrm{i}v$ je konštantná na G. ■

Dôsledok 1

Nech f, g sú funkcie holomorfné na oblasti $G \subseteq \mathbb{C}$. Potom platia tvrdenia.

(i) *Rovnosť $f' \equiv g'$ platí na G práve vtedy, keď $f \equiv g + K$ na G, kde K je (komplexná) konštanta.*

(ii) *Funkcia f je polynóm stupňa menšieho ako n na G práve vtedy, keď $f^{(n)} \equiv 0$ na G.*

Komplexné funkcionálne rady

Nech $G \subseteq \mathbb{C}$ je neprázdna množina a nech $\{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť funkcií definovaných na G. Postupnosť čiastočných súčtov $\{s_k(z)\}_{k=1}^{\infty}$ definovaná

$$s_k(z) := \sum_{n=1}^{k} f_n(z), \quad z \in G, \quad k \in \mathbb{N},$$

sa nazýva (nekonečný) funkcionálny rad s členmi f_n a označuje sa $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$, resp. $\sum f_n(z)$. Rozlišujeme dva typy konvergencie funkcionálnych postupností a radov.

- Bodová konvergencia na G – pre každé $z_0 \in G$ je číselná postupnosť $\{f_n(z_0)\}$ (číselný rad $\sum f_n(z_0)$) konvergentná(ý). Funkcia f s vlastnosťou

  $$f(z) = \lim_{n\to\infty} f_n(z) \quad \Big(f(z) = \sum f_n(z)\Big) \quad \text{pre každé } z \in G,$$

  sa nazýva limitná funkcia postupnosti (súčet radu). Symbolicky značíme

  $$f_n \to f \quad \Big(\sum f_n \to f\Big) \quad \text{na } G.$$

- Rovnomerná konvergencia na G – zhruba povedané, konvergencia k limitnej funkcii (k súčtu) nezávisí na premennej z. Presnejšie, ak f je limitná funkcia postupnosti $\{f_n\}$, potom pre každé $\varepsilon > 0$ existuje index $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tak, že

$$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon \quad \text{pre každé } n \geq n_\varepsilon \text{ a pre každé } z \in G.$$

Rad $\sum f_n(z)$ konverguje rovnomerne k súčtu f na G, ak jeho príslušná postupnosť čiastočných súčtov $\{s_k\}$ konverguje rovnomerne k f na G. Symbolicky zapisujeme $f_n \rightrightarrows f$ ($\sum f_n \rightrightarrows f$) na G.

Veta 12 (Cauchyho–Bolzanove kritériá rovnomernej konvergencie)

Postupnosť $\{f_n\}$ konverguje rovnomerne na G práve vtedy, keď pre každé $\varepsilon > 0$ existuje index $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tak, že

$$|f_n(z) - f_m(z)| < \varepsilon \quad \textit{pre každé } n, m \geq n_\varepsilon \textit{ a pre každé } z \in G.$$

Rad $\sum f_n$ konverguje rovnomerne na G práve vtedy, keď pre každé $\varepsilon > 0$ existuje index $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tak, že

$$\left|\sum_{k=n}^{m+n} f_k(z)\right| < \varepsilon \quad \textit{pre každé } n \geq n_\varepsilon,\ m \in \mathbb{N}, \textit{ a pre každé } z \in G.$$

Cauchyho–Bolzanove kritéria udávajú nutné a zároveň postačujúce podmienky rovnomernej konvergencie postupnosti (radu) funkcií. Pre praktické výpočty sa však s výhodu využíva nasledujúce postačujúce kritérium.

Veta 13 (Weierstrassovo kritérium rovnomernej konvergencie)

Ak pre rad $\sum f_n$ existuje konvergentný reálny číselný rad $\sum \alpha_n$ s vlastnosťou

$$|f_n(z)| \le \alpha_n \quad \text{pre každé } n \in \mathbb{N} \text{ a pre každé } z \in G,$$

potom rad $\sum f_n$ konverguje rovnomerne na množine G.

Reálny číselný rad $\sum \alpha_n$ vo Vete 13 sa nazýva majorantný rad (majoranta) pre funkcionálny rad $\sum f_n$.

Veta 14

Nech $\{f_n\}$ je postupnosť funkcií spojitých na množine $G \subseteq \mathbb{C}$. Ak rad $\sum f_n$ konverguje rovnomerne na G k súčtu f, potom funkcia f je spojitá na G.

Mocninové rady

Dôležitým typom funkcionálnych radov sú tzv. mocninové rady, t.j., rady tvaru

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \tag{32}$$

kde $z_0, a_n \in \mathbb{C}$ pre každé $n \in \mathbb{N}_0$. Číslo z_0 sa nazýva stred mocninového radu (32) a čísla a_n jeho koeficienty. Množina všetkých komplexných čísiel z, pre ktoré rad (32) konverguje, sa nazýva obor konvergencie mocninového radu. Je zrejme, že obor konvergencie ľubovoľného mocninového radu je vždy neprázdna podmnožina v $\mathbb{C}$ (rad (32) vždy konverguje vo svojom strede z_0). Nasledujúce dve vety popisujú štruktúru oboru konvergencie mocninových radov.

Veta 15 (Abelova veta)

Ak mocninový rad (32) konverguje v istom komplexnom čísle $z_1 \neq z_0$, potom konverguje absolútne v každom $z \in \mathbb{C}$ spĺňajúcom

$$|z - z_0| < |z_1 - z_0|.$$

Veta 16 (Cauchyho–Hadamardova veta)

Pre rad (32) definujme nezáporné reálne číslo R predpisom

$$R := 1/\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}. \tag{33}$$

Potom platia nasledujúce tvrdenia.

(i) *Ak $R = 0$, potom rad (32) konverguje iba vo svojom strede z_0 (teda diverguje na $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$).*

(ii) *Ak $R = \infty$, potom rad (32) konverguje absolútne v každom $z \in \mathbb{C}$.*

(iii) *Ak $0 < R < \infty$, potom rad (32) konverguje absolútne pre každé $z \in \mathbb{C}$ spĺňajúce $|z - z_0| < R$ a diverguje pre každé $z \in \mathbb{C}$ spĺňajúce $|z - z_0| > R$.*

Číslo R v (33) sa nazýva polomer konvergencie mocninového radu (32). Pre R kladné a konečné sa množina

$$\{z \in \mathbb{C},\ |z - z_0| < R\} \tag{34}$$

označuje ako konvergenčný kruh radu (33). Rad (33) konverguje absolútne vo svojom konvergenčnom kruhu. Naviac, može konvergovať v niektorých bodoch tzv. konvergenčnej kružnice $|z - z_0| = R$.

Poznámka 4

Ak existuje $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, potom polomer konvergencie R radu (32) spĺňa

$$R = 1/\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}. \tag{35}$$

Ak naviac existuje i $\lim_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n|$, potom polomer konvergencie R je možné vyjadriť aj v tvare

$$R = 1/\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|. \tag{36}$$

Identita (36) vyplýva z nerovností

$$\liminf_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|.$$

Veta 17

Rad (32) s kladným polomerom konvergencie konverguje absolútne vo svojom konvergenčnom kruhu. Naviac, rad (32) konverguje rovnomerne na každej kompaktnej podmnožine svojho konvergenčného kruhu.

Veta 18

Nech mocninový rad (32) má kladný polomer konvergencie R a nech f značí súčet radu (32), t.j.,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad |z - z_0| < R.$$

Potom funkcia f je spojitá a holomorfná v konvergenčnom kruhu radu (32) a

$$f'(z) = a_1 + 2a_2(z - z_0) + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} (z - z_0)^n \qquad (37)$$

pre každé $z \in \mathbb{C}$ spĺňajúce $|z - z_0| < R$. Obzvlášť, mocninový rad (37) (tzv. derivácia radu (32)) má opäť polomer konvergencie R.

Z Vety 18 vyplýva, že súčet každého mocninového radu je funkcia holomorfná v konvergenčnom kruhu tohto radu. Naviac, tento súčet má derivácie všetkých rádov, ktoré sú opäť holomorfné v danom konvergenčnom kruhu. Neskôr ukážeme, že každá holomorfná funkcia (na otvorenej podmnožine v $\mathbb{C}$) sa dá vyjadriť ako súčet istého mocninového radu.

Príklad 22

Najjednoduchším netriviálnym príkladom mocninového radu je geometrický rad

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots ,$$

pozri tiež Príklad 10 b). Jedná sa o mocninový rad so stredom v bode $z_0 = 0$. Nakoľko v tomto prípade $a_n = 1$ pre každé $n \in \mathbb{N}_0$, platí

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n\to\infty} 1 = \lim_{n\to\infty} 1 = 1.$$

Pre polomer konvergencie teda máme $R = 1$ a konvergenčný kruh daného radu má tvar $|z| < 1$, podľa Vety 16. Ako sme ukázali v Príklade 10 b), kruh $|z| < 1$ je zároveň aj oborom konvergencie daného radu (geometrický rad v zadaní totiž diverguje v každom bode konvergenčnej kružnice $|z| = 1$).

Príklad 23

Nájdime polomery konvergencie mocninových radov

$$\text{a)} \sum_{n=0}^{\infty} (n!)\, z^n, \quad \text{b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

a) Platí $a_n = n!$ pre $n \in \mathbb{N}_0$. Keďže existuje limita

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty} (n+1) = \infty,$$

podľa formuly (36) v Poznámke 4 polomer konvergencie je $R = 1/\infty = 0$. V súlade s Vetou 16(i) teda daný rad konverguje iba vo svojom strede $z = 0$.
b) V tomto prípade máme $a_n = 1/n!$ pre $n \in \mathbb{N}_0$ a

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

Pre polomer konvergencie potom platí $R = 1/0 = \infty$. Podľa Vety 16(ii) rad konverguje absolútne v celej komplexnej rovine.

Príklad 24

Určme obor konvergencie mocninového radu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+2)^n}{(n+2)^3\, 4^n}.$$

Koeficienty tohto radu majú tvar $a_n = \frac{1}{(n+2)^3\, 4^n}$, $n \in \mathbb{N}_0$. Ďalej platí

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{(n+3)^3\, 4^{n+1}}}{\frac{1}{(n+2)^3\, 4^n}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4} \left(\frac{n+2}{n+3} \right)^3 = \frac{1}{4}.$$

Preto polomer konvergencie je $R = 4$. Podľa Vety 16(iii) rad v zadaní príkladu konverguje absolútne na množine $|z+2| < 4$ a diverguje pre $|z+2| > 4$. V prípade bodov konvergenčnej kružnice, t.j., $|z+2| = 4$, platí

$$\left| \frac{(z+2)^n}{(n+2)^3\, 4^n} \right| = \frac{|z+2|^n}{(n+2)^3\, 4^n} = \frac{4^n}{(n+2)^3\, 4^n} = \frac{1}{(n+2)^3}.$$

Z reálnej analýzy vieme, že číselný rad $\sum 1/(n+2)^3$ je konvergentný. Preto podľa porovnávacieho kritéria rad v zadaní príkladu konverguje absolútne i na konvergenčnej kružnici. Obor konvergencie je teda uzavretý kruh $|z+2| \le 4$.

Príklad 25

Nájdime obor konvergencie radu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{3n}}{n}.$$

Jedná sa o mocninový rad $\sum a_n z^n$, v ktorom niektoré mocniny z "chýbajú"

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{3n}}{n} = 0 \cdot z^0 + 0 \cdot z^1 + 0 \cdot z^2 + (1/1) \cdot z^3 + 0 \cdot z^4 + 0 \cdot z^5 + (1/2) \cdot z^6 + \cdots .$$

Všeobecný koeficient a_n tohto radu možno zapísať v tvare

$$a_n = \begin{cases} 0, & n = 0,\ n = 3k-2,\ n = 3k-1, \\ 3/n, & n = 3k \neq 0. \end{cases}$$

Postupnosť $\left\{ \sqrt[n]{|a_n|} \right\}$ má teda dva hromadné body, 0 a $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3/n} = 1$. To znamená, že $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$, a polomer konvergencie $R = 1$. Rad v zadaní preto konverguje absolútne v kruhu $|z| < 1$ a diverguje pre $|z| > 1$.

Príklad 25

Vyšetríme teraz konvergenciu radu na konvergenčnej kružnici $|z| = 1$. Každé takéto z má podľa (3) goniometrický tvar $z = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi$, $\varphi \in [-\pi, \pi)$. Dosadením do radu v zadaní a využitím Moivreovho vzorca (8) dostaneme

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{3n}}{n} &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)^{3n}}{n} \overset{(8)}{=} \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 3n\varphi + \mathrm{i}\sin 3n\varphi}{n}\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}(\cos 3n\varphi/n) + \mathrm{i}\sum_{n=1}^{\infty}(\sin 3n\varphi/n).\end{aligned}$$

Pre $3\varphi \neq 2k\pi$ sú obidva reálne rady v poslednom výraze konvergentné, podľa Dirichletovho kritéria. Teda konverguje i pôvodný komplexný rad v zadaní. Vo zvyšných prípadoch, t.j., v súlade s $-\pi \leq \varphi < \pi$, pre

$$\begin{aligned}\varphi_1 = -2\pi/3 &\rightsquigarrow z_1 = \cos(-2\pi/3) + \mathrm{i}\sin(-2\pi/3) = -(1 + \mathrm{i}\sqrt{3})/2,\\ \varphi_2 = 0 &\rightsquigarrow z_2 = \cos 0 + \mathrm{i}0 = 1,\\ \varphi_3 = 2\pi/3 &\rightsquigarrow z_3 = \cos(2\pi/3) + \mathrm{i}\sin(2\pi/3) = (-1 + \mathrm{i}\sqrt{3})/2\end{aligned}$$

daný komplexný rad diverguje. Obor konvergencie je teda uzavretý kruh $|z| \leq 1$ okrem vyššie uvedených bodov z_1, z_2, z_3.

Obsah

Polynómy a racionálne lomené funkcie

Polynómom stupňa $n \in \mathbb{N}_0$ rozumieme funkciu komplexnej premennej z tvaru

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0, \tag{38}$$

kde komplexné čísla $a_0, a_1, \ldots, a_n$, $a_n \neq 0$, sa nazývajú koeficienty polynómu. Ak $a_0 = \cdots = a_n = 0$, t.j., $P(z) \equiv 0$ v $\mathbb{C}$, hovoríme o tzv. nulovom polynóme. Stupeň nulového polynómu kladieme $-\infty$. Je ďalej zrejmé, že každá nenulová konštantná funkcia je polynómom stupňa 0. Komplexné číslo z_0 s vlastnosťou

$$P(z) = (z - z_0)^k Q(z),$$

kde $Q(z)$ je polynóm s vlastnosťou $Q(z_0) \neq 0$, nazývame k-násobným koreňom polynómu P.

Veta 19 (Základná veta algebry)

Každý polynóm stupňa väčšieho ako nula s komplexnými koeficientami má v $\mathbb{C}$ aspoň jeden koreň.

Priamym dôsledkom Vety 19 je skutočnosť, že každý polynóm P stupňa $n > 0$ má v $\mathbb{C}$ práve n koreňov vrátane ich násobností. To dáva rozklad polynómu P

$$P(z) = a_n(z - z_1)^{k_1}(z - z_2)^{k_2} \cdots (z - z_l)^{k_l}, \tag{39}$$

kde $z_1, z_2, \ldots, z_l$ sú navzájom rôzne korene polynómu P s odpovedajúcimi násobnosťami $k_1, k_2, \ldots, k_l$, pričom platí $k_1 + k_2 + \cdots + k_l = n$. Polynómy sú funkcie spojité a holomorfné v celej komplexnej rovine s deriváciou

$$P'(z) = na_n z^{n-1} + (n-1)\,a_{n-1}z^{n-2} + \cdots + 2a_2 z + a_1, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Racionálnu lomenú funkciu definujeme ako podiel dvoch polynómov, t.j.,

$$f(z) = P(z)/Q(z), \tag{40}$$

kde P, Q sú polynómy a $Q \not\equiv 0$. Definičný obor racionálnej lomenej funkcie f je množina $\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C},\ Q(z) = 0\}$. Každá racionálna lomená funkcia f v (40) sa dá vyjadriť ako súčet polynómu a konečného počtu parciálnych zlomkov tvaru

$$A/(z - \alpha)^k,$$

kde $A \in \mathbb{C}$ a $\alpha \in \mathbb{C}$ je aspoň k-násobný koreň polynómu Q. Racionálne lomené funkcie sú spojité a holomorfné všade na svojich definičných oboroch.

Exponenciálna funkcia

Exponenciálnu funkciu komplexnej premennej z definujeme vzťahom

$$\exp z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}. \tag{41}$$

Mocninový rad v (41) konverguje absolútne v celej komplexnej rovine (polomer konvergencie $R = \infty$). Podľa Viet 17 a 18 je preto funkcia $\exp z$ definovaná a holomorfná v celom $\mathbb{C}$ s deriváciou

$$(\exp z)' = \exp z \quad \text{pre každé } z \in \mathbb{C}. \tag{42}$$

Z definície v (41) ďalej vyplýva, že platí

$$\exp 0 = 1, \quad (\exp z) \cdot (\exp w) = \exp(z + w), \quad z, w \in \mathbb{C}. \tag{43}$$

Exponenciálna funkcia $\exp z$ je preto nenulová v celej komplexnej rovine a

$$(\exp z)^{-1} = \exp(-z), \quad z \in \mathbb{C}. \tag{44}$$

Vlastnosti (42), (43) a (44) naznačujú, že funkcia $\exp z$ je holomorfným rozšírením reálnej exponenciálnej funkcie e^x z $\mathbb{R}$ na $\mathbb{C}$. Budeme preto používať označenie e^z namiesto $\exp z$.

Veta 20 (Jednoznačnosť exponenciálnej funkcie)

Nech $G \subseteq \mathbb{C}$ je oblasť obsahujúca bod 0. Komplexná funkcia f definovaná na G je exponeciálnou funkciou na G, t.j., platí $f(z) = \mathrm{e}^z$ pre každé $z \in G$, práve vtedy, keď f je holomorfná na G a platí $f(0) = 1$ a $f'(z) = f(z)$ na G.

Dôsledok 2

Pre každé $z = x + iy \in \mathbb{C}$ platia nasledujúce tvrdenia.

(i) $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^x \cos y + i\,\mathrm{e}^x \sin y$.

(ii) $\mathit{Re}\,\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{\mathit{Re}\,z} \cos(\mathit{Im}\,z), \quad \mathit{Im}\,\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{\mathit{Re}\,z} \sin(\mathit{Im}\,z), \quad \mathrm{e}^{\bar{z}} = \overline{\mathrm{e}^z}$.

(iii) $|\mathrm{e}^z| = \mathrm{e}^{\mathit{Re}\,z} = \mathrm{e}^x, \quad \arg \mathrm{e}^z \equiv \mathit{Im}\,z = y \pmod{2\pi}$.

Poznamenajme, že z Dôsledku 2(iii) vyplýva, že oborom hodnôt funkcie e^z sú všetky nenulové komplexné čísla z, t.j., množina $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Ďalej platia relácie

$$\mathrm{e}^z = 1 \iff z = 2k\pi\mathrm{i}, \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{45}$$

$$\mathrm{e}^z = -1 \iff z = (2k-1)\pi\mathrm{i}, \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{46}$$

$$\mathrm{e}^{z_1} = \mathrm{e}^{z_2} \iff z_1 - z_2 = 2k\pi\mathrm{i}, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{47}$$

Podľa (47) je teda funkcia e^z periodická s množinou všetkých periód $2\pi\mathrm{i}\mathbb{Z}$.

Goniometrické a hyperbolické funkcie

Goniometrické funkcie sínus, kosínus, tangens a kotangens pre $z \in \mathbb{C}$ definujeme

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}, \quad \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}, \tag{48}$$

$$\operatorname{tg} z = \sin z / \cos z, \quad \operatorname{cotg} z = \cos z / \sin z. \tag{49}$$

K nim odpovedajúce komplexné hyperbolické funkcie sa definujú

$$\operatorname{sh} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \operatorname{ch} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \tag{50}$$

$$\operatorname{tgh} z = \operatorname{sh} z / \operatorname{ch} z, \quad \operatorname{cotgh} z = \operatorname{ch} z / \operatorname{sh} z. \tag{51}$$

Platia tzv. Eulerove vzorce

$$\cos z \pm \mathrm{i} \sin z = \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i} z}, \quad \operatorname{ch} z \pm \operatorname{sh} z = \mathrm{e}^{\pm z}, \quad z \in \mathbb{C}, \tag{52}$$

ktoré dávajú do súvislosti goniometrické funkcie $\sin z$, $\cos z$, resp. hyperbolické funkcie $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$, s exponenciálnou funkciou e^z.

Pomocou formúl (52) je možné pre každé $z \in \mathbb{C}$ ľahko odvodiť vyjadrenia

$$\sin z = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}, \quad \cos z = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2}, \tag{53}$$

$$\operatorname{sh} z = \frac{\mathrm{e}^{z} - \mathrm{e}^{-z}}{2}, \quad \operatorname{ch} z = \frac{\mathrm{e}^{z} + \mathrm{e}^{-z}}{2}. \tag{54}$$

Definície v (48) a (50) ďalej dávajú vzájomné vzťahy medzi funkciami $\sin z$, $\operatorname{sh} z$ a $\cos z$, $\operatorname{ch} z$

$$\operatorname{sh} z = -\mathrm{i} \sin(\mathrm{i}z), \quad \sin z = -\mathrm{i} \operatorname{sh}(\mathrm{i}z), \tag{55}$$

$$\operatorname{ch} z = \cos(\mathrm{i}z), \quad \cos z = \operatorname{ch}(\mathrm{i}z). \tag{56}$$

Z identít (53), (54) a z vlastností exponenciálnej funkcie e^z vyplýva, že funkcie $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{sh} z$ a $\operatorname{ch} z$ sú definované a holomorfné v celej komplexnej rovine a

$$(\sin z)' = \cos z, \quad (\cos z)' = -\sin z, \tag{57}$$

$$(\operatorname{sh} z)' = \operatorname{ch} z, \quad (\operatorname{ch} z)' = \operatorname{sh} z. \tag{58}$$

Hovoríme preto, že tieto funkcie sú holomorfnými rozšíreniami reálnych funkcií $\sin x$, $\cos x$, $\sinh x$ a $\cosh x$ z $\mathbb{R}$ na $\mathbb{C}$.

Goniometrické a hyperbolické funkcie spĺňajú všetky formule platiace pre ich reálne analógie. Napríklad, pre každé $z \in \mathbb{C}$ platia rovnosti

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1, \quad \operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1.$$

Funkcie $\sin z$ a $\operatorname{sh} z$ sú nepárne, t.j.,

$$\sin(-z) = -\sin z, \quad \operatorname{sh}(-z) = -\operatorname{sh} z,$$

kým funkcie $\cos z$ a $\operatorname{ch} z$ sú párne, t.j.,

$$\cos(-z) = \cos z, \quad \operatorname{ch}(-z) = \operatorname{ch} z.$$

Funkcie $\sin z$, $\cos z$ sú periodické s množinou všetkých periód $2\pi\mathbb{Z}$. Funkcie $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$ sú periodické s periódami $2\pi \mathrm{i}\mathbb{Z}$. Ďalej platia relácie

$$\sin z = 0 \iff z = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{59}$$

$$\cos z = 0 \iff z = (2k-1)\pi/2, \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{60}$$

$$\operatorname{sh} z = 0 \iff z = k\pi \mathrm{i}, \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{61}$$

$$\operatorname{ch} z = 0 \iff z = (2k-1)\pi \mathrm{i}/2, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{62}$$

Veta 21

Pre každé $z = x + iy \in \mathbb{C}$ platia nasledujúce tvrdenia.

(i) $\sin z = \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y, \quad \cos z = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y.$

(ii) $\sin \bar{z} = \overline{\sin z}, \quad \cos \bar{z} = \overline{\cos z}.$

(iii) $|\sin z| = \sqrt{\sin^2 x + \operatorname{sh}^2 y}, \quad |\cos z| = \sqrt{\cos^2 x + \operatorname{sh}^2 y}.$

Veta 22

Pre každé $z = x + iy \in \mathbb{C}$ platia nasledujúce tvrdenia.

(i) $\operatorname{sh} z = \operatorname{sh} x \cos y + i \operatorname{ch} x \sin y, \quad \operatorname{ch} z = \operatorname{ch} x \cos y + i \operatorname{sh} x \sin y.$

(ii) $\operatorname{sh} \bar{z} = \overline{\operatorname{sh} z}, \quad \operatorname{ch} \bar{z} = \overline{\operatorname{ch} z}.$

(iii) $|\operatorname{sh} z| = \sqrt{\operatorname{sh}^2 x + \sin^2 y}, \quad |\operatorname{ch} z| = \sqrt{\operatorname{ch}^2 x - \sin^2 y}.$

Z Vety 21(iii) vyplýva, že goniometrické funkcie $\sin z$ a $\cos z$ sú v komplexnom obore neohraničené (na rozdiel od reálneho oboru), nakoľko reálny hyperbolický sínus $\operatorname{sh} y$ nie je ohraničený v $\mathbb{R}$. Oborom hodnôt funkcií $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$ je celé $\mathbb{C}$.

Logaritmická funkcia

Funkcia inverzná k exponenciálnej funkcii e^z sa nazýva logaritmus (logaritmická funkcia). Keďže funkcia e^z je periodická (s periódami $2\pi\mathrm{i}\mathbb{Z}$), logaritmus je vo všeobecnosti mnohoznačná funkcia a označujeme ju Log. Logaritmická funkcia je definovaná pre nenulové komplexné čísla, pričom pre každé $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ platí

$$\mathrm{Log}\, z = \ln|z| + \mathrm{i}\,\mathrm{Arg}\, z = \ln|z| + \mathrm{i}\arg z + 2k\pi\mathrm{i}, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{63}$$

Funkcia Log v (63) spĺňa základné vlastnosti

$$\mathrm{e}^{\mathrm{Log}\, z} = z, \quad \mathrm{Log}\,(\mathrm{e}^z) = z + 2k\pi\mathrm{i}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{64}$$

Každá celočíslená hodnota k v (63) určuje jedinú jednoznačnú vetvu logaritmu Log. Pre $k = 0$ dostaneme tzv. hlavnú vetvu logaritmu, ktorá sa označuje $\log$. Pre každé nenulové komplexné číslo z potom platí

$$\log z = \ln|z| + \mathrm{i}\arg z, \quad \mathrm{Re}\,(\log z) = \ln|z|, \quad \mathrm{Im}\,(\log z) = \arg z. \tag{65}$$

Obor hodnôt hlavnej vetvy logaritmu $\log$ je množina $\{w \in \mathbb{C},\ -\pi \le w < \pi\}$.

Veta 23

Hlavná vetva logaritmu $\log$ *je funkcia holomorfná na množine* $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ *a*

$$(\log z)' = 1/z \quad \textit{pre každé } z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0].$$

Dôvodom, prečo sa vo Vete 23 uvažuje množina $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ a nie celý definičný obor $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ funkcie $\log$, je skutočnosť, že funkcia $\arg$, a následne, podľa (65), i funkcia $\log$, nie sú spojité na polpriamke $(-\infty, 0)$ v $\mathbb{C}$. To znamená, že hlavná vetva logaritmu $\log$ nemôže byť ani holomorfná na $(-\infty, 0)$ (pozri Definícia 2 a Veta 6). Poznamenajme, že štandardné vlastnosti reálnych logaritmov platia v komplexnom obore iba pre funkciu Log, t.j., pre každé $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ máme

$$\mathrm{Log}\,(z_1 z_2) = \mathrm{Log}\, z_1 + \mathrm{Log}\, z_2, \quad \mathrm{Log}\,(z_1/z_2) = \mathrm{Log}\, z_1 - \mathrm{Log}\, z_2, \tag{66}$$

ale vo všeobecnosti $\log(z_1 z_2) \neq \log z_1 + \log z_2$ a $\log(z_1/z_2) \neq \log z_1 - \log z_2$. Naproti tomu, platí klasická rovnosť $\log 1 = 0$, avšak

$$\mathrm{Log}\, 1 = 2k\pi \mathrm{i}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad \text{teda} \quad \mathrm{Log}\, 1 = 2\pi \mathrm{i}\mathbb{Z}. \tag{67}$$

Tieto skutočnosti sú dôsledkom mnohoznačnosti logaritmickej funkcie Log, t.j., symbol $\mathrm{Log}\, z$ znamená istú množinu hodnôt, a nielen jednu konkrétnu hodnotu.

Mocninová funkcia

Pre dané $c \in \mathbb{C}$ definujeme funkciu c-tá mocnina komplexnej premennej z ako

$$z^c = \mathrm{e}^{c\,\mathrm{Log}\, z}. \tag{68}$$

Definičným oborom mocninovej funkcie pre všeobecné komplexné c je množina $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Využitím formúl v (63) a (65) sa výraz v (68) dá vyjadriť v tvare

$$z^c = \mathrm{e}^{c\,(\ln|z| + \mathrm{i}\arg z + 2k\pi\mathrm{i})} = \mathrm{e}^{c\,(\log z + 2k\pi\mathrm{i})}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}. \tag{69}$$

Funkcia z^c je preto vo všeobecnosti mnohoznačnou komplexnou funkciou. Pre jednotlivé celočíselné hodnoty k dostávame jej tzv. jednoznačné spojité vetvy. Jednoznačná vetva mocninovej funkcie v (69) odpovedajúca hodnote $k = 0$ sa zvykne označovať ako hlavná spojitá vetva funkcie z^c. Významnu triedu tvoria mocninové funkcie s reálnym racionálnym exponentom c, t.j., pre $c = m/n$, kde $m \in \mathbb{Z}$ a $n \in \mathbb{N}$. V tomto prípade je funkcia z^c najviac n-značná a platí

$$z^{\frac{m}{n}} = |z|^{\frac{m}{n}} \left[\cos\left(\frac{m\arg z + 2mk\pi}{n}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{m\arg z + 2mk\pi}{n}\right)\right],$$
$$k = 0, 1, \ldots, n-1, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}. \tag{70}$$

- $n = 1$ – mocninová funkcia sa redukuje na polynóm ($m \geq 0$), resp. na racionálnu lomenú funkciu ($m < 0$). V tomto prípade máme jednoznačnú funkciu s hodnotou
$$z^m = |z|^m \left[\cos(m \arg z) + \mathrm{i} \sin(m \arg z)\right], \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$
- $m = 1$ – jedná sa o n-tú odmocninu, zavedenú v (12). Mocninová funkcia je n-značná, definovaná v celej komplexnej rovine s hodnotami v (12).
- m, n sú vzájomne nesúdeliteľné – mocninová funkcia je v tomto prípade práve n-značná, pričom pre dané nenulové komplexné číslo z_0 hodnoty $z_0^{m/n}$ ležia vo vrcholoch pravidelného n-uholníka vpísaného do kružnice so stredom v bode 0 a s polomerom $|z_0|^{m/n}$. Okrem toho platia identity
$$z^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{z}\right)^m = \sqrt[n]{z^m} \quad \text{pre každé } z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$
- m, n majú netriviálneho spoločného deliteľa – v tomto prípade má funkcia $z^{m/n}$ práve n/d jednoznačných spojitých vetiev, kde d označuje najväčší spoločný deliteľ čísiel m a n. Ďalej platí $z^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{z}\right)^m$ pre každé nenulové z, avšak vo všeobecnosti $z^{\frac{m}{n}} \neq \sqrt[n]{z^m}$, ako to ilustujeme v Príklade 32.

Veta 24

Nech $m \in \mathbb{Z}$ *a* $n \in \mathbb{N}$. *Každá jednoznačná vetva mocninovej funkcie* $z^{m/n}$ *je holomorfná na množine* $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ *a platí*

$$\left(z^{\frac{m}{n}}\right)' = \frac{m}{n} \cdot \frac{z^{\frac{m}{n}}}{z} \quad \textit{pre každé } z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0].$$

V súlade s Vetou 24 potom hovoríme o jednoznačných holomorfných vetvách mnohoznačnej funkcie $z^{m/n}$.

Príklad 26

Vypočítajme

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}, \qquad \mathrm{e}^{2+\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}.$$

Podľa Dôsledku 2(i) platí

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = \mathrm{e}^{0+\mathrm{i}\pi} = \mathrm{e}^{0} \cos \pi + \mathrm{e}^{0} \sin \pi = -1,$$

$$\mathrm{e}^{2+\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} = \mathrm{e}^{2} \cos(\pi/6) + \mathrm{i}\, \mathrm{e}^{2} \sin(\pi/6) = \frac{\mathrm{e}^{2}}{2}\left(\sqrt{3} + \mathrm{i}\right).$$

Príklad 27

Nájdime v $\mathbb{C}$ všetky riešenia rovnice

$$\sin z = 2.$$

Nech $z = x + \mathrm{i}y$. Potom podľa Vety 21(i) je rovnica v zadaní ekvivalentná s

$$\sin x \operatorname{ch} y + \mathrm{i} \cos x \operatorname{sh} y = 2 \iff \sin x \operatorname{ch} y = 2 \quad \wedge \quad \cos x \operatorname{sh} y = 0.$$

Z posledných dvoch rovníc vyplýva $\cos x = 0$, teda $x = (2k+1)\pi/2$ pre $k \in \mathbb{Z}$. Po dosadení do rovnice $\sin x \operatorname{ch} y = 2$ dostaneme $\operatorname{ch} y = \pm 2$. Keďže reálna hyperbolická funkcia $\operatorname{ch} y$ nadobúda len kladné hodnoty, platí $\operatorname{ch} y = 2$, a podľa (54) máme

$$\mathrm{e}^{y} + \mathrm{e}^{-y} = 4.$$

Táto transcendentná rovnica má práve dve riešenia $y = \ln\left(2 \pm \sqrt{3}\right)$. Množina všetkých riešení rovnice v zadaní príkladu má teda tvar

$$z = \frac{\pi}{2} + k\pi + \mathrm{i} \ln\left(2 \pm \sqrt{3}\right), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Príklad 28

Dokážme rovnosť množín

$$\mathrm{Log}\,(1/z) = -\mathrm{Log}\,z, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\},$$

a zároveň nájdime z, pre ktoré $\log\,(1/z) \neq -\log z$, resp. $\log\,(1/z) = -\log z$. Pre ľubovoľné $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ platia podľa (66) a (67) rovnosti množín

$$\begin{aligned} \mathrm{Log}\,(1/z) = \mathrm{Log}\,1 - \mathrm{Log}\,z &= \{2k\pi\mathrm{i},\ k \in \mathbb{Z}\} - \{\ln|z| + \arg z + 2l\pi\mathrm{i},\ l \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{-\ln|z| - \arg z + 2(k-l)\pi\mathrm{i},\ k, l \in \mathbb{Z}\} \\ &= -\{\ln|z| + \arg z + 2m\pi\mathrm{i},\ m \in \mathbb{Z}\} = -\mathrm{Log}\,z. \end{aligned}$$

Napríklad pre $z = -2 = -2 + \mathrm{i}0$ pomocou (65) máme

$$\begin{aligned} \log\,(-1/2) &= \ln|-1/2| + \mathrm{i}\arg\,(-1/2) = -\ln 2 - \mathrm{i}\pi, \\ -\log\,(-2) &= -\ln|-2| - \mathrm{i}\arg\,(-2) = -\ln 2 + \mathrm{i}\pi. \end{aligned}$$

Teda $\log\,(-1/2) \neq -\log\,(-2)$. Naproti tomu, pre $z = 1 + \mathrm{i}$ dostaneme rovnosť

$$\begin{aligned} \log\,[1/(1+\mathrm{i})] &= \log\,[(1-\mathrm{i})/2] = \ln\,(1/\sqrt{2}) - \mathrm{i}\pi/4, \\ -\log\,(1+\mathrm{i}) &= -\ln\sqrt{2} - \mathrm{i}\pi/4 = \ln\,(1/\sqrt{2}) - \mathrm{i}\pi/4. \end{aligned}$$

Poznámka 5 (k Príkladu 28)

Pozorovania v Príklade 28 majú svoje zovšeobecnenie. Konkrétne, dá sa ukázať, že pre každé nenulové komplexné číslo z platí

$$\log\left(\frac{1}{z}\right) = \begin{cases} -\log z - 2\pi \mathrm{i}, & z \in (-\infty, 0), \\ -\log z, & z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]. \end{cases}$$

Skutočne, ako sme zistili v Príklade 28, pre $z = -2 \in (-\infty, 0)$ máme

$$-\log(-2) - 2\pi\mathrm{i} = -\ln 2 + \mathrm{i}\pi - 2\pi\mathrm{i} = -\ln 2 - \pi\mathrm{i} = \log(-1/2),$$

kým pre $z = 1 + \mathrm{i} \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ sme dostali $\log[1/(1+\mathrm{i})] = -\log(1+\mathrm{i})$.

Príklad 29

Vypočítajme

$$\text{a) } \log \mathrm{i}, \quad \operatorname{Log} \mathrm{i} \qquad \text{b) } \log(2+3\mathrm{i}), \quad \operatorname{Log}(2+3\mathrm{i}).$$

a)

$$\log \mathrm{i} = \ln|\mathrm{i}| + \mathrm{i}\arg \mathrm{i} = \ln 1 + \mathrm{i}\pi/2 = \mathrm{i}\pi/2,$$

$$\operatorname{Log} \mathrm{i} = \{\log \mathrm{i} + 2k\pi\mathrm{i},\ k \in \mathbb{Z}\} = \{\mathrm{i}\,(\pi/2 + 2k\pi),\ k \in \mathbb{Z}\}.$$

b)

$$\log(2+3\mathrm{i}) = \ln|2+3\mathrm{i}| + \mathrm{i}\arg(2+3\mathrm{i}) = \ln\sqrt{13} + \mathrm{i}\,\operatorname{arctg}(3/2),$$

$$\begin{aligned}\operatorname{Log}(2+3\mathrm{i}) &= \{\log(2+3\mathrm{i}) + 2k\pi\mathrm{i},\ k \in \mathbb{Z}\}\\ &= \{\ln\sqrt{13} + \mathrm{i}\,(\operatorname{arctg}(3/2) + 2k\pi),\ k \in \mathbb{Z}\}.\end{aligned}$$

Príklad 30

Stanovme
$$1^{\mathrm{i}}, \qquad \mathrm{i}^{\mathrm{i}}, \qquad 1^{(1+\mathrm{i})/\sqrt{2}}.$$
V súlade s definíciami v (68) a (69) postupne dostaneme
$$1^{\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\mathrm{Log}\,1} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(\ln 1 + 2k\pi\mathrm{i})} = \mathrm{e}^{-2k\pi}, \quad k \in \mathbb{Z},$$
$$\mathrm{i}^{\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\mathrm{Log}\,\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(\ln|\,\mathrm{i}\,| + \mathrm{i}\pi/2 + 2k\pi\mathrm{i})} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(\mathrm{i}\pi/2 + 2k\pi\mathrm{i})} = \mathrm{e}^{-\pi/2 - 2k\pi}, \quad k \in \mathbb{Z},$$
$$1^{(1+\mathrm{i})/\sqrt{2}} = \mathrm{e}^{\frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\,\mathrm{Log}\,1} = \mathrm{e}^{\frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\,(\ln 1 + 2k\pi\mathrm{i})} = \mathrm{e}^{(-1+\mathrm{i})\sqrt{2}k\pi} = \mathrm{e}^{-\sqrt{2}k\pi + \mathrm{i}\sqrt{2}k\pi}$$
$$= \mathrm{e}^{-\sqrt{2}k\pi}\left[\cos\left(\sqrt{2}k\pi\right) + \mathrm{i}\sin\left(\sqrt{2}k\pi\right)\right], \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Príklad 31

Porovnajme nasledujúce množiny

$$(-8)^{\frac{2}{3}}, \qquad \left(\sqrt[3]{-8}\right)^2, \qquad \sqrt[3]{(-8)^2}.$$

Na všetky tri mocniny aplikujeme vzorec v (70). Podľa Príkladu 4 vieme, že $|-8| = 8$ a $\arg(-8) = -\pi$. V prípade prvej mocniny je $m = 2$ a $n = 3$, teda

$$(-8)^{\frac{2}{3}} = 4\left[\cos\left(\frac{4k\pi - 2\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{4k\pi - 2\pi}{3}\right)\right], \quad k = 0,\ 1,\ 2.$$

Celkovo máme tri hodnoty pre mocninu $(-8)^{2/3}$, a to

$$k = 0 \ \longrightarrow\ 4\left[\cos(-2\pi/3) + \mathrm{i}\sin(-2\pi/3)\right] = -2 - 2\sqrt{3}\mathrm{i},$$

$$k = 1 \ \longrightarrow\ 4\left[\cos(2\pi/3) + \mathrm{i}\sin(2\pi/3)\right] = -2 + 2\sqrt{3}\mathrm{i},$$

$$k = 2 \ \longrightarrow\ 4\left[\cos(2\pi) + \mathrm{i}\sin(2\pi)\right] = 4.$$

Pri zisťovaní hodnôt druhej mocniny $\left(\sqrt[3]{-8}\right)^2$ využijeme výsledky z Príkladu 4, pričom dostaneme

Príklad 31

$$\sqrt[3]{-8} = \begin{cases} 1 - \mathrm{i}\sqrt{3}, \\ 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}, \\ -2, \end{cases} \implies \left(\sqrt[3]{-8}\right)^2 = \begin{cases} -2 - 2\sqrt{3}\mathrm{i}, \\ -2 + 2\sqrt{3}\mathrm{i}, \\ 4. \end{cases}$$

Pre poslednú mocninu v zadaní príkladu platí $\sqrt[3]{(-8)^2} = \sqrt[3]{64}$. Preto vo vzorci (70) dosadzujeme $m = 1$, $n = 3$, $z = 64$, $|z| = 64$ a $\arg z = \arg(64) = 0$, t.j.,

$$\sqrt[3]{(-8)^2} = \sqrt[3]{64} = 4\left[\cos\left(\frac{2k\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{2k\pi}{3}\right)\right], \quad k = 0,\ 1,\ 2.$$

Jednotlivé hodnoty pre $\sqrt[3]{(-8)^2}$ potom sú

$$k = 0 \longrightarrow 4\left[\cos 0 + \mathrm{i}\sin 0\right] = 4,$$

$$k = 1 \longrightarrow 4\left[\cos(2\pi/3) + \mathrm{i}\sin(2\pi/3)\right] = -2 + 2\sqrt{3}\mathrm{i},$$

$$k = 2 \longrightarrow 4\left[\cos(4\pi/3) + \mathrm{i}\sin(4\pi/3)\right] = -2 - 2\sqrt{3}\mathrm{i}.$$

Vo všetkých troch prípadoch sme dostali rovnakú množinu hodnôt mocnín. Tento výsledok je v súlade s diskusiou uvedenou vyššie, nakoľko čísla $m = 2$ a $n = 3$ sú vzájomne nesúdeliteľné.

Príklad 32

Porovnajme nasledujúce množiny

$$(-4)^{\frac{2}{4}}, \qquad \left(\sqrt[4]{-4}\right)^2, \qquad \sqrt[4]{(-4)^2}.$$

Na mocniny aplikujeme podobný postup ako v Príklade 31. Postupne dostaneme

$$(-4)^{\frac{2}{4}} = (-4)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-4} = \pm 2\mathrm{i},$$

$$\sqrt[4]{-4} = \begin{cases} 1-\mathrm{i}, \\ 1+\mathrm{i}, \\ -1+\mathrm{i}, \\ -1-\mathrm{i}, \end{cases} \implies \left(\sqrt[4]{-4}\right)^2 = \begin{cases} -2\mathrm{i}, \\ 2\mathrm{i}, \end{cases}$$

$$\sqrt[4]{(-4)^2} = \sqrt[4]{16} = \begin{cases} 2, \\ 2\mathrm{i}, \\ -2, \\ -2\mathrm{i}. \end{cases}$$

Platí teda $(-4)^{\frac{2}{4}} = \left(\sqrt[4]{-4}\right)^2 \neq \sqrt[4]{(-4)^2}$, nakoľko čísla $m = 2$ a $n = 4$ nie sú vzájomne nesúdeliteľné a majú netriviálneho spoločného deliteľa $d = 2$.

L'Hospitalovo pravidlo v komplexnom obore

Podobne ako v reálnom obore, tak i v $\mathbb{C}$ platí tzv. L'Hospitalovo pravidlo, ktoré umožňuje výpočet istého typu limít funkcií. Poznamenajme, že L'Hospitalovo pravidlo pre komplexné funkcie je silnejšie tvrdenie než jeho "reálna verzia". Je to spôsobené skutočnosťou, že pôvodný predpoklad reálnej diferencovateľnosti funkcií je teraz nahradený silnejším predpokladom holomorfnosti funkcií. Pre $r \in \mathbb{R}^+$ a $z_0 \in \mathbb{C}$ budeme pod pojmom prstencové r-okolie bodu z_0 rozumieť množinu $K^*(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C},\ 0 < |z - z_0| < r\}$. V prípade nevlastného bodu $z_0 = \infty$ definujeme $K^*(\infty, r) = \{z \in \mathbb{C},\ |z| > 1/r\}$.

Veta 25 (L'Hospitalovo pravidlo)

Nech funkcie f a g sú holomorfné na prstencovom okolí $K^*(z_0, r)$, $r > 0$, bodu $z_0 \in \tilde{\mathbb{C}}$ a nech platí $\lim_{z\to z_0} f(z) = 0 = \lim_{z\to z_0} g(z)$, pričom g nie je identicky nulová funkcia. Potom existuje $\lim_{z\to z_0} (f(z)/g(z))$ (vlastná, nevlastná) a platí

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z\to z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)}.$$

Príklad 33

Určme limitu
$$\lim_{z\to 0} \frac{\log(1+z)}{z}.$$
Zložená funkcia $f(z) = \log(1+z)$ je podľa Vety 23 definovaná a holomorfná na $\mathbb{C} \setminus (-\infty, -1]$, kým funkcia $g(z) = z$ je holomorfná v celej komplexnej rovine. Ďalej $g \not\equiv 0$ v $\mathbb{C}$ a platí

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z\to 0} \log(1+z) = \log 1 = 0, \quad \lim_{z\to 0} g(z) = \lim_{z\to 0} z = 0.$$

Sú teda splnené všetky predpoklady Vety 25. Limita v zadaní príkladu existuje a

$$\lim_{z\to 0} \frac{\log(1+z)}{z} = \lim_{z\to 0} \frac{[\log(1+z)]'}{(z)'} = \lim_{z\to 0} \frac{\frac{1}{1+z}}{1} = \lim_{z\to 0} \frac{1}{1+z} = 1.$$

Obsah

Komplexný krivkový integrál

Nech $[\alpha, \beta] \subseteq \mathbb{R}$ je reálny interval a nech $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ je komplexná funkcia reálnej premennej $t \in [\alpha, \beta]$. Pre funkciu f sa definuje derivácia $f'(t_0)$ v bode $t_0 \in (\alpha, \beta)$ vzťahom

$$f'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = [\mathrm{Re}\, f]'(t_0) + \mathrm{i}\,[\mathrm{Im}\, f]'(t_0), \tag{71}$$

kde $[\mathrm{Re}\, f]'(t_0)$, $[\mathrm{Im}\, f]'(t_0)$ znamenajú (reálne) derivácie reálnych funkcií $\mathrm{Re}\, f$, $\mathrm{Im}\, f$ podľa premennej t. V prípade $t_0 = \alpha$, resp. $t_0 = \beta$ uvažujeme deriváciu sprava, resp. zľava

$$f'_+(\alpha) = [\mathrm{Re}\, f]'_+(\alpha) + \mathrm{i}\,[\mathrm{Im}\, f]'_+(\alpha), \quad \text{resp.} \quad f'_-(\beta) = [\mathrm{Re}\, f]'_-(\beta) + \mathrm{i}\,[\mathrm{Im}\, f]'_-(\beta).$$

Ďalej definujeme určitý integrál komplexnej funkcie f reálnej premennej t na intervale $[\alpha, \beta]$ zápisom

$$\int_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta \mathrm{Re}\, f(t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{i} \int_\alpha^\beta \mathrm{Im}\, f(t)\,\mathrm{d}t. \tag{72}$$

Pre počítanie s deriváciami a určitými integrálmi z komplexných funkcií reálnej premennej platia pravidlá analogické reálnemu oboru (substitúcia, per-partes).

Príklad 34

Vypočítajme deriváciu a určitý integrál z funkcie

$$f(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}at}, \quad a \in \mathbb{R}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Využijúc Dôsledok 2(i), oddelíme reálnu a imaginárnu časť funkcie f

$$f(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}at} = \cos at + \mathrm{i} \sin at, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Potom podľa (71) a (72) postupne máme

$$f'(t) = -a \sin at + \mathrm{i}a \cos at = \mathrm{i}a\mathrm{e}^{\mathrm{i}at},$$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^{2\pi} \cos at\,\mathrm{d}t + \mathrm{i} \int_0^{2\pi} \sin at\,\mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{1}{a} \sin at\right]_0^{2\pi} + \mathrm{i} \left[-\frac{1}{a} \cos at\right]_0^{2\pi} = \left[\frac{1}{\mathrm{i}a} \mathrm{e}^{\mathrm{i}at}\right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{2a\pi\mathrm{i}} - 1}{\mathrm{i}a}. \end{aligned}$$

Poznámka 6

Poznamenajme, že výsledky v Príklade 34 sú analogické s tradičnými pravidlami pre deriváciu a neurčitý integrál exponenciálnej funkcie, t.j., pre $a \in \mathbb{R}$ platí

$$\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}at}\right)' = \mathrm{i}a \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}at}, \quad \int \mathrm{e}^{\mathrm{i}at} \mathrm{d}t = \frac{1}{\mathrm{i}a} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}at}.$$

Ako sa možno ľahko presvedčiť, tieto vlastnosti exponenciálnej funkcie zostanú v platnosti i pre komplexnú hodnotu konštanty a. Konkrétne, platia rovnosti

$$(\mathrm{e}^{at})' = a \cdot \mathrm{e}^{at}, \quad \int \mathrm{e}^{at} \mathrm{d}t = \frac{1}{a} \cdot \mathrm{e}^{at} + K, \quad a \in \mathbb{C}, \tag{73}$$

kde K označuje komplexnú integračnú konštantu. Na druhej strane, nie všetky pravidlá platné v $\mathbb{R}$ fungujú i pre komplexné funkcie reálnych premenných. V Príklade 35 demonštrujeme neplatnosť reálneho L'Hospitalovho pravidla.

Príklad 35

Nech $f(t) = t$ a $g(t) = t\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}/t}$ pre $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Potom platí $\lim_{t\to 0} f(t) = 0$ a

$$\lim_{t\to 0} g(t) = \lim_{t\to 0} \left[t\cos(1/t) + \mathrm{i}\,t\sin(1/t)\right] = 0 + \mathrm{i}0 = 0.$$

Ďalej, pre (reálne) derivácie funkcií f, g podľa premennej t máme $f'(t) = 1$ a

$$\begin{aligned} g'(t) &= [t\cos(1/t)]' + \mathrm{i}\,[t\sin(1/t)]' \\ &= \cos(1/t) + (1/t)\cdot\sin(1/t) + \mathrm{i}\,[\sin(1/t) - (1/t)\cdot\cos(1/t)] \\ &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}/t}(t - \mathrm{i})/t. \end{aligned}$$

Limita z podielu f'/g' v bode 0 existuje, pričom

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 0} \frac{f'(t)}{g'(t)} &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}/t}(t-\mathrm{i})/t} = \lim_{t\to 0} \frac{t\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}/t}}{t-\mathrm{i}} = \lim_{t\to 0} \frac{t\cos(1/t) - \mathrm{i}\,t\sin(1/t)}{t-\mathrm{i}} \\ &= \frac{0+\mathrm{i}0}{-\mathrm{i}} = 0. \end{aligned}$$

Avšak limita $\lim_{t\to 0} f(t)/g(t) = \lim_{t\to 0} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}/t}$ neexistuje, napriek tomu, že sú splnené všetky predpoklady reálneho L'Hospitalovho pravidla.

V teórii krivkového integrálu v $\mathbb{R}^2$ sme rovinnú krivku definovali ako spojité zobrazenie $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^2$, kde $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$, t.j., ako spojité zobrazenie reálneho intervalu do "reálnej" roviny. Nakoľko medzi rovinou $\mathbb{R}^2$ a komplexnou rovinou $\mathbb{C}$ existuje jednoznačná korešpondencia $[x,y] \leftrightarrow x + \mathrm{i}y$, v nasledujúcom výklade budeme krivkou v $\mathbb{C}$ rozumieť spojitú komplexnú funkciu reálnej premennej, t.j., $\varphi : [a,b] \to \mathbb{C}$. Je zrejmé, že pre takto definovanú (komplexnú) krivku platia všetky pojmy a výsledky získané pre (reálne) krivky v $\mathbb{R}^2$. Obzvlášť, množinu

$$\langle\varphi\rangle = \{z \in \mathbb{C},\ z = \varphi(t),\ t \in [a,b]\}$$

budeme nazývať trajektóriou (geometrickým obrazom) krivky φ, kým samotné zobrazenie φ potom budeme označovať ako parametrizáciu množiny $\langle\varphi\rangle$. Pre jednoduchosť budeme komplexné krivky v $\mathbb{C}$ a s nimi korešpondujúce reálne krivky v $\mathbb{R}^2$ stotožňovať.

Definícia 3 (Krivkový integrál z komplexnej funkcie)

Nech $\varphi : [a,b] \to \mathbb{C}$ je cesta a $f : \langle\varphi\rangle \to \mathbb{C}$ spojitá funkcia. Potom krivkový integrál $\int_\varphi f(z)\,\mathrm{d}z$ z funkcie f po ceste φ definujeme vzťahom

$$\int_\varphi f(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t. \tag{74}$$

Z predpisu (74) sa dá ľahko odvodiť súvislosť medzi krivkovým integrálom v $\mathbb{C}$ a krivkovým integrálom II. druhu v $\mathbb{R}^2$. Konkrétne, ak u a v označujú reálnu a imaginárnu časť funkcie f, t.j., $f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$ pre $z = x + \mathrm{i}y \in \langle\varphi\rangle$, potom platí formula

$$\int_{\varphi} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\varphi} [u(x, y)\,\mathrm{d}x - v(x, y)\,\mathrm{d}y] + \mathrm{i}\int_{\varphi} [v(x, y)\,\mathrm{d}x + u(x, y)\,\mathrm{d}y]. \quad (75)$$

Komplexný integrál v (74) má mnohé analogické vlastnosti ako krivkový integrál II. druhu v $\mathbb{R}$. Obzvlášť, jeho hodnota sa tzv. reparametrizáciou cesty φ nemení (t.j., integrál v (74) nezávisí na výbere ekvivalentnej parametrizácie danej cesty φ). Nasledovné tvrdenie objasňuje koncept substitúcie v komplexnom integrále.

Veta 26 (Transformačné pravidlo)

Nech $G_1, G_2 \subseteq \mathbb{C}$ sú otvorené množiny a $g : G_1 \to G_2$ je holomorfná funkcia. Nech φ_1 je cesta v G_1 a $\varphi_2 = g \circ \varphi_1$. Potom pre každú komplexnú funkciu f definovanú a spojitú na $\langle\varphi_2\rangle$ platí

$$\int_{\varphi_2} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\varphi_1} f(g(w))\,g'(w)\,\mathrm{d}w. \quad (76)$$

Realizácia substitúcie pre komplexný integrál v (74) je podľa Vety 26 formálne analogická ako pri určitom (Riemannovom) integrále v $\mathbb{R}$. Postupne platí

$$\underbrace{z = g(w)}_{\text{transformácia integračnej premennej}} \qquad \underbrace{\varphi_2(\cdot) = g(\varphi_1(\cdot))}_{\text{transformácia ``integračných medzí''}}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathrm{d}z = g'(w)\,\mathrm{d}w$$

$$\Downarrow$$

$$\int_{\varphi_2} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\varphi_1} f(g(w))\,g'(w)\,\mathrm{d}w.$$

Poznamenajme, že $g'(w)$ značí komplexnú deriváciu holomorfnej funkcie g v bode $w \in \langle\varphi_1\rangle$.

Veta 27

Nech φ je cesta v $\mathbb{C}$ a $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť komplexných funkcií spojitých na $\langle\varphi\rangle$. Potom platia nasledujúce tvrdenia.

(i) *Ak f je limitná funkcia postupnosti $\{f_n\}$ a $f_n \rightrightarrows f$ na $\langle\varphi\rangle$, potom*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_\varphi f_n(z)\,\mathrm{d}z\right) = \int_\varphi \left(\lim_{n\to\infty} f_n(z)\right)\mathrm{d}z = \int_\varphi f(z)\,\mathrm{d}z.$$

(ii) *Ak f je súčet radu $\sum f_n$ a $\sum f_n \rightrightarrows f$ na $\langle\varphi\rangle$, potom*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_\varphi f_n(z)\,\mathrm{d}z\right) = \int_\varphi \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)\right)\mathrm{d}z = \int_\varphi f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Nezávislosť krivkového integrálu na integračnej ceste a primitívna funkcia

Definícia 4 (Nezávislosť na integračnej ceste)

Nech $G \subseteq \mathbb{C}$ je otvorená množina a $f : G \to \mathbb{C}$ je spojitá funkcia. Hovoríme, že krivkový integrál $\int_\varphi f(z)\,\mathrm{d}z$ nezávisí v G na integračnej ceste, ak pre každé dve cesty φ_1, φ_2 v G majúce spoločný začiatočný i koncový bod platí

$$\int_{\varphi_1} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\varphi_2} f(z)\,\mathrm{d}z. \tag{77}$$

Ekvivalentne, krivkový integrál z funkcie f nezávisí v G na integračnej ceste, ak pre každú uzavretú cestu φ v G platí $\int_\varphi f(z)\,\mathrm{d}z = 0$.

Definícia 5 (Primitívna funkcia)

Nech $G \subseteq \mathbb{C}$ je otvorená množina a f je komplexná funkcia definovaná na G. Holomorfná funkcia $F : G \to \mathbb{C}$ sa nazýva primitívna k funkcii f (v G), ak platí

$$F'(z) = f(z) \quad \text{pre každé } z \in G. \tag{78}$$

Veta 28 (Newtonova–Leibnizova formula)

Nech $G \subseteq \mathbb{C}$ je otvorená množina a nech f je komplexná funkcia spojitá na G. Potom $F : G \to \mathbb{C}$ je primitívna funkcia k f v G práve vtedy, keď pre každú dvojicu $z_1, z_2 \in G$ a každú cestu φ v G so začiatočným bodom z_1 a koncovým bodom z_2 platí

$$\int_\varphi f(z)\,\mathrm{d}z = F(z_2) - F(z_1). \tag{79}$$

Dôsledok 3 (Existencia primitívnej funkcie)

Funkcia f spojitá na otvorenej množine $G \subseteq \mathbb{C}$ má v G primitívnu funkciu práve vtedy, keď krivkový integrál $\int_\varphi f(z)\,\mathrm{d}z$ nezávisí v G na integračnej ceste.

Poznámka 7

Ako vidno z Dôsledku 3, pojem primitívnej funkcie v $\mathbb{C}$ je silnejší koncept než jeho klasická reálna analógia. Ak F je funkcia primitívna k f na G, potom pre každú konštantu $K \in \mathbb{C}$ i funkcia $F + K$ je primitívna k f na G. V prípade, ak G je súvislá množina, teda oblasť, platí i opačné tvrdenie, t.j., rozdiel dvoch funkcií, ktoré sú primitívne k f na G, je funkcia konštantná na G.

Príklad 36

Vypočítajme krivkový integrál

$$\int_\varphi \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z,$$

kde krivka φ je polkružnica $z = R\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, $R > 0$, $t \in [0,\pi]$. Využijeme Definíciu 3 s

$$f(z) = 1/z, \quad \varphi(t) = R\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}, \quad t \in [0,\pi].$$

Podľa Poznámky 6 pre deriváciu krivky φ platí $\varphi'(t) = R\,\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ pre $t \in [0,\pi]$. Po dosadení do formuly (74) dostaneme

$$\int_\varphi \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z = \int_0^\pi \frac{1}{R\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}} \cdot R\,\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t = \mathrm{i}\int_0^\pi \mathrm{d}t = \mathrm{i}\pi.$$

Poznamenajme, že rovnaký výsledok dostaneme i použitím rovnosti (75), t.j., prevodom komplexného krivkového integrálu na dva (reálne) krivkové integrály II. druhu. V tomto prípade používame "reálnu" parametrizáciu krivky φ

$$x = R\cos t, \quad y = R\sin t, \quad t \in [0,\pi],$$

keďže $z = x + \mathrm{i}y$ a podľa (13) platí $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = \cos t + \mathrm{i}\sin t$. Reálna a imaginárna

Príklad 36

časť funkcie $f(z) = 1/z$ majú tvar

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x + \mathrm{i}y} = \frac{x - \mathrm{i}y}{(x + \mathrm{i}y)(x - \mathrm{i}y)} = \frac{x}{x^2 + y^2} - \mathrm{i}\,\frac{y}{x^2 + y^2}$$

$$\Downarrow$$

$$u = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad v = -\frac{y}{x^2 + y^2}.$$

V súlade s (75) potom počítame dva reálne krivkové integrály

$$I_1 = \int_\varphi [u\,\mathrm{d}x - v\,\mathrm{d}y] = \int_\varphi \frac{x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y}{x^2 + y^2},$$

$$I_2 = \int_\varphi [v\,\mathrm{d}x + u\,\mathrm{d}y] = \int_\varphi \frac{-y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y}{x^2 + y^2},$$

pričom hodnota integrálu v zadaní príkladu je $I_1 + \mathrm{i}I_2$.

Príklad 37

Dokážme, že pre pevné $n \in \mathbb{Z}$, $z_0 \in \mathbb{C}$ a $R > 0$ platí

$$\int_\varphi (z - z_0)^n \, \mathrm{d}z = \begin{cases} 0, & n \neq -1, \\ 2\pi \mathrm{i}, & n = -1, \end{cases} \tag{80}$$

kde φ je kružnica $|z - z_0| = R$. Jej parametrické vyjadrenie má zrejme tvar

$$z - z_0 = R\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \quad \Longrightarrow \quad z = z_0 + R\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Pre diferenciál $\mathrm{d}z$ potom platí $\mathrm{d}z = z'(t)\,\mathrm{d}t = R\,\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\mathrm{d}t$. Integrál v zadaní má potom podľa (74) tvar

$$\int_\varphi (z - z_0)^n \, \mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} R^n \,\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt} \cdot R\,\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\mathrm{d}t = \mathrm{i}R^{n+1} \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)t}\mathrm{d}t.$$

Ak $n \neq -1$, pre posledný integrál pomocou (73) a (45) dostaneme

$$\int_\varphi (z - z_0)^n \, \mathrm{d}z = \mathrm{i}R^{n+1} \left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)t}}{\mathrm{i}(n+1)} \right]_0^{2\pi} = \mathrm{i}R^{n+1} \frac{\mathrm{e}^{2\pi(n+1)\mathrm{i}} - 1}{\mathrm{i}(n+1)} \overset{(45)}{=} 0.$$

Príklad 37

V prípade $n = -1$ (t.j., $n + 1 = 0$) platí

$$\int_{\varphi} (z - z_0)^{-1} \, \mathrm{d}z = \mathrm{i} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}t = \mathrm{i} \, [t]_0^{2\pi} = 2\pi \mathrm{i}.$$

Príklad 38

Pre pevné $n \in \mathbb{Z}$ stanovme primitívnu funkciu k

$$f(z) = z^n$$

na množine $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Pre $n \neq -1$ je $F(z) = z^{n+1}/(n+1)$ funkciou primitívnou k f pre $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, nakoľko F je holomorfná na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ a $F'(z) = f(z)$ pre $z \neq 0$. V prípade $n = -1$, t.j., $f(z) = 1/z$, neexistuje primitívna funkcia k f na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Vyplýva to z Dôsledku 3 a z formuly (80) v Príklade 37 s $z_0 = 0$, podľa ktorej krivkový integrál z $1/z$ pozdĺž (uzavretej) kružnice so stredom v bode 0 je nenulový. Naproti tomu, na množine $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ má funkcia $f(z) = 1/z$ za primitívnu funkciu hlavnú vetvu logaritmu $\log$, nakoľko podľa Vety 23 platí

$$(\log z)' = 1/z, \quad z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0].$$

Cauchyho teória krivkového integrálu

V teórii funkcií komplexnej premennej má osobitný význam počítanie integrálov po uzavretých cestách (napr. Dôsledok 3). Základné výsledky o komplexných krivkových integráloch pozdĺž uzavretých ciest sa zvyčajne súhrne označujú ako tzv. Cauchyho teória. Ako uvidíme, významnú úlohu v tejto teórii zohrávajú funkcie, ktoré sú holomorfné na otvorených podmnožinách komplexnej roviny.

Lema 1

Nech φ je merateľná cesta v $\mathbb{C}$ a $f : \langle\varphi\rangle \to \mathbb{C}$ je spojitá funkcia. Potom platí $\left|\int_\varphi f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leq ML(\varphi)$, kde $M = \sup_{z\in\langle\varphi\rangle} |f(z)|$ a $L(\varphi)$ je dĺžka krivky φ.

Veta 29 (Cauchyho integrálna veta)

Nech $G \subseteq \mathbb{C}$ je jednoducho súvislá oblasť a $f : G \to \mathbb{C}$ funkcia holomorfná v G. Potom pre každú uzavretú cestu φ v G platí

$$\int_\varphi f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Dôkaz Vety 29.

Dôkaz vykonáme pre prípad, keď φ je Jordanova cesta (po častiach regulárna, jednoduchá a uzavretá krivka). Podľa formuly (75) platí

$$\int_\varphi f(z)\,\mathrm{d}z = \int_\varphi [u(x,y)\,\mathrm{d}x - v(x,y)\,\mathrm{d}y] + \mathrm{i}\int_\varphi [v(x,y)\,\mathrm{d}x + u(x,y)\,\mathrm{d}y],$$

kde u, v označujú reálnu a imaginárnu časť funkcie f, t.j., $f = u + \mathrm{i}v$. Keďže f je holomorfná v G, z Definície 2 a Vety 9 vyplýva, že reálne funkcie u a v sú (spojito) diferencovateľné v G a spĺňajú Cauchyho–Riemannove rovnosti

$$u'_x(x,y) = v'_y(x,y), \quad u'_y(x,y) = -v'_x(x,y), \quad [x,y] \in G. \tag{81}$$

Aplikovaním Greenovej integrálnej vety na dva vyššie uvedené (reálne) krivkové integrály II. druhu a s označením $D := \operatorname{Int}\varphi \cup \langle\varphi\rangle$ dostaneme

$$\int_\varphi [u(x,y)\,\mathrm{d}x - v(x,y)\,\mathrm{d}y] = \iint_D \left[-v'_x(x,y) - u'_y(x,y)\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$\overset{(81)}{=} \iint_D 0\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0,$$

Dôkaz Vety 29 (pokračovanie).

$$\int_\varphi [v(x,y)\,\mathrm{d}x + u(x,y)\,\mathrm{d}y] = \iint_D \left[u'_x(x,y) - v'_y(x,y)\right] \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \overset{(81)}{=} \iint_D 0\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0.$$

Z posledných dvoch rovností potom vyplýva $\int_\varphi f(z)\,\mathrm{d}z = 0 + \mathrm{i}0 = 0$. ■

Predpokladajúc spojitosť funkcie f v G, platí i obrátené tvrdenie ku Cauchyho integrálnej vete.

Veta 30 (Morerova veta)

Nech funkcia f je spojitá v otvorenej množine $G \subseteq \mathbb{C}$ a nech krivkový integrál $\int_\varphi f(z)\,\mathrm{d}z$ nezávisí v G na integračnej ceste, t.j.,

$$\int_\varphi f(z)\,\mathrm{d}z = 0 \quad \textit{pre každú uzavretú cestu } \varphi \textit{ v } G.$$

Potom f je funkcia holomorfná v G.

Nasledujúce vety majú význam pri samotnom počítaní hodnôt integrálov pozdĺž uzavretých kriviek. Za istých predpokladov umožňujú zámenu integračnej cesty, čím sa celý výpočet integrálu môže výrazne zjednodušiť.

Veta 31 (Princíp deformácie krivky)

Nech φ, ψ *sú dve kladne orientované Jordanove cesty v* $\mathbb{C}$ *také, že* $\langle\psi\rangle \subseteq \operatorname{Int}\varphi$. *Nech* f *je funkcia holomorfná v* $\operatorname{Ext}\psi \cap \operatorname{Int}\varphi$ *a spojitá a konečná na uzávere množiny* $\operatorname{Ext}\psi \cap \operatorname{Int}\varphi$, *t.j., na množine* $\overline{\operatorname{Ext}\psi \cap \operatorname{Int}\varphi}$. *Potom platí*

$$\int_{\varphi} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\psi} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Veta 32 (Zovšeobecnený princíp deformácie krivky)

Nech φ, $\underline{\psi_j,\ j} = 1, \ldots, n$, *sú kladne orientované Jordanove cesty v* $\mathbb{C}$ *také, že množiny* $\operatorname{Int}\psi_j$ *sú po dvoch disjunktné a* $\langle\psi_j\rangle \subseteq \operatorname{Int}\varphi$ *pre* $j = 1, \ldots, n$. *Nech* f *je funkcia holomorfná v* $\operatorname{Int}\varphi \setminus \bigcup_{j=1}^{n} \overline{\operatorname{Int}\psi_j}$ *a spojitá a konečná na uzávere* $\operatorname{Int}\varphi \setminus \bigcup_{j=1}^{n} \overline{\operatorname{Int}\psi_j}$, *t.j., na množine* $\overline{\operatorname{Int}\varphi} \setminus \bigcup_{j=1}^{n} \operatorname{Int}\psi_j$. *Potom platí*

$$\int_{\varphi} f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{j=1}^{n} \int_{\psi_j} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Veta 33 (Cauchyho integrálna formula)

Nech φ *je kladne orientovaná Jordanova cesta v* $\mathbb{C}$ *a nech* $f : \overline{\mathit{Int}\,\varphi} \to \mathbb{C}$ *je funkcia holomorfná v* $\mathit{Int}\,\varphi$ *a spojitá a konečná na* $\overline{\mathit{Int}\,\varphi}$. *Potom platí*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\varphi \frac{f(z)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z \quad \textit{pre každé } z_0 \in \mathit{Int}\,\varphi.$$

Veta 34 (Cauchyho integrálna formula pre n-tú deriváciu)

Nech $G \subseteq \mathbb{C}$ *je jednoducho súvislá oblasť a* $f : G \to \mathbb{C}$ *funkcia holomorfná v* G. *Potom pre každé* $n \in \mathbb{N}_0$ *a pre každú kladne orientovaná Jordanova cestu* φ *v* $\mathbb{C}$, *ležiacu v* G, *platí*

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\varphi \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}z \quad \textit{pre každé } z_0 \in \mathit{Int}\,\varphi.$$

Vety 29, 31, 32, 33 a 34 predstavujú základné nástroje na praktické počítanie hodnôt niektorých typov komplexných krivkových integrálov pozdĺž uzavretých ciest. Neskôr, zavedením pojmu rezíduum funkcie, tieto techniky podstatne rozšírime.

Vlastnosti holomorfných funkcií

Predchádzajúce výsledky Cauchyho teórie majú niekoľko významných dôsledkov v teórii holomorfných funkcií.

Dôsledok 4 (Vety 29)

Ku každej funkcii, ktorá je holomorfná v jednoducho súvislej oblasti $G \subseteq \mathbb{C}$, existuje funkcia primitívna v G.

Dôsledok 5 (Vety 34)

Nech f je funkcia holomorfná v otvornej množine $G \subseteq \mathbb{C}$. Potom f má v G komplexné derivácie všetkých rádov, ktoré sú holomorfné v G.

Poznámka 8

Podľa Dôsledku 5 a Definície 2 teda z existencie prvej komplexnej derivácie na otvorenej množine vyplýva i existencia všetkých komplexných derivácií na tejto množine. V reálnej analýze podobné tvrdenie rozhodne neplatí.

Celé funkcie

Definícia 6 (Celá funkcia)

Funkcia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sa nazýva celá, ak je holomorfná v celej komplexnej rovine.

Poznámka 9

Príkladom celých funkcií sú polynómy v $\mathbb{C}$. Celé funkcie, ktoré nie sú polynómy, sa označuju ako celé transcendentné funkcie. Exponenciálna funkcia e^z, resp. goniometrické funkcie $\sin z$ a $\cos z$ alebo hypebolické funkcie $\operatorname{sh} z$ a $\operatorname{ch} z$ sú celé transcendentné funkcie.

Veta 35

Nech f je celá funkcia a $n \in \mathbb{N}$. Potom f je polynóm stupňa menšieho ako n práve vtedy, keď platí $\lim_{z\to\infty} f(z)/z^n = 0$.

Veta 36 (Liouvilleova)

Celá funkcia je ohraničená na celom $\mathbb{C}$ práve vtedy, keď je konštantná v $\mathbb{C}$.

Dôkaz Vety 36.

Nech f je celá funkcia, ktorá je ohraničená na $\mathbb{C}$, t.j., existuje $K \in \mathbb{R}^+$ také, že $|f(z)| \leq K$ pre každé $z \in \mathbb{C}$. Potom platí

$$0 \leq \left| \frac{f(z)}{z} \right| \leq \frac{K}{|z|} \underset{z\to\infty}{\longrightarrow} 0, \quad \text{teda} \quad \lim_{z\to\infty} \left| \frac{f(z)}{z} \right| = 0.$$

Posledná limita je ekvivalentná s $\lim_{z\to\infty} f(z)/z = 0$. Funkcia f je preto podľa Vety 35 polynóm stupňa menšieho ako 1, teda konštantná v celom $\mathbb{C}$. Opačná implikácia platí triviálne. ∎

Veta 37 (Malá Picardova veta)

Obor hodnôt každej nekonštantnej celej funkcie je celé $\mathbb{C}$ s výnimkou nanajvyš jednej hodnoty.

Poznámka 10

Malá Picardova veta je zosilnenie Liouvilleovej vety 36. Napríklad celá funkcia e^z nadobúda všetky komplexné hodnoty okrem hodnoty 0, kým goniometrické funkcie $\sin z$ a $\cos z$ majú za obor hodnôt celú komplexnú rovinu.

Komplexný Taylorov rad

Veta 38 (Taylorova veta)

Nech funkcia f je pre dané $z_0 \in \mathbb{C}$ a $R \in \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$ definovaná a holomorfná na otvorenom kruhu $K(z_0, R)$. Potom platí

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n \quad \text{pre každé } z \in K(z_0, R). \tag{82}$$

Vyjadrenie v (82) sa označuje ako Taylorov rozvoj funkcie f v okolí bodu z_0, pričom mocninový rad na pravej strane danej formuly sa nazýva Taylorov rad funkcie f so stredom v bode z_0.

Poznámka 11

Taylorov rozvoj funkcie f v okolí bodu z_0 je, ako rozvoj do mocninového radu v okolí z_0, určený jednoznačne. To znamená, že každý mocninový rad so stredom v bode z_0, ktorý má za svoj súčet funkciu f, je Taylorovym radom funkcie f na príslušnom konvergenčnom kruhu. Toto pozorovanie má svoje uplatnenie najmä pri praktickom hľadaní mocninových rozvojov komplexných funkcií (Príklad 44).

Veta 39

Nech funkcia f je definovaná na oblasti $G \subseteq \mathbb{C}$. Potom f je holomorfná v G práve vtedy, keď je v okolí každého bodu $z_0 \in G$ rozvinuteľná do mocninového radu.

Veta 40

Funkcia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je celá práve vtedy, keď je v okolí každého bodu $z_0 \in \mathbb{C}$ rozvinuteľná do mocninového radu, ktorý konverguje v celej komplexnej rovine.

Príklad 39

Vypočítajme krivkový integrál

$$\int_\varphi (z + 1/z)\,\mathrm{d}z$$

pozdĺž kružnice φ s predpisom $|z - 2| = 1$. Funkcia $f(z) = z + 1/z$ je zrejme holomorfná v jednoducho súvislej oblasti $G = \{z \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}\, z > 0\}$. A nakoľko φ je uzavretá cesta s $\langle\varphi\rangle \subseteq G$, podľa Cauchyho integrálnej vety 29 je integrál v zadaní príkladu rovný 0.

Príklad 40

Určme krivkový integrál

$$I = \int_{\varphi} (z + 1/z)\,\mathrm{d}z,$$

kde φ je kladne orientovaný obvod štvorca s vrcholmi v bodoch $2 + 2\mathrm{i}$, $-2 + 2\mathrm{i}$, $-2 - 2\mathrm{i}$ a $2 - 2\mathrm{i}$. Ukážeme tri spôsoby riešenia tohto príkladu.
a) Deformácia krivky, Cauchyho integrálna veta: Nech ψ je kladne orientovaná kružnica s predpisom $|z| = 1$. Nie je ťažké overiť, že pre krivky φ, ψ a funkciu $f(z) = z + 1/z$ sú splnené predpoklady Vety 31. Preto máme

$$I = \int_{\psi} (z + 1/z)\,\mathrm{d}z = \int_{\psi} z\,\mathrm{d}z + \int_{\psi} (1/z)\,\mathrm{d}z.$$

Nakoľko funkcia $g(z) = z$ je holomorfná na $\operatorname{Int}\psi$, integrál $\int_{\psi} z\,\mathrm{d}z = 0$, podľa Cauchyho integrálnej vety 29. Z Príkladu 37 zas vieme, že $\int_{\psi} (1/z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}$. Preto hodnota integrálu v zadaní príkladu je $I = 0 + 2\pi\mathrm{i} = 2\pi\mathrm{i}$.
b) Cauchyho integrálna formula: Integrál v zadaní príkladu upravíme na tvar

$$I = \int_{\varphi} \frac{z^2 + 1}{z}\,\mathrm{d}z.$$

Príklad 40

Funkcia $f(z) = z^2 + 1$ je iste holomorfná v $\operatorname{Int}\varphi$, spojitá a konečná na $\overline{\operatorname{Int}\varphi}$, a $z_0 = 0 \in \operatorname{Int}\varphi$. V súlade s Vetou 33 potom platí

$$I = 2\pi \mathrm{i}\, f(0) = 2\pi \mathrm{i}.$$

c) Priamy výpočet krivkového integrálu: Po častiach hladká Jordanova krivka φ pozostáva zo 4 orientovaných úsečiek

$$\varphi_1(t) = 2t - 2\mathrm{i}, \quad \varphi_2(t) = 2 + 2\mathrm{i}t, \quad \varphi_3(t) = -2t + 2\mathrm{i}, \quad \varphi_4(t) = -2 - 2\mathrm{i}t,$$

kde $t \in [-1, 1]$. Integrál v zadaní príkladu má teda vyjadrenie

$$I = \int_{\varphi_1} (z + 1/z)\,\mathrm{d}z + \int_{\varphi_2} (z + 1/z)\,\mathrm{d}z + \int_{\varphi_3} (z + 1/z)\,\mathrm{d}z + \int_{\varphi_4} (z + 1/z)\,\mathrm{d}z.$$

Pomocou rovnosti (74) v Definícii 3 postupne dostaneme

$$\int_{\varphi_1} (z + 1/z)\,\mathrm{d}z = \int_{-1}^{1} \left(2t - 2\mathrm{i} + \frac{1}{2t - 2\mathrm{i}}\right) \cdot 2\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} \left(4t - 4\mathrm{i} + \frac{1}{t - \mathrm{i}}\right) \mathrm{d}t,$$

Príklad 40

$$\int_{\varphi_2} (z + 1/z)\,\mathrm{d}z = \int_{-1}^{1} \left(2 + 2\mathrm{i}t + \frac{1}{2 + 2\mathrm{i}t}\right) \cdot 2\mathrm{i}\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} \left(4\mathrm{i} - 4t + \frac{1}{t - \mathrm{i}}\right) \mathrm{d}t,$$

$$\int_{\varphi_3} (z + 1/z)\,\mathrm{d}z = \int_{-1}^{1} \left(2\mathrm{i} - 2t + \frac{1}{2\mathrm{i} - 2t}\right) (-2)\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} \left(4t - 4\mathrm{i} + \frac{1}{t - \mathrm{i}}\right) \mathrm{d}t,$$

$$\int_{\varphi_4} (z + 1/z)\,\mathrm{d}z = \int_{-1}^{1} \left(-2 - 2\mathrm{i}t - \frac{1}{2 + 2\mathrm{i}t}\right) (-2\mathrm{i})\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} \left(4\mathrm{i} - 4t + \frac{1}{t - \mathrm{i}}\right) \mathrm{d}t.$$

Pre integrál I teda platí

$$I = 4\int_{-1}^{1} \frac{1}{t - \mathrm{i}}\,\mathrm{d}t = 4\int_{-1}^{1} \frac{t + \mathrm{i}}{(t - \mathrm{i})(t + \mathrm{i})}\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} \frac{4t}{t^2 + 1}\,\mathrm{d}t + \mathrm{i}\int_{-1}^{1} \frac{4}{t^2 + 1}\,\mathrm{d}t.$$

Reálna časť z I je nulová, nakoľko integrand $4t/(t^2 + 1)$ je nepárna funkcia v argumente t. Preto, v súlade s predchádzajúcimi dvoma postupmi, dostaneme

$$I = \mathrm{i}\int_{-1}^{1} \frac{4}{t^2 + 1}\,\mathrm{d}t = \mathrm{i}\,[4\operatorname{arctg} t]_{-1}^{1} = 2\pi\mathrm{i}.$$

Príklad 41

Vypočítajme krivkový integrál

$$I = \int_{\varphi} \frac{\sin\left(\pi z/4\right)}{z^2-1}\,\mathrm{d}z$$

pozdĺž kladne orientovanej kružnice φ s vyjadrením $z(t) = 2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, kde $t \in [0, 2\pi]$. Funkcia pod integrálom je holomorfná všade v danom otvorenom kruhu okrem bodov $z = \pm 1$, ako vyplýva z rozkladu $z^2 - 1 = (z-1)(z+1)$. Príklad možno riešiť dvoma prístupmi (samozrejme, okrem priameho výpočtu :-)).
a) Deformácia krivky, Cauchyho integrálna formula: Nech ψ_1, ψ_2 sú dve kladne orientované kružnice s vyjadreniami

$$\psi_1 \;:\; |z-1| = 1/2, \qquad \psi_2 \;:\; |z+1| = 1/2.$$

Ľahko sa presvedčíme, že pre krivky φ, ψ_1 a ψ_2 a funkciu pod integrálom v zadaní príkladu sú splnené všetky predpoklady Vety 32. Preto pre I máme

$$I = \int_{\psi_1} \frac{\sin\frac{\pi z}{4}}{z^2-1}\,\mathrm{d}z + \int_{\psi_2} \frac{\sin\frac{\pi z}{4}}{z^2-1}\,\mathrm{d}z = \int_{\psi_1} \frac{\frac{\sin(\pi z/4)}{z+1}}{z-1}\,\mathrm{d}z + \int_{\psi_2} \frac{\frac{\sin(\pi z/4)}{z-1}}{z+1}\,\mathrm{d}z.$$

Príklad 41

Funkcia $\sin(\pi z/4)/(z+1)$ je holomorfná v Int ψ_1 a funkcia $\sin(\pi z/4)/(z-1)$ je holomorfná v Int ψ_2. Aplikovaním Cauchyho integrálnej formuly vo Vete 33 na posledné dva integrály dostaneme

$$I = 2\pi\mathrm{i}\left[\frac{\sin(\pi z/4)}{z+1}\right]_{z=1} + 2\pi\mathrm{i}\left[\frac{\sin(\pi z/4)}{z-1}\right]_{z=-1} = \frac{\pi\mathrm{i}}{\sqrt{2}} + \frac{\pi\mathrm{i}}{\sqrt{2}} = \pi\mathrm{i}\sqrt{2}.$$

b) Rozklad na parciálne zlomky, Cauchyho integrálna formula: Racionálnu lomenú funkciu $1/(z^2-1)$ rozložíme na parciálne zlomky. Dostaneme

$$\frac{1}{z^2-1} = \frac{1/2}{z-1} - \frac{1/2}{z+1}.$$

Dosadením do integrálu I v zadaní príkladu máme

$$I = \int_\varphi \left(\frac{\frac{1}{2}\sin\frac{\pi z}{4}}{z-1} - \frac{\frac{1}{2}\sin\frac{\pi z}{4}}{z+1}\right)\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\int_\varphi \frac{\sin\frac{\pi z}{4}}{z-1}\,\mathrm{d}z - \frac{1}{2}\int_\varphi \frac{\sin\frac{\pi z}{4}}{z+1}\,\mathrm{d}z.$$

Keďže funkcia $\sin(\pi z/4)$ je holomorfná v Int φ, podľa Vety 33 platí

$$I = \pi\mathrm{i}\left[\sin(\pi z/4)\right]_{z=1} - \pi\mathrm{i}\left[\sin(\pi z/4)\right]_{z=-1} = \pi\mathrm{i}/\sqrt{2} + \pi\mathrm{i}/\sqrt{2} = \pi\mathrm{i}\sqrt{2}.$$

Príklad 42

Stanovme integrál
$$I = \int_{\varphi} \frac{z\mathrm{e}^z}{(z+2-\pi\mathrm{i})^3}\,\mathrm{d}z,$$
kde φ je kladne orientovaná kružnica so stredom v bode $\pi\mathrm{i}-2$ a polomerom 1. Funkcia $f(z) = z\mathrm{e}^z$ je holomorfná v celej komplexnej rovine. Integrál I má tvar $I = \int_{\varphi} \frac{z\mathrm{e}^z}{(z-[\pi\mathrm{i}-2])^3}\,\mathrm{d}z$, pričom bod $z_0 = \pi\mathrm{i}-2 \in \operatorname{Int}\varphi$. Podľa Vety 34 pre $n=2$ potom platí
$$I = (2\pi\mathrm{i}/2!)\cdot f''(z_0) = \pi\mathrm{i}\,(z\mathrm{e}^z)''|_{z=\pi\mathrm{i}-2}.$$
Elementárnym derivovaním dostaneme $(z\mathrm{e}^z)'' = \mathrm{e}^z(z+2)$, a teda hodnota integrálu v zadaní príkladu je $I = \pi\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}-2}\pi\mathrm{i} = (\pi/\mathrm{e})^2$.

Poznámka 12

Poznamenajme, že v Príkladoch 41 a 42 by priamy výpočet integrálov, t.j., podľa Definície 3, bol veľmi obtiažny, ak nie celkom nemožný.

Príklad 43

Určme Taylorov rad funkcie $f(z) = \log(1+z)$ so stredom v $z_0 = 0$. Funkcia f je podľa Vety 23 definovaná a holomorfná v otvorenom kruhu $K(0,1)$. Podľa Vety 38 potom vieme, že hľadaný rad existuje a v súlade s (82) má tvar

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n \qquad z \in K(0,1).$$

Postupným výpočtom zistíme

$$f(0) = 0, \quad f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Preto platí (Taylorov) rozvoj

$$\log(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \cdots, \qquad z \in K(0,1).$$

Príklad 44

Rozviňme funkciu $f(z) = 1/(3-z)$ do mocninového radu

a) v okolí bodu $z_0 = 0$, b) v okolí bodu $z_0 = -1 + 3\mathrm{i}$.

a) Predpis pre funkciu f vhodne upravíme

$$f(z) = \frac{1}{3-z} = \frac{1}{3\,(1-z/3)} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(1-z/3)}.$$

Zlomok $1/[1-(z/3)]$ je však pre $|z/3| < 1$ súčtom nekonečného geometrického radu s prvým členom 1 a s kvocientom $z/3$, t.j.,

$$\frac{1}{1-z/3} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{3}\right)^n \quad \text{pre každé } |z| < 3.$$

Preto pre funkciu f platí mocninový rozvoj

$$f(z) = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^{n+1}}\,z^n, \quad |z| < 3.$$

Príklad 44

Posledná rovnosť zároveň predstavuje, v súlade s Poznámkou 11, Taylorov rozvoj funkcie f v okolí bodu 0, platný na otvorenom kruhu $K(0,3)$.
b) Funkciu f opäť vhodne upravíme a rozvinieme do geometrického radu

$$f(z)=\frac{1}{3-z}=\frac{1}{4-3\mathrm{i}-(z+1-3\mathrm{i})}=\frac{1}{(4-3\mathrm{i})\left(1-\frac{z+1-3\mathrm{i}}{4-3\mathrm{i}}\right)}$$

$$=\frac{1}{4-3\mathrm{i}}\cdot\frac{1}{1-\frac{z+1-3\mathrm{i}}{4-3\mathrm{i}}}=\frac{1}{4-3\mathrm{i}}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z+1-3\mathrm{i}}{4-3\mathrm{i}}\right)^{n},\quad \left|\frac{z+1-3\mathrm{i}}{4-3\mathrm{i}}\right|<1.$$

Posledná podmienka konvergencie kladená na z je ekvivalentná s

$$|z+1-3\mathrm{i}|<|4-3\mathrm{i}|=5,\qquad \text{a teda}\qquad z\in K(-1+3\mathrm{i},5).$$

Pre funkciu f sme našli mocninový rozvoj tvaru

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(4-3\mathrm{i})^{n+1}}(z+1-3\mathrm{i})^{n},$$

platný na otvorenom kruhu $K(-1+3\mathrm{i},5)$. Zároveň je to i Taylorov rozvoj f v okolí bodu $-1+3\mathrm{i}$.

Obsah

Laurentov rad

Nech $z_0, a_n,\ n \in \mathbb{Z}$, sú pevne dané komplexné čísla. Súčet funkcionálnych radov

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z - z_0)^{-n} \tag{83}$$

nazývame Laurentov rad so stredom v bode z_0 a s koeficientami a_n a značíme ho symbolom $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$, prípadne $\sum_{-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$. Mocninový rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ sa nazýva regulárna časť Laurentovho radu (83), kým rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z - z_0)^{-n}$ sa označuje ako jeho hlavná časť. Hovoríme, že rad (83) konverguje v bode $z \in \mathbb{C}$, ak v z konverguje jeho regulárna i hlavná časť. Dá sa ukázať, že pre každý rad (83) existuje práve jedna dvojica $0 \le r, R \le \infty$ taká, že rad (83) konverguje v medzikruží

$$P(z_0, r, R) = \{z \in \mathbb{C},\ r < |z - z_0| < R\}$$

a diverguje pre $|z - z_0| < r$ a $|z - z_0| > R$. Ak $r > R$, potom rad (83) zrejme diverguje v celej komplexnej rovine. Pokiaľ $r = R$, rad (83) môže konvergovať maximálne v bodoch kružnice $|z - z_0| = r$. Pre $r < R$ je množina $P(z_0, r, R)$ neprázdna a nazýva sa medzikružie konvergencie radu (83). Poznamenajme, že rad (83) môže konvergovať i v istých bodoch kružníc $|z - z_0| = r$, $|z - z_0| = R$.

Veta 41

Nech Laurentov rad (83) má neprázdne medzikružie konvergencie $P(z_0, r, R)$. Potom tento rad konverguje absolútne a skoro rovnomerne v $P(z_0, r, R)$. Jeho súčet f je funkcia holomorfná v $P(z_0, r, R)$ a platí

$$f'(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (n+1)a_{n+1}(z - z_0)^n \quad \textit{pre každé } z \in P(z_0, r, R). \tag{84}$$

Veta 42 (Laurentova)

Nech $z_0 \in \mathbb{C}$, $0 \le r < R \le \infty$, a nech f je funkcia holomorfná v $P(z_0, r, R)$. Potom existuje Laurentov rad $\sum_{-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ s medzikružím konvergencie $P(z_0, r, R)$ a so súčtom f (na $P(z_0, r, R)$). Naviac, pre koeficienty a_n platí

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \, \mathrm{d}z \quad \textit{pre každé } n \in \mathbb{Z}, \tag{85}$$

kde φ je ľubovoľná kladne orientovaná kružnica $|z - z_0| = \varrho$ s $r < \varrho < R$.

Poznámka 13

Laurentov rozvoj funkcie f na medzikruží $P(z_0, r, R)$ v Laurentovej vete 42 je určený jednoznačne. Inými slovami, každý rad (83) s medzikružím konvergencie $P(z_0, r, R)$, ktorý má za svoj súčet funkciu f, je Laurentov rad pre funkciu f na $P(z_0, r, R)$ a jeho koeficienty a_n majú tvar (85) (tzv. Laurentove koeficienty funkcie f v $P(z_0, r, R)$). Poznamenajme, že Taylorov rozvoj funkcie f v okolí bodu z_0 je špeciálny prípad Laurentovho rozvoja f na medzikruží $P(z_0, 0, R)$.

Obzvlášť dôležitý je Laurentov rozvoj funkcie f na medzikruží typu $P(z_0, 0, R)$, teda na prstencovom okolí $K^*(z_0, R)$ bodu z_0. V takomto prípade hovoríme o Laurentovom rozvoji funkcie f v okolí bodu z_0. Pripomeňme, že podľa Vety 42 požadujeme, aby funkcia f bola holomorfná na množine $K^*(z_0, R)$, avšak nie nutne v samotnom bode z_0 (pozri Definíciu 2).
Laurentov rad funkcie f je možné definovať i so stredom v nevlastnom bode ∞. Ak funkcia $g(z) = f(1/z)$ je holomorfná na nejakom medzikruží so stredom v $z_0 = 0$, t.j., v $P(0, r, R)$ s $0 \leq r < R \leq \infty$, potom je možné podľa Laurentovej vety 42 rozvinúť funkciu $g(z)$ do Laurentovho radu v medzikruží $P(0, r, R)$

$$g(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} z^{-n}, \quad z \in P(0, r, R). \tag{86}$$

Rad v (86) potom označujeme ako Laurentov rad funkcie f so stredom v bode ∞. Nakoľko $g(z) = f(1/z)$, rad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}$ je jeho regulárna časť, kým rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} z^n$ sa chápe ako jeho hlavná časť. Viac to osvetlíme na Príklade 49.

Príklad 45

Nájdime Laurentov rad so stredom $z_0 = 0$ funkcie $f(z) = 1/z$. Funkcia f je holomorfná v každom prstencovom okolí $K^*(0,R)$, $R > 0$. Preto podľa Vety 42 a Poznámky 13 pre každé $R > 0$ existuje jediný Laurentov rad (83) funkcie f v $P(0,0,R) = K^*(0,R)$ s koeficientami

$$a_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\varphi} \frac{1/z}{z^{n+1}} \, \mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\varphi} z^{-(n+2)} \, \mathrm{d}z, \quad n \in \mathbb{Z},$$

kde φ je ľubovoľná kružnica $|z| = \varrho$ s $0 < \varrho < R$. Z Príkladu 37 (pre $z_0 = 0$) však vyplýva, že $a_{-1} = 1$ a $a_n = 0$ pre $n \neq -1$ pre každé $\rho > 0$ nezávisle na výbere hodnoty R. To znamená, že dokonca existuje jediný Laurentov rozvoj funkcie f platný na každom prstencovom okolí $P(0,0,R)$ bodu $z_0 = 0$. Teda

$$f(z) = z^{-1} \quad \text{pre každé } z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Poznamenajme, že tento výsledok vyplýva ihneď zo zadania príkladu, nakoľko samotná funkcia f má už tvar Laurentovho radu (83) so stredom v $z_0 = 0$.

Príklad 46

Určme Laurentov rad so stredom $z_0 = 0$ funkcie $f(z) = \sin^2 z$. Keďže funkcia f je holomorfná v celom $\mathbb{C}$, v súlade s Laurentovou vetou 42, Poznámkou 13 a úvahami v predchádzajúcom príklade, existuje jediný hľadaný Laurentov rad platný všade v $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Stačí teda nájsť akýkoľvek rozvoj typu (83) pre funkciu f v okolí bodu $z_0 = 0$. Z definície funkcie $\sin z$ v (48) máme

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} \quad \text{pre každé } z \in \mathbb{C}.$$

Pre funkciu $f(z) = \sin^2 z$ potom platí

$$\begin{aligned} f(z) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} \right) \cdot \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} z^{2m+1} \right) \\ &= \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots \right) \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots \right) = z^2 - \frac{1}{6} z^4 + \frac{2}{45} z^6 + \cdots . \end{aligned}$$

Poznamenajme, že získaný Laurentov rozvoj má nulovú hlavnú časť. Je to teda Taylorov rozvoj funkcie f v okolí bodu $z_0 = 0$ platiaci na celom $\mathbb{C}$, dokonca i v bode $z_0 = 0$.

Príklad 47

Stanovme Laurentov rozvoj funkcie

$$f(z) = \frac{1}{(\mathrm{e}^z - 1)\sin z}$$

na nejakom medzikruží so stredom v bode $z_0 = 0$. Ľahko sa presvedčíme, že funkcia f je holomorfná napríklad na medzikruží $P(0, \pi, 2\pi)$, kde platia rozvoje

$$\mathrm{e}^z - 1 = z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots, \qquad \sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \cdots,$$

$$(\mathrm{e}^z - 1)\sin z = \left(z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!}\right)\left(z - \frac{z^3}{3!} + \cdots\right) = z^2 + \frac{z^3}{2} - \frac{z^5}{24} + \cdots.$$

Pre funkciu $f(z) = 1/\left[(\mathrm{e}^z - 1)\sin z\right]$ potom na $P(0, \pi, 2\pi)$ platí

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + z^3/2 - z^5/24 + \cdots} = z^{-2} - \frac{1}{2}\, z^{-1} + \frac{1}{4} - \frac{1}{12}\, z + \frac{1}{48}\, z^2 + \cdots.$$

Všimnime si, že hlavná časť získaného Laurentovho radu funkcie f obsahuje len konečne veľa nenulových členov, nakoľko $a_{-1} = -1/2$, $a_{-2} = 1$ a $a_{-n} = 0$ pre každé prirodzené $n \geq 3$.

Príklad 48

Rozviňme funkciu

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$$

do Laurentovho radu so stredom $z_0 = 0$ na vhodnom medzikruží. Funkcia f je holomorfná na medzikružiach $P(0,0,1)$, $P(0,1,2)$ a $P(0,2,\infty)$, pričom platí

$$f(z) = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} = \frac{1}{z-2} + \frac{1}{1-z}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{1,2\}.$$

Každý prípad medzikružia vyriešime osobitne.
a) Medzikružie $P(0,0,1)$: Keďže $0 < |z| < 1$, platia mocninové rozvoje

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} z^n,$$

$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-z/2} = -\frac{1}{2} \cdot \left[1 + \frac{z}{2} + \left(\frac{z}{2}\right)^2 + \cdots\right] = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} z^n.$$

Poznamenajme, že druhý mocninový rozvoj konverguje pre $|z| < 2$. Funkcia f má potom v $P(0,0,1)$ (podľa Poznámky 13 jediný) Laurentov rozvoj

Príklad 48

$$f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}} \right) z^n.$$

Jedná sa teda o Taylorov rozvoj funkcie f v okolí 0, nakoľko f je holomorfná i v bode $z_0 = 0$.

b) Medzikružie $P(0,1,2)$: V tomto prípade $1 < |z| < 2$, preto výraz $1/(1-z)$ rozvinieme do mocnín premennej z nasledovným spôsobom

$$\frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-1/z} = -\frac{1}{z} \cdot \left[1 + \frac{1}{z} + \left(\frac{1}{z} \right)^2 + \cdots \right] = -\sum_{n=1}^{\infty} z^{-n}.$$

Zlomok $1/(z-2)$ má rovnaký rozvoj ako v prípade a). Príslušný Laurentov rad funkcie f má potom tvar

$$f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} z^n - \sum_{n=1}^{\infty} z^{-n} \quad \text{pre každé } z \in P(0,1,2).$$

c) Medzikružie $P(0,2,\infty)$: Teraz máme $|z| > 2$, a preto funkcia $1/(1-z)$ má rovnaký rozvoj ako v b). Na druhej strane, pre výraz $1/(z-2)$ platí

Príklad 48

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-2/z} = \frac{1}{z} \cdot \left[1 + \frac{2}{z} + \left(\frac{2}{z}\right)^2 + \cdots\right] = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} z^{-n}.$$

To znamená, že funkcia f má v medzikruží $P(0, 2, \infty)$ jediný Laurentov rozvoj

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} z^{-n} - \sum_{n=1}^{\infty} z^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(2^{n-1} - 1\right) z^{-n}.$$

Tento Laurentov rozvoj má iba hlavnú časť, jeho regulárna časť je nulová.

Príklad 49

Nájdime Laurentove rady funkcie f z Príkladu 48 so stredom $z_0 = \infty$. V súlade s vyššie uvedenou definíciou sa jedná o Laurentove rozvoje funkcie $f(1/z)$ so stredom v bode 0, pričom vo výsledných formulách zameníme premennú z za $1/z$. Ľahko sa ukáže, že takto získaný rozvoj funkcie f (so stredom $z_0 = \infty$) je totožný s Laurentovym rozvojom funkcie f so stredom v bode 0 v príslušnom medzikruží konvergencie. Konkrétne, v Príklade 48 sme našli Laurentov rozvoj funkcie f pre $0 < |z| < 1$. Tento rozvoj je možné potom interpretovať ako Laurentov rozvoj f so stredom v ∞ pri zamenenom označení jeho častí, t.j.,

Príklad 49

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}\right)z^n=\underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{regulárna časť rozvoja}}+\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}\right)z^n}_{\text{hlavná časť rozvoja}}.$$

Podobne, pre $1<|z|<2$ z predchádzajúceho príkladu a s novou interpretáciou dostaneme Laurentov rozvoj funkcie f so stredom v bode ∞

$$f(z)=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}z^n-\sum_{n=1}^{\infty}z^{-n}=\underbrace{\left[-\frac{1}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}z^{-n}\right]}_{\text{regulárna časť rozvoja}}+\underbrace{\left[-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}z^n\right]}_{\text{hlavná časť rozvoja}}.$$

V prípade $2<|z|$ máme nasledovný Laurentov rozvoj funkcie f v okolí ∞

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(2^{n-1}-1\right)z^{-n}.$$

V aktuálnej interpretácii má tento rozvoj iba regulárnu časť, jeho hlavná časť je nulová.

Izolované singularity komplexných funkcií

Nech f je komplexná funkcia. Bod $z_0 \in \tilde{\mathbb{C}}$ sa nazýva izolovanou singularitou (izolovaným singulárnym bodom) funkcie f, ak f je holomorfná na nejakom prstencovom okolí $K^*(z_0, R)$ bodu z_0, avšak nie je holomorfná v samotnom z_0. Potom, podľa Vety 42, existuje Laurentov rozvoj (83) funkcie f v okolí bodu z_0 (presnejšie, v medzikruží $K^*(z_0, R)$). Ak hlavná časť tohto radu je nulová, t.j., $a_{-n} = 0$ pre každé $n \in \mathbb{N}$, potom z_0 je odstrániteľná singularita funkcie f. V prípade, ak hlavná časť radu (83) má len konečne veľa nenulových členov, t.j., existuje $k \in \mathbb{N}$ tak, že $a_{-k} \neq 0$ a $a_{-n} = 0$ pre každé prirodzené $n > k$, potom bod z_0 sa označuje ako pól rádu k. Nakoniec, izolovanú singularitu z_0 funkcie f nazývame podstatnou, ak hlavná časť Laurentovho radu (83) má nekonečne veľa nenulových členov. Póly a podstatné singularity sa súhrne označujú ako neodstraniteľné singularity.

Veta 43 (Liouvilleova)

Celá funkcia je holomorfná v bode ∞, resp. má v ∞ odstrániteľnú singularitu práve vtedy, keď je konštantná v $\mathbb{C}$.

Dôsledok 6

Každá nekonštantná celá funkcia má v bode ∞ pól alebo podstatnú singularitu.

Poznámka 14

Nie je ťažké ukázať, že polynóm stupňa $m \geq 1$ má v nevlastnom bode ∞ pól rádu m. Naproti tomu celé transcendetné funkcie e^z, $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{sh} z$ a $\operatorname{ch} z$ majú v bode ∞ podstatnú singularitu.

Veta 44 (Veľká Picardova veta)

Nech komplexná funkcia f má v bode $z_0 \in \tilde{\mathbb{C}}$ podstatnú singularitu. Potom v každom prstencovom okolí bodu z_0 nadobúda f všetky konečné komplexné hodnoty s výnimkou nanajvyš jednej.

Poznámka 15

Funkcia $f(z) = \mathrm{e}^{1/z}$ má v bode $z_0 = 0$ podstatnú singularitu, ako ukazujeme v Príklade 51. V súlade s Vetou 44 nadobúda f v každom prstencovom okolí bodu 0 všetky komplexné hodnoty okrem hodnoty 0.

Nasledujúca veta poskytuje kritérium na zistenie typu izolovaného singulárneho bodu funkcie prostredníctvom skúmania limity danej funkcie v tomto bode.

Veta 45

Nech funkcia f má v bode $z_0 \in \tilde{\mathbb{C}}$ izolovanú singularitu. Potom platí:

(i) *Bod z_0 je odstrániteľná singularita práve vtedy, keď existuje vlastná limita $\lim_{z \to z_0} f(z)$.*

(ii) *Bod z_0 je pól práve vtedy, keď $\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$.*

(iii) *Bod z_0 je podstatná singularita práve vtedy, keď neexistuje $\lim_{z \to z_0} f(z)$.*

Poznámka 16

Ak funkcia f má v bode $z_0 \in \tilde{\mathbb{C}}$ odstrániteľnú singularitu, potom je možné f holomorfne rozšíriť i do bodu z_0. Dá sa totiž ukázať, že funkcia g definovaná

$$g(z) = \begin{cases} f(z), & z \neq z_0, \\ L := \lim_{z \to z_0} f(z) \in \mathbb{C}, & z = z_0, \end{cases}$$

je holomorfná na okolí bodu z_0, a teda aj v samotnom bode z_0. To je aj dôvod označenia "odstrániteľná" singularita, nakoľko g už nemá v z_0 singulárny bod.

Veta 46

Bod $z_0 \in \mathbb{C}$ *je pól rádu* $k \in \mathbb{N}$ *funkcie* f *práve vtedy, keď*

$$f(z) = g(z)/(z - z_0)^k \quad \text{na nejakom okolí bodu } z_0,$$

kde g *je funkcia holomorfná a nenulová v* z_0*. Podobne, nevlastný bod* ∞ *je pól rádu* $k \in \mathbb{N}$ *funkcie* f *práve vtedy, keď* $z_0 = 0$ *je pól rádu* k *funkcie* $f(1/z)$*, t.j.,*

$$f(z) = z^k h(z) \quad \text{na okolí bodu } \infty$$

pre istú funkciu h *holomorfnú a nenulovú v* ∞*.*

Poznámka 17

Okrem Vety 46 sa často využíva i ďalšie ekvivalentné kritérium prítomnosti pólu. Konkrétne, bod $z_0 \in \tilde{\mathbb{C}}$ je pól rádu $k \in \mathbb{N}$ funkcie f práve vtedy, keď z_0 je k-násobný nulový bod funkcie $g(z) = 1/f(z)$. Poznamenajme, že funkcia g holomorfná v bode $z_0 \in \mathbb{C}$ s $g \not\equiv 0$ na okolí bodu z_0 má v z_0 k-násobný nulový bod, ak $g(z_0) = g'(z_0) = \cdots = g^{(k-1)}(z_0) = 0$ a $g^{(k)}(z_0) \neq 0$. Nevlastný bod $z_0 = \infty$ sa nazýva k-násobný nulový bod funkcie g, ak 0 je k-násobný nulový bodom funkcie $g(1/z)$.

Príklad 50

Nájdime všetky izolované singularity funkcie

$$f(z) = \frac{\sin z}{z}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Podozrivé sú zrejme body $z_1 = 0$ a $z_2 = \infty$. Keďže výrazy $\sin z$ a z sú celými funkciami a $\lim_{z\to 0} \sin z = 0 = \lim_{z\to 0} z$, využitím L'Hospitalovho pravidla vo Vete 25 máme

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{z} \overset{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{z\to 0} \frac{(\sin z)'}{z'} = \lim_{z\to 0} \cos z = 1 \in \mathbb{C}.$$

Podľa Vety 45(i) má teda funkcia f v bode $z_1 = 0$ odstrániteľnú singularitu. To potvrdzuje i Laurentov rozvoj funkcie f v okolí bodu 0

$$\frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z} \cdot \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots \right) = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + \cdots,$$

ktorého hlavná časť je nulová. Naproti tomu v nevlastnom bode $z_2 = \infty$ má funkcia f podstatnú singularitu, pretože Laurentov rad pre f so stredom v bode ∞ (t.j., práve zostrojený rozvoj so stredom v bode 0) má vo svojej hlavnej časti (t.j., v regulárnej časti rozvoja so stredom 0) nekonečne veľa nenulových členov.

Príklad 51

Stanovme všetky izolované singularity a ich typ pre funkciu

$$f(z) = \mathrm{e}^{1/z}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Do úvahy pripadajú zrejme body $z_1 = 0$ a $z_2 = \infty$. Funkciu f rozvinieme do Laurentovho radu so stredom 0. Z definície exponenciálnej funkcie v (41) platí

$$\mathrm{e}^{1/z} = 1 + z^{-1} + \frac{1}{2!}\, z^{-2} + \frac{1}{3!}\, z^{-3} + \frac{1}{4!}\, z^{-4} + \cdots .$$

Ihneď vidíme, že v bode $z_1 = 0$ má funkcia f podstatnú singularitu a bod ∞ je odstrániteľná singularita f. Tieto skutočnosti vyplývajú i z Vety 45, nakoľko

$$\lim_{z\to\infty} \mathrm{e}^{1/z} = \left| \text{substitúcia } w = \frac{1}{z}, \quad w \to 0 \right| = \lim_{w\to 0} \mathrm{e}^{w} = \mathrm{e}^{0} = 1 \in \mathbb{C},$$

kým limita $\lim_{z\to 0} \mathrm{e}^{1/z}$ neexistuje (uvážme napríklad cestu $z = \mathrm{i}y$ pre $y \to 0$ a výsledok v závere Príkladu 35).

Príklad 52

Určme izolované singularity funkcie

$$f(z) = \frac{z^4}{(z+2)^3}.$$

Funkcia f je holomorfná v celej komplexnej rovine okrem bodu $z_0 = -2$, ktorý je teda izolovanou singularitou funkcie f. Funkcia $g(z) = z^4$ je holomorfná v $\mathbb{C}$ a nenulová na okolí bodu -2. Preto z Vety 46 ihneď vyplýva, že f má v bode z_0 pól rádu 3. Preskúmame ešte nevlastný bod ∞. Uvažujme funkciu

$$h(z) = f(1/z) = \frac{1/z^4}{(1/z+2)^3} = \frac{1}{z\,(1+2z)^3}.$$

Keďže výraz $1/h(z) = z\,(1+2z)^3$ má v 0 jednoduchý (1-násobný) nulový bod, podľa Poznámky 17 má funkcia h v bode 0 pól rádu 1 (jednoduchý pól). Z Vety 46 potom vyplýva, že f má v bode ∞ pól rádu 1. Obzvlášť, f má tvar

$$f(z) = \frac{z^4}{(z+2)^3} = z \cdot \left(\frac{z}{z+2}\right)^3,$$

pričom výraz $[z/(z+2)]^3$, ako možno ukázať, je holomorfný a nenulový v ∞.

Cauchyho teória rezíduí

Nech f je funkcia holomorfná na prstencovom okolí $K^*(z_0, R)$, $R > 0$, bodu $z_0 \in \mathbb{C}$. Podľa Vety 42 potom existuje Laurentov rozvoj (83) funkcie f v okolí bodu z_0, t.j., platí

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad z \in K^*(z_0, R). \tag{87}$$

Laurentov koeficient a_{-1} v rade v (87) sa nazýva rezíduum funkcie f v bode z_0 a označuje sa $a_{-1} = \operatorname{res}_{z_0} f$. Pre $z_0 = \infty$ sa rezíduum $\operatorname{res}_\infty f$ funkcie f v bode ∞ definuje $\operatorname{res}_\infty f = -a_1$, kde a_1 je koeficient v Laurentovom rozvoji

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{-n} z^n \tag{88}$$

funkcie f v prstencovom okolí $K^*(\infty, R)$, $R > 0$, bodu ∞. Poznamenajme, že v oboch prípadoch (t.j., pre vlastný i nevlastný bod) sa rezíduum funkcie určuje pomocou koeficientu stojacom pri mocnine $(z - z_0)^{-1}$ (resp. pri mocnine z^{-1}) v príslušnom Laurentovom rozvoji funkcie f.

Poznámka 18

Významná aplikácia rezíduí funkcií komplexnej premennej súvisí s efektívnym výpočtom krivkových integrálov pozdĺž uzavretých ciest v $\mathbb{C}$. Konkrétne, ak f je funkcia holomorfná na prstencovom okolí $K^*(z_0, R)$, $R > 0$, bodu $z_0 \in \mathbb{C}$, potom podľa formuly (85) v Laurentovej vete 42 platí

$$\operatorname{res}_{z_0} f = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\varphi} f(z)\, \mathrm{d}z, \tag{89}$$

kde φ je kladne orientovaná kružnica $|z - z_0| = \varrho$ s $0 < \varrho < R$. Pre funkciu f holomorfnú na prstencovom okolí $K^*(\infty, R)$, $R > 0$, bodu ∞ máme

$$\operatorname{res}_{\infty} f = -\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\varphi} f(z)\, \mathrm{d}z, \tag{90}$$

kde φ je kladne orientovaná kružnica $|z| = \varrho$ s $1/R < \varrho < \infty$.

Veta 47 (Rezíduum funkcie v odstrániteľnej singularite)

Ak funkcia f má v bode $z_0 \in \mathbb{C}$ odstrániteľnú singularitu, resp. je f dokonca holomorfná v z_0, potom $\operatorname{res}_{z_0} f = 0$.

Dôkaz Vety 47.

Priamo z definície odstrániteľnej singularity funkcie f v bode $z_0 \in \mathbb{C}$ vyplýva, že $\operatorname{res}_{z_0} f = a_{-1} = 0$. Obzvlášť, ak f je holomorfná v bode z_0, potom podľa Poznámky 13 jej Laurentov rozvoj (87) splýva s jej Taylorovym rozvojom (82) v okolí bodu z_0, a teda opäť $\operatorname{res}_{z_0} f = a_{-1} = 0$. ∎

Poznámka 19

Poznamenajme, že výsledok Vety 47 neplatí v prípade odstrániteľnej singularity v nevlastnom bode ∞. Z Príkladu 45 vyplýva, že funkcia $f(z) = 1/z$ má v ∞ odstrániteľnú singularitu (dokonca je f holomorfná v ∞), avšak $\operatorname{res}_{\infty} f = -1$.

Veta 48 (Rezíduum funkcie v póloch)

Nech funkcia f má v bode $z_0 \in \tilde{\mathbb{C}}$ pól rádu $k \in \mathbb{Z}$. Potom platí

$$\operatorname{res}_{z_0} f = \begin{cases} \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z\to z_0} \left[(z-z_0)^k f(z)\right]^{(k-1)}, & z_0 \in \mathbb{C}, \\ -\frac{1}{(k+1)!} \lim_{z\to 0} \left[z^k f(1/z)\right]^{(k+1)}, & z_0 = \infty. \end{cases} \tag{91}$$

Poznámka 20

Formuly (91) majú v prípade pólov rádu 1 (tzv. jednoduchých pólov) tvary

$$\operatorname{res}_{z_0} f = \begin{cases} \lim_{z\to z_0} \left[(z-z_0) f(z)\right], & z_0 \in \mathbb{C}, \\ -\frac{1}{2} \lim_{z\to 0} \left[z\, f(1/z)\right]'', & z_0 = \infty. \end{cases} \tag{92}$$

Nasledujúce tvrdenie je možné interpretovať ako zjednotenie a zovšeobecnenie výsledkov Viet 29, 32, 33 a 34 získaných v rámci Cauchyho teórie komplexného krivkového integrálu. Zároveň predstavuje účinný nástroj na výpočet krivkových integrálov pozdĺž Jordanovych ciest (ako sme už naznačili v Poznámke 18).

Veta 49 (Cauchyho veta o rezíduách)

Nech m je pevné nezáporné celé číslo. Nech φ je kladne orientovaná Jordanova cesta v $\mathbb{C}$ a nech $f : \overline{\operatorname{Int}\varphi} \to \mathbb{C}$ je funkcia holomorfná v $\operatorname{Int}\varphi \setminus \{z_1, z_2, \ldots, z_m\}$ a spojitá na $\overline{\operatorname{Int}\varphi} \setminus \{z_1, z_2, \ldots, z_m\}$, kde $\{z_1, z_2, \ldots, z_m\} \subseteq \operatorname{Int}\varphi$. Potom

$$\int_\varphi f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \left[\operatorname{res}_{z_1} f + \operatorname{res}_{z_2} f + \cdots + \operatorname{res}_{z_m} f\right] = 2\pi i \sum_{j=1}^{m} \operatorname{res}_{z_j} f.$$

Dôsledok 7

Nech f je funkcia holomorfná na množine $\tilde{\mathbb{C}} \setminus \{z_1, z_2, \ldots, z_m\}$. Potom platí

$$\operatorname{res}_{z_1} f + \operatorname{res}_{z_2} f + \cdots + \operatorname{res}_{z_m} f + \operatorname{res}_{\infty} f = 0.$$

Príklad 53

Určme rezíduá funkcií

$$\text{a) } f(z) = \frac{1}{(z^2 + a^2)^3}, \quad a > 0, \qquad \text{b) } g(z) = (z^2 + 1)\,\mathrm{e}^{-z}$$

vo všetkých ich izolovaných singularitách a v bode ∞.
a) Racionálna lomená funkcia f je holomorfná v celej komplexnej rovine, okrem bodov $z_1 = \mathrm{i}a$ a $z_2 = -\mathrm{i}a$. V obidvoch bodoch má f póly rádu 3, nakoľko

$$f(z) = \frac{1}{[(z - \mathrm{i}a)(z + \mathrm{i}a)]^3} = \frac{1}{(z - \mathrm{i}a)^3 (z + \mathrm{i}a)^3}.$$

Podľa Vety 48 potom pre rezíduá funkcie f v bodoch $\pm\mathrm{i}a$ platí

Príklad 53

$$\operatorname{res}_{\mathrm{i}a} f = \frac{1}{2!} \cdot \lim_{z \to \mathrm{i}a} \left[(z-\mathrm{i}a)^3 \cdot \frac{1}{(z-\mathrm{i}a)^3 (z+\mathrm{i}a)^3} \right]''$$

$$= (1/2) \cdot \lim_{z \to \mathrm{i}a} \left[(z+\mathrm{i}a)^{-3} \right]'' = (1/2) \cdot \lim_{z \to \mathrm{i}a} 12\,(z+\mathrm{i}a)^{-5}$$

$$= 6 \cdot \lim_{z \to \mathrm{i}a} (z+\mathrm{i}a)^{-5} = -\frac{3\mathrm{i}}{16a^5},$$

$$\operatorname{res}_{-\mathrm{i}a} f = \frac{1}{2!} \cdot \lim_{z \to -\mathrm{i}a} \left[(z+\mathrm{i}a)^3 \cdot \frac{1}{(z-\mathrm{i}a)^3 (z+\mathrm{i}a)^3} \right]''$$

$$= (1/2) \cdot \lim_{z \to -\mathrm{i}a} \left[(z-\mathrm{i}a)^{-3} \right]'' = (1/2) \cdot \lim_{z \to -\mathrm{i}a} 12\,(z-\mathrm{i}a)^{-5}$$

$$= 6 \cdot \lim_{z \to -\mathrm{i}a} (z-\mathrm{i}a)^{-5} = \frac{3\mathrm{i}}{16a^5}.$$

V nevlastnom bode ∞ je funkcia f holomorfná, pretože výraz

$$f(1/z) = 1/\left(z^{-2} + a^2\right)^3 = z^6/\left(1 + a^2 z^2\right)^3$$

je holomorfný v bode 0. Podľa Dôsledku 7 potom máme $\operatorname{res}_{\infty} f = 0$.

Príklad 53

b) Keďže funkcia g je celá (t.j., je holomorfná v celom $\mathbb{C}$), z Dôsledku 7 ihneď vyplýva, že $\operatorname{res}_\infty f = 0$. Rovnaký výsledok by sme dostali i rozvinutím funkcie g do (v tomto prípade jediného) Laurentovho radu so stredom v bode 0

$$(z^2+1)\,\mathrm{e}^{-z} = (z^2+1)\cdot\left(1 - z + \frac{z^2}{2!} - \frac{z^3}{3!} + \cdots\right) = 1 - z + \frac{3}{2}\,z^2 - \frac{7}{6}\,z^3 + \cdots .$$

Tento rozvoj je zároveň aj jediný Laurentov rozvoj funkcie g v okolí ∞. Keďže jeho hlavná časť obsahuje nekonečne veľa nenulových členov, g má v bode ∞ podstatnú singularitu. Okrem toho vidíme, že hodnota rezídua funkcie g v ∞, ako záporne vzatý Laurentov koeficient pri mocnine z^{-1}, je skutočne 0.

Príklad 54

Stanovme krivkový integrál

$$\int_\varphi \mathrm{e}^{1/z}\mathrm{d}z$$

po kladne orientovanej kružnici $|z| = 1$. Funkcia $f(z) = \mathrm{e}^{1/z}$ je holomorfná na celom $\mathbb{C}$, okrem $z_0 = 0$, pričom $0 \in \operatorname{Int}\varphi$. Z Príkladu 51 vyplýva, že $\operatorname{res}_0 f = 1$. Preto podľa Cauchyho rezíduálnej vety 49 platí $\int_\varphi \mathrm{e}^{1/z}\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\cdot 1 = 2\pi\mathrm{i}$.

Príklad 55

Vypočítajme krivkový integrál z funkcie

$$f(z) = \frac{\mathrm{e}^z}{z(z^2+1)}$$

po kladne orientovanej kružnici φ s vyjadrením $|z+1+\mathrm{i}| = 2$. Funkcia f je holomorfná v celej komplexnej rovine okrem bodov $z_1 = 0$, $z_2 = \mathrm{i}$ a $z_3 = -\mathrm{i}$. Tieto čísla sú jednoduché nuly výrazu $1/f(z) = \mathrm{e}^{-z} z(z-\mathrm{i})(z+\mathrm{i})$. Teda podľa Poznámky 17 má funkcia f v bodoch z_1, z_2, z_3 jednoduché póly. Naviac, platí $z_1, z_3 \in \operatorname{Int}\varphi$, kým $z_2 \notin \operatorname{Int}\varphi$, ako sa môžeme ľahko presvedčiť. Určíme preto rezíduá funkcie f v bodoch z_1 a z_3. Podľa Poznámky 20 máme

$$\operatorname{res}_0 f = \lim_{z\to 0} \left[\mathrm{e}^z/(z^2+1)\right] = 1, \qquad \operatorname{res}_{-\mathrm{i}} f = \lim_{z\to -\mathrm{i}} \{\mathrm{e}^z/[z(z-\mathrm{i})]\} = -\mathrm{e}^{-\mathrm{i}}/2.$$

Aplikáciou Cauchyho rezíduálnej vety 49 potom dostaneme

$$\int_\varphi \frac{\mathrm{e}^z}{z(z^2+1)}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\left[\operatorname{res}_0 f + \operatorname{res}_{-\mathrm{i}} f\right] = \pi\mathrm{i}\left[2 - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}}\right].$$