Teorie kódování aneb jak zhustit informaci

Jan Paseka

Masarykova Univerzita Brno

13. února 2015

Cíl přednášky

V této přednášce se pokusíme o stučný úvod do historie teorie kódování včetně teorie informace a popíšeme metody teorie kódování.

Úvod

Teorie kódování je interdisciplinární teorie, která v sobě spojuje metody a postupy informatiky, matematiky a spojovací techniky.

Úlohou teorie kódování je tvorba postupů a metod, které nám zajistí bezpečný přenos zpráv komunikačním systémem.

Teorie kódování II

Jak postupujeme?

Teorie kódování II

Jak postupujeme?

Z důvodů technické realizovatelnosti se zprávy převedou nejprve do řady znaků nad nějakou konečnou abecedou (nejlépe nad konečným tělesem).

Teorie kódování II

Jak postupujeme?

Z důvodů technické realizovatelnosti se zprávy převedou nejprve do řady znaků nad nějakou konečnou abecedou (nejlépe nad konečným tělesem).

Tato řada znaků se pak rozloží do bloků pokud možno stejné délky k. Kódovací zařízení nám pak utvoří z každého bloku délky k blok délky n,kde $n \geq k$.

Teorie kódování II

Jak postupujeme?

Z důvodů technické realizovatelnosti se zprávy převedou nejprve do řady znaků nad nějakou konečnou abecedou (nejlépe nad konečným tělesem).

Tato řada znaků se pak rozloží do bloků pokud možno stejné délky k. Kódovací zařízení nám pak utvoří z každého bloku délky k blok délky n,kde $n \geq k$.

Redundance získaná v případě kdy $n > k$ slouží později k rozpoznání a případné opravě pokud možno co nejvíce přenosových chyb.

Teorie kódování III

Aplikace

Aplikace

Přenos bloků délky n pomocí spojovacího systému, které reprezentují kódované zprávy a které se jako celek označují blokové kódy délky n, si lze představit buď prostorově (přes satelit, telefonem, televizí, rádiem atd.) nebo také v čase (CD, DVD, gramodeska, magnetofonová páska atd.).

Teorie kódování III

Aplikace

Přenos bloků délky n pomocí spojovacího systému, které reprezentují kódované zprávy a které se jako celek označují blokové kódy délky n, si lze představit buď prostorově (přes satelit, telefonem, televizí, rádiem atd.) nebo také v čase (CD, DVD, gramodeska, magnetofonová páska atd.).

Podíl k/n se nazývá míra informace blokového kódu a reprezentuje množství energie potřebné k přenosu kódovaných zpráv.

Teorie kódování IV

Chyby při přenosu

Chyby při přenosu

V rušeném spojovém kanálu se mohou při přenosu kódovaných zpráv vyskytnout chyby dvojího typu. Nejprve je myslitelné, že některé z vysílaných zpráv nedojdou vůbec k příjemci nebo že je příjemce obdrží neúplné.

Chyby při přenosu

V rušeném spojovém kanálu se mohou při přenosu kódovaných zpráv vyskytnout chyby dvojího typu. Nejprve je myslitelné, že některé z vysílaných zpráv nedojdou vůbec k příjemci nebo že je příjemce obdrží neúplné.

Druhou možností je, že se mohou vyskytnout rovněž přenosové chyby, tj. vyslaný znak 0 se např. přijme jako 1; v teorii kódování se zabýváme zejména druhým případem.

Chyby při přenosu

V rušeném spojovém kanálu se mohou při přenosu kódovaných zpráv vyskytnout chyby dvojího typu. Nejprve je myslitelné, že některé z vysílaných zpráv nedojdou vůbec k příjemci nebo že je příjemce obdrží neúplné.

Druhou možností je, že se mohou vyskytnout rovněž přenosové chyby, tj. vyslaný znak 0 se např. přijme jako 1; v teorii kódování se zabýváme zejména druhým případem.

Teorie kódování V

Oprava přenosových chyb

Oprava přenosových chyb

Pro opravu eventuálně se vyskytujících se přenosových chyb jsou rozhodující dvě veličiny:

Oprava přenosových chyb

Pro opravu eventuálně se vyskytujících se přenosových chyb jsou rozhodující dvě veličiny:

- míra opravitelnosti chyb, která nám udává v každé kódované zprávě podíl opravitelných chyb, a

Oprava přenosových chyb

Pro opravu eventuálně se vyskytujících se přenosových chyb jsou rozhodující dvě veličiny:

- míra opravitelnosti chyb, která nám udává v každé kódované zprávě podíl opravitelných chyb, a
- komplexita dekóderu, který má za úlohu pro přijatou kódovanou zprávu zjistit vyslanou zprávu.

Teorie kódování V

Oprava přenosových chyb

Pro opravu eventuálně se vyskytujících se přenosových chyb jsou rozhodující dvě veličiny:

- míra opravitelnosti chyb, která nám udává v každé kódované zprávě podíl opravitelných chyb, a
- komplexita dekóderu, který má za úlohu pro přijatou kódovanou zprávu zjistit vyslanou zprávu.

Hlavním cílem teorie kódování je tvorba kódu s pokud možno co největší mírou informace a s co možná největší mírou opravitelnosti chyb při současně co možná nejmenší komplexitě dekódéru.

Teorie kódování VI

Teorie versus praxe

Teorie kódování VI

Teorie versus praxe

Shannonova věta o kapacitě kanálu nám zaručuje existenci blokových kódů s mírou informace libovolně blízce pod kapacitou kanálu, tzn. s mírou informace, která je tak vysoká jak nám to používaný kanál vůbec dovolí a s libovolně velkou mírou opravitelnosti chyb. Nekonstruktivní charakter této skutečnosti byl zrodem teorie kódování.

Teorie kódování VI

Teorie versus praxe

Shannonova věta o kapacitě kanálu nám zaručuje existenci blokových kódů s mírou informace libovolně blízce pod kapacitou kanálu, tzn. s mírou informace, která je tak vysoká jak nám to používaný kanál vůbec dovolí a s libovolně velkou mírou opravitelnosti chyb. Nekonstruktivní charakter této skutečnosti byl zrodem teorie kódování.

V mnoha případech je však časová náročnost pro dekódování kódu tak velká, že neúplné využití kapacity kanálu má mnohem menší důležitost než příliš komplikovaný dekódovací postup. Z tohoto důvodu se v teorii kódování zkoumají zejména kódy s relativně jednoduchým realizovatelným dekódovacím algoritmem.

Dodatečná struktura

Dodatečná struktura

Pro určení vlastností opravujících se chyb daného kódu se ukázala důležitá dodatečná znalost jeho struktury. Proto se v teorii kódování zkoumají blokové kódy opatřené dodatečnou algebraickou strukturou, u kterých lze doufat, že budou mít v praxi použitelné teoretické vlastnosti.

Teorie kódování VII

Dodatečná struktura

Pro určení vlastností opravujících se chyb daného kódu se ukázala důležitá dodatečná znalost jeho struktury. Proto se v teorii kódování zkoumají blokové kódy opatřené dodatečnou algebraickou strukturou, u kterých lze doufat, že budou mít v praxi použitelné teoretické vlastnosti.

Lineární kódy reprezentují jistou třídu blokových kódů a jsou opatřeny dodatečnou algebraickou strukturou – strukturou vektorového prostoru.

Teorie kódování VIII

Lineární kódy

Teorie kódování VIII

Lineární kódy

Lineární kód nad konečným tělesem K je reprezentován jako k-rozměrný podprostor n-rozměrného vektorového prostoru nad K.

Teorie kódování VIII

Lineární kódy

Lineární kód nad konečným tělesem K je reprezentován jako k-rozměrný podprostor n-rozměrného vektorového prostoru nad K.

Strukturu lineárních kódů lze pak analyzovat prostředky a metodami lineární algebry.

Teorie kódování VIII

Lineární kódy

Lineární kód nad konečným tělesem K je reprezentován jako k-rozměrný podprostor n-rozměrného vektorového prostoru nad K.

Strukturu lineárních kódů lze pak analyzovat prostředky a metodami lineární algebry.

K nejznámějším příkladům praktického použití lineárních kódů patří

- binární Reed-Mullerovy kódy – vesmírná sonda Mariner použila binární Reed-Mullerův kód prvního řádu délky 32 pro přenos datového materiálu fotodokumentace planety Mars,

Teorie kódování VIII

Lineární kódy

Lineární kód nad konečným tělesem K je reprezentován jako k-rozměrný podprostor n-rozměrného vektorového prostoru nad K.

Strukturu lineárních kódů lze pak analyzovat prostředky a metodami lineární algebry.

K nejznámějším příkladům praktického použití lineárních kódů patří

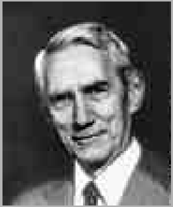
- binární Reed-Mullerovy kódy – vesmírná sonda Mariner použila binární Reed-Mullerův kód prvního řádu délky 32 pro přenos datového materiálu fotodokumentace planety Mars,
- Reed-Solomonovy kódy – např. se používají pro ukládání opticky kódovaných zvukových signálů na CD dva lineární kódy, které byly odvozeny zkrácením Reed-Solomonova kódu délky 255 nad tělesem GF(2^8).

Krátká historie I

Krátká historie I

Algebraická a
kombinatorická teorie
kódování 1948 –

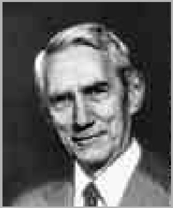
Krátká historie I



Algebraická a kombinatorická teorie kódování 1948 –

Krátká historie I

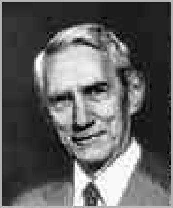
Algebraická a kombinatorická teorie kódování 1948 –



Claude E. Shannon (1916–2001)
A mathematical theory of communication, Bell Systems Tech. Journal, 27, pp. 623–656, October 1948.

Krátká historie I

Algebraická a kombinatorická teorie kódování 1948 –

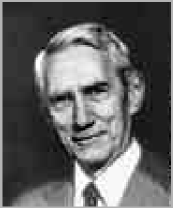


Shannonova věta o kapacitě kanálu

Claude E. Shannon (1916–2001)
A mathematical theory of communication, Bell Systems Tech. Journal, 27, pp. 623–656, October 1948.

Krátká historie I

Algebraická a kombinatorická teorie kódování 1948 –



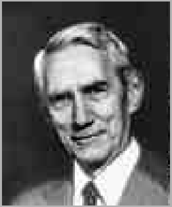
Shannonova věta o kapacitě kanálu

Claude E. Shannon (1916–2001)
A mathematical theory of communication, Bell Systems Tech. Journal, 27, pp. 623–656, October 1948.

Jak ale najdeme kódy ze Shannonovy věty?

Krátká historie I

Algebraická a kombinatorická teorie kódování 1948 –



Shannonova věta o kapacitě kanálu

Claude E. Shannon (1916–2001)
A mathematical theory of communication, Bell Systems Tech. Journal, 27, pp. 623–656, October 1948.

Jak ale najdeme kódy ze Shannonovy věty?

Odpovědí dneška je nová, pravděpodobnostní teorie kódování 1994 –

Krátká historie II - Vyřešení Shannonova problému

Krátká historie II - Vyřešení Shannonova problému

Turbokódy a LDPC kódy:

Krátká historie II - Vyřešení Shannonova problému

Turbokódy a LDPC kódy:

Jedná se o kódy definované na grafech s iterativními dekódovacími algoritmy!

Krátká historie II - Vyřešení Shannonova problému

Turbokódy a LDPC kódy:

Jedná se o kódy definované na grafech s iterativními dekódovacími algoritmy!

Tyto kódy jsou dostatečně náhodné, aby se opravdu hodně přiblížily kapacitě kanálu, zároveň ale jsou dostatečně konstruktivní, aby bylo možno iterativně dekódovat v polynomiálním (lineárním) čase.

Krátká historie III - Návrat k počátkům

Krátká historie III - Návrat k počátkům

Ve stejné době, v roce 1947, Richard W. Hamming byl jedním z prvních uživatelů na současné poměry primitivních počítačů v Bell Laboratories.

Krátká historie III - Návrat k počátkům

Ve stejné době, v roce 1947, Richard W. Hamming byl jedním z prvních uživatelů na současné poměry primitivních počítačů v Bell Laboratories.
Frustrován jejich praktickou nepoužitelností se zaměřil na problém jak počítač může ověřit a případně opravit své vlastní výsledky.

Krátká historie III - Návrat k počátkům

Ve stejné době, v roce 1947, Richard W. Hamming byl jedním z prvních uživatelů na současné poměry primitivních počítačů v Bell Laboratories.
Frustrován jejich praktickou nepoužitelností se zaměřil na problém jak počítač může ověřit a případně opravit své vlastní výsledky.
Výsledkem pak byla známá kontrola parity a její zobenění známé nyní jako Hammingovo kódování.

Krátká historie III - Návrat k počátkům

Ve stejné době, v roce 1947, Richard W. Hamming byl jedním z prvních uživatelů na současné poměry primitivních počítačů v Bell Laboratories.
Frustrován jejich praktickou nepoužitelností se zaměřil na problém jak počítač může ověřit a případně opravit své vlastní výsledky.
Výsledkem pak byla známá kontrola parity a její zobenění známé nyní jako Hammingovo kódování.

Error Detecting and Error Correcting Codes, Bell System Technical Journal, vol. 29, pp. 147-160, 1950.

Krátká historie III - Návrat k počátkům

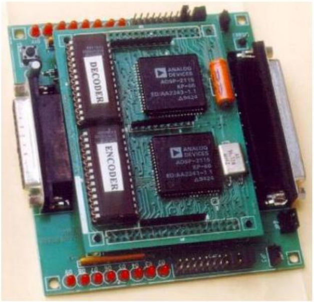
Ve stejné době, v roce 1947, Richard W. Hamming byl jedním z prvních uživatelů na současné poměry primitivních počítačů v Bell Laboratories.
Frustrován jejich praktickou nepoužitelností se zaměřil na problém jak počítač může ověřit a případně opravit své vlastní výsledky.
Výsledkem pak byla známá kontrola parity a její zobenění známé nyní jako Hammingovo kódování.

Error Detecting and Error Correcting Codes, Bell System Technical Journal, vol. 29, pp. 147-160, 1950.

Moderní počítače by bez objevu W. Hamminga a podobných kódování jím inspirovaných nemohly existovat.

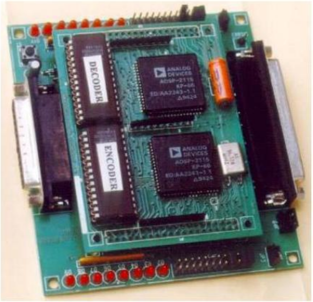
Krátká historie IV

Krátká historie IV



Miliony kódů opravující chyby jsou dekódovány každou minutu a to pomocí efektivních algoritmů implementovaných v běžných VLSI-obvodech.

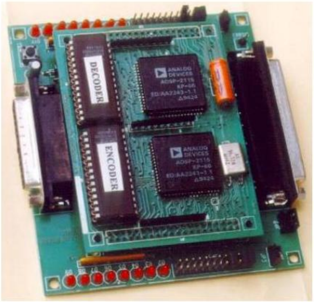
Krátká historie IV



Miliony kódů opravující chyby jsou dekódovány každou minutu a to pomocí efektivních algoritmů implementovaných v běžných VLSI-obvodech.

Alespoň 75% těchto VLSI-obvodů je dekódováno pomocí Reed-Solomonových kódů.

Krátká historie IV



Miliony kódů opravující chyby jsou dekódovány každou minutu a to pomocí efektivních algoritmů implementovaných v běžných VLSI-obvodech.

Alespoň 75% těchto VLSI-obvodů je dekódováno pomocí Reed-Solomonových kódů.

I.S. Reed and G. Solomon, Polynomial codes over certain finite fields, Journal Society Indust. Appl. Math. 8, pp. 300-304, June 1960.

Teorie informace I

Definice

Zdroj je proud symbolů jisté konečné abecedy. Zdroj má obvykle nějaký náhodný mechanismus, který je založen na statistice situace, která je modelovaná.

Teorie informace I

Definice

Zdroj je proud symbolů jisté konečné abecedy. Zdroj má obvykle nějaký náhodný mechanismus, který je založen na statistice situace, která je modelovaná.

Problém řešený v teorii kódování je následující:

Teorie informace I

Definice

Zdroj je proud symbolů jisté konečné abecedy. Zdroj má obvykle nějaký náhodný mechanismus, který je založen na statistice situace, která je modelovaná.

Problém řešený v teorii kódování je následující:

Předpokládejme, že máme zdroj bez paměti $\mathcal{S}$, který vysílá symboly z abecedy $W = \{w_1, \dots, w_n\}$ s pravděpodobnostmi $\{p_1, \dots, p_n\}$.

Teorie informace I

Definice

Zdroj je proud symbolů jisté konečné abecedy. Zdroj má obvykle nějaký náhodný mechanismus, který je založen na statistice situace, která je modelovaná.

Problém řešený v teorii kódování je následující:

Předpokládejme, že máme zdroj bez paměti $\mathcal{S}$, který vysílá symboly z abecedy $W = \{w_1, \ldots, w_n\}$ s pravděpodobnostmi $\{p_1, \ldots, p_n\}$.

Prvky W budeme nazývat *zdrojová slova* a ptát se na následující otázku:

Teorie informace I

Definice

Zdroj je proud symbolů jisté konečné abecedy. Zdroj má obvykle nějaký náhodný mechanismus, který je založen na statistice situace, která je modelovaná.

Problém řešený v teorii kódování je následující:

Předpokládejme, že máme zdroj bez paměti $\mathcal{S}$, který vysílá symboly z abecedy $W = \{w_1, \ldots, w_n\}$ s pravděpodobnostmi $\{p_1, \ldots, p_n\}$.

Prvky W budeme nazývat *zdrojová slova* a ptát se na následující otázku:

Je-li Σ abeceda D symbolů, jak můžeme zakódovat zdrojová slova w_i pomocí symbolů z Σ, abychom dostali co možná nejekonomičtější zakódování?

Teorie informace II

Kódování neboli *kód* je zobrazení f z $\{w_1, \ldots, w_n\}$ do Σ^*, kde Σ^* označuje soubor konečných řetězců symbolů z Σ.

Teorie informace II

Kódování neboli *kód* je zobrazení f z $\{w_1, \ldots, w_n\}$ do Σ^*, kde Σ^* označuje soubor konečných řetězců symbolů z Σ.

Zpráva je každý konečný řetězec zdrojových slov a, je-li

$$m = w_{i_1} \ldots w_{i_k}$$

a je-li f kódování, pak *rozšíření* f na W^* je definováno obvyklým způsobem pomocí zřetězení

$$f(m) = f(w_{i_1}) \ldots f(w_{i_k}).$$

Teorie informace II

Kódování neboli *kód* je zobrazení f z $\{w_1, \ldots, w_n\}$ do Σ^*, kde Σ^* označuje soubor konečných řetězců symbolů z Σ.

Zpráva je každý konečný řetězec zdrojových slov a, je-li

$$m = w_{i_1} \ldots w_{i_k}$$

a je-li f kódování, pak *rozšíření* f na W^* je definováno obvyklým způsobem pomocí zřetězení

$$f(m) = f(w_{i_1}) \ldots f(w_{i_k}).$$

Kódování f je *jednoznačně dekódovatelné*, jestliže každý konečný řetězec z Σ^* je obraz nejvýše jedné zprávy.

Teorie informace III

Řetězce $f(w_i)$ se nazývají *kódová slova* a přirozená čísla $|f(w_i)|$ jsou *slovní délky* kódování f.

Teorie informace III

Řetězce $f(w_i)$ se nazývají *kódová slova* a přirozená čísla $|f(w_i)|$ jsou *slovní délky* kódování f.

Průměrná délka $\langle f \rangle$ kódování f je definovaná jako

$$\langle f \rangle = \sum_{i=1}^{m} p_i |f(w_i)|.$$

Teorie informace IV

Naše snaha bude určit jak efektivní takové kódování může být.

Teorie informace IV

Naše snaha bude určit jak efektivní takové kódování může být.

Lze dokázat, že pro každý zdroj $\mathcal{S}$ existuje číslo, které nazýváme *entropií zdroje* $\mathcal{S}$ takové, že průměrná délka každého jednoznačně dekódovatelného kódování pro $\mathcal{S}$ musí být větší nebo rovna entropii $\mathcal{S}$.

Teorie informace IV

Naše snaha bude určit jak efektivní takové kódování může být.

Lze dokázat, že pro každý zdroj $\mathcal{S}$ existuje číslo, které nazýváme *entropií zdroje* $\mathcal{S}$ takové, že průměrná délka každého jednoznačně dekódovatelného kódování pro $\mathcal{S}$ musí být větší nebo rovna entropii $\mathcal{S}$.

Je tedy entropie *spodní hranicí* pro každé jednoznačně dekódovatelné kódování.

Teorie informace IV

Naše snaha bude určit jak efektivní takové kódování může být.

Lze dokázat, že pro každý zdroj $\mathcal{S}$ existuje číslo, které nazýváme *entropií zdroje* $\mathcal{S}$ takové, že průměrná délka každého jednoznačně dekódovatelného kódování pro $\mathcal{S}$ musí být větší nebo rovna entropii $\mathcal{S}$.

Je tedy entropie *spodní hranicí* pro každé jednoznačně dekódovatelné kódování.

Účelem entropie daného zdroje je měřit množství informace ve zdroji.

Teorie informace V

Naše představa o měření informace bude následující:

Teorie informace V

Naše představa o měření informace bude následující:

Čím má zdrojový symbol menší pravděpodobnost výskytu, tím více informace obdržíme z výskytu tohoto symbolu a obráceně.

Teorie informace V

Naše představa o měření informace bude následující:

Čím má zdrojový symbol menší pravděpodobnost výskytu, tím více informace obdržíme z výskytu tohoto symbolu a obráceně.

Informaci pak budeme chápat jakožto funkci pravděpodobnosti výskytu symbolu a nikoliv jako funkci tohoto symbolu.

Teorie informace V

Naše představa o měření informace bude následující:

Čím má zdrojový symbol menší pravděpodobnost výskytu, tím více informace obdržíme z výskytu tohoto symbolu a obráceně.

Informaci pak budeme chápat jakožto funkci pravděpodobnosti výskytu symbolu a nikoliv jako funkci tohoto symbolu.

Budeme ji pak značit $I(p)$, kde $0 < p \leq 1$.

Teorie informace VI

Předpokládejme, že E_1 a E_2 jsou dvě události v pravděpodobnostním prostoru Ω spojené jistým experimentem a předpokládejme, že funkce I je naše míra informace.

Teorie informace VI

Předpokládejme, že E_1 a E_2 jsou dvě události v pravděpodobnostním prostoru Ω spojené jistým experimentem a předpokládejme, že funkce I je naše míra informace.

Mají-li E_1 a E_2 pravděpodobnosti p_1 a p_2, pak můžeme argumentovat tím, že každá přirozená míra obsahu informace by měla splňovat

$$I(p_1 p_2) = I(p_1) + I(p_2)$$

na základě toho, že, pro dvě nezávislé realizace experimentu, informace, pro kterou výsledky těchto experimentů dopadnou jako E_1 následováno E_2, by měla být součtem informací získaných provedením těchto experimentů zvlášť.

Teorie informace VI

Předpokládejme, že E_1 a E_2 jsou dvě události v pravděpodobnostním prostoru Ω spojené jistým experimentem a předpokládejme, že funkce I je naše míra informace.

Mají-li E_1 a E_2 pravděpodobnosti p_1 a p_2, pak můžeme argumentovat tím, že každá přirozená míra obsahu informace by měla splňovat

$$I(p_1 p_2) = I(p_1) + I(p_2)$$

na základě toho, že, pro dvě nezávislé realizace experimentu, informace, pro kterou výsledky těchto experimentů dopadnou jako E_1 následováno E_2, by měla být součtem informací získaných provedením těchto experimentů zvlášť.

Dále si přejeme mít naši míru nezápornou a spojitou v p, což jsou oba přirozené předpoklady.

Teorie informace VII

Věta

Funkce $I(p)$*, definovaná pro všechna* $0 < p \leq 1$*, splňuje podmínky* $I(p) \geq 0$*, pro všechna* $0 < p \leq 1$*,*
$I(p \cdot q) = I(p) + I(q)$ *pro všechny* $0 < p, q \leq 1$ *takové, že p a q jsou pravděpodobnosti navzájem nezávislých jevů, a podmínku spojitosti vzhledem k p právě tehdy, když je tvaru*

$$I(p) = -\lambda log_2 p,$$

kde λ *je kladná konstanta.*

Teorie informace VII

Věta

Funkce $I(p)$, definovaná pro všechna $0 < p \leq 1$, splňuje podmínky $I(p) \geq 0$, pro všechna $0 < p \leq 1$, $I(p \cdot q) = I(p) + I(q)$ pro všechny $0 < p, q \leq 1$ takové, že p a q jsou pravděpodobnosti navzájem nezávislých jevů, a podmínku spojitosti vzhledem k p právě tehdy, když je tvaru

$$I(p) = -\lambda log_2 p,$$

kde λ je kladná konstanta.

Definice

Informaci *I události E kladné pravděpodobnosti definujeme jako*

$$I(E) = -log_2 P(E).$$

Teorie informace VIII

Jednotkou míry informace je bit, což je zkratka pojmu binary unit.

Teorie informace VIII

Jednotkou míry informace je bit, což je zkratka pojmu binary unit.

Spojení mezi pojmem binary unit a pojmem binary digit (rovněž se někdy zkracuje jako bit) plyne z následujícího:

Teorie informace VIII

Jednotkou míry informace je bit, což je zkratka pojmu binary unit.

Spojení mezi pojmem binary unit a pojmem binary digit (rovněž se někdy zkracuje jako bit) plyne z následujícího:

Máme-li zdroj $\mathcal{S} = \{0, 1\}$ s pravděpodobnostmi $p_0 = \frac{1}{2}$ a $p_1 = \frac{1}{2}$, pak informace od každého zdrojového symbolu je $\log_2 2 = 1$.

Teorie informace VIII

Jednotkou míry informace je bit, což je zkratka pojmu binary unit.

Spojení mezi pojmem binary unit a pojmem binary digit (rovněž se někdy zkracuje jako bit) plyne z následujícího:

Máme-li zdroj $\mathcal{S} = \{0, 1\}$ s pravděpodobnostmi $p_0 = \frac{1}{2}$ a $p_1 = \frac{1}{2}$, pak informace od každého zdrojového symbolu je $\log_2 2 = 1$.

Jinak řečeno, emituje-li zdroj náhodně jeden binary digit (bit), pak je informace získaná z jedné emise jeden binary unit (bit).

Teorie informace IX

Definice

Buď $\mathcal{S}$ zdroj s rozdělením pravděpodobností $p_1, \dots, p_n$. Entropii zdroje $\mathcal{S}$ definujeme jako průměrnou informaci

$$H(\mathcal{S}) = \sum_{k=1}^{n} p_k \cdot I(p_k) = -\sum_{k=1}^{n} p_k \cdot \log_2 p_k$$

(suma se bere pouze přes ta k, pro která je $p_k > 0$).

Teorie informace IX

Definice

Buď $\mathcal{S}$ zdroj s rozdělením pravděpodobností $p_1, \dots, p_n$. Entropii zdroje $\mathcal{S}$ definujeme jako průměrnou informaci

$$H(\mathcal{S}) = \sum_{k=1}^{n} p_k \cdot I(p_k) = -\sum_{k=1}^{n} p_k \cdot \log_2 p_k$$

(suma se bere pouze přes ta k, pro která je $p_k > 0$).

Věta o kódování bez šumu pro zdroje bez paměti

Věta

Má-li zdroj bez paměti entropii H, pak každé jednoznačně dekódovatelné kódování pro tento zdroj v abecedě o D symbolech musí mít průměrnou délku alespoň $H/\log_2 D$. Navíc existuje takové jednoznačně dekódovatelné kódování, které má průměrnou délku slov menší nebo rovnu $1 + H/\log_2 D$.

Komunikační kanály I

Náš model komunikace – "černá skříňka", která přijímá individuální symboly na vstupu a vytváří na každý vstupní symbol nějaký výstupní symbol.

Komunikační kanály I

Náš model komunikace – "černá skříňka", která přijímá individuální symboly na vstupu a vytváří na každý vstupní symbol nějaký výstupní symbol.

Definice

Diskrétní kanál bez paměti *je charakterizován vstupní abecedou* $\Sigma_1 = \{a_1, \ldots, a_m\}$*, výstupní abecedou* $\Sigma_2 = \{b_1, \ldots, b_n\}$ *a* maticí P kanálu

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & \cdots & p_{1n-1} & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & \cdots & p_{2n-1} & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ p_{m-11} & p_{m-12} & \cdots & \cdots & p_{m-1n-1} & p_{m-1n} \\ p_{m1} & p_{m2} & \cdots & \cdots & p_{mn-1} & p_{mn} \end{pmatrix},$$

zde $p_{ij} = P(\text{symbol } b_j \text{ je obdržen} | \text{symbol } a_i \text{ je odeslán})$.

Komunikační kanály II

Způsob používání kanálu je následující: každá posloupnost $(u_1, u_2, \ldots, u_N)$ symbolů ze vstupní abecedy Σ_1 na vstupu se převede na posloupnost $(v_1, v_2, \ldots, v_N)$ téže délky symbolů z výstupní abecedy Σ_2 na výstup tak, že

$$P(v_k = b_j | u_k = a_i) = p_{ij} \quad (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n),$$

a to nezávisle pro každé k.

Komunikační kanály II

Způsob používání kanálu je následující: každá posloupnost $(u_1, u_2, \ldots, u_N)$ symbolů ze vstupní abecedy Σ_1 na vstupu se převede na posloupnost $(v_1, v_2, \ldots, v_N)$ téže délky symbolů z výstupní abecedy Σ_2 na výstup tak, že

$$P(v_k = b_j | u_k = a_i) = p_{ij} \quad (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n),$$

a to nezávisle pro každé k.

Implicitně je ve výše uvedeném obsaženo, že pro každé i, $1 \leq i \leq m$ platí

$$\sum_j p_{ij} = 1.$$

Komunikační kanály II

Způsob používání kanálu je následující: každá posloupnost $(u_1, u_2, \ldots, u_N)$ symbolů ze vstupní abecedy Σ_1 na vstupu se převede na posloupnost $(v_1, v_2, \ldots, v_N)$ téže délky symbolů z výstupní abecedy Σ_2 na výstup tak, že

$$P(v_k = b_j | u_k = a_i) = p_{ij} \quad (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n),$$

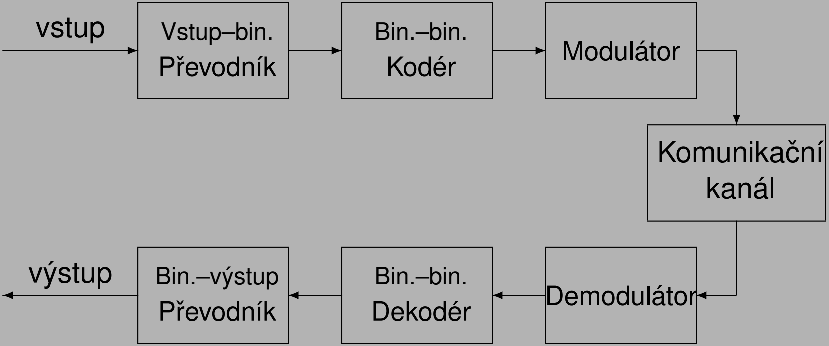
a to nezávisle pro každé k.

Implicitně je ve výše uvedeném obsaženo, že pro každé i, $1 \leq i \leq m$ platí

$$\sum_j p_{ij} = 1.$$

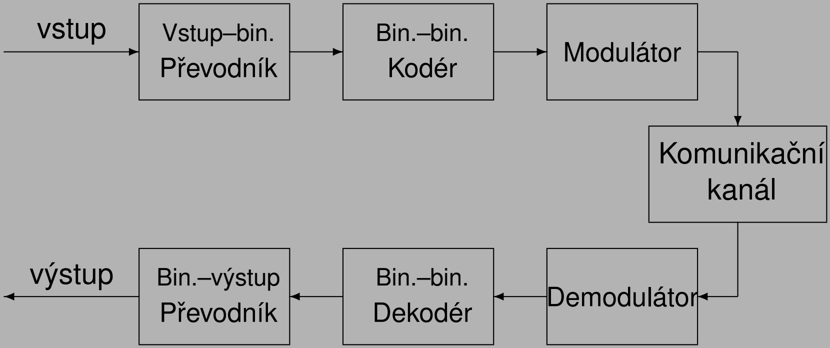
Matice P s nezápornými hodnotami taková, že součet prvků v každém řádku je roven 1, se nazývá *stochastická matice*; v teorii náhodných procesů mluvíme o matici přechodu markovského řetězce.

Komunikační kanály III



Obrázek : Konkrétní sdělovací systém.

Komunikační kanály III



Obrázek : Konkrétní sdělovací systém.

Kodéry (převodníky) převádí znaky jedné abecedy na znaky abecedy jiné. Modulátor na vstupu přijímá jednotlivé znaky a ke každému znaku vytváří proudový impuls, který vstupuje do kanálu.

Komunikační kanály IV

Příklad

Binární vypouštěcí kanál *má vstupní abecedu* $\Sigma_1 = \{0, 1\}$, *výstupní abecedu* $\Sigma_2 = \{0, 1, *\}$ *a* maticí P kanálu

$$P = \begin{pmatrix} 1-\varepsilon & 0 & \varepsilon \\ 0 & 1-\varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}.$$

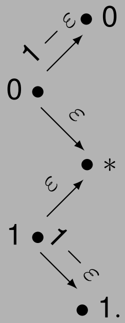
Komunikační kanály IV

Příklad

Binární vypouštěcí kanál *má vstupní abecedu* $\Sigma_1 = \{0, 1\}$, *výstupní abecedu* $\Sigma_2 = \{0, 1, *\}$ *a* maticí P kanálu

$$P = \begin{pmatrix} 1-\varepsilon & 0 & \varepsilon \\ 0 & 1-\varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}.$$

Diagram odpovídající tomuto kanálu má tvar



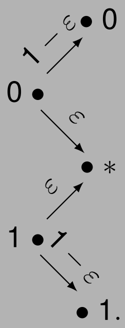
Komunikační kanály IV

Příklad

Binární vypouštěcí kanál *má vstupní abecedu* $\Sigma_1 = \{0, 1\}$, *výstupní abecedu* $\Sigma_2 = \{0, 1, *\}$ *a* matricí *P* kanálu

$$P = \begin{pmatrix} 1-\varepsilon & 0 & \varepsilon \\ 0 & 1-\varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}.$$

Diagram odpovídající tomuto kanálu má tvar



To odpovídá situaci, pro kterou má každý symbol pravděpodobnost ε*, že se špatně přenese a to na* $*$*. Ale jak 1 tak 0 nelze navzájem zaměnit.*

Kódování a dekódovací pravidla I

Kódování a dekódovací pravidla

Buď dán kanál bez paměti se vstupní abecedou $\Sigma_1 = \{a_1, \dots, a_m\}$ a výstupní abecedou $\Sigma_2 = \{b_1, \dots, b_k\}$.

Kódování a dekódovací pravidla I

Kódování a dekódovací pravidla

Buď dán kanál bez paměti se vstupní abecedou $\Sigma_1 = \{a_1, \ldots, a_m\}$ a výstupní abecedou $\Sigma_2 = \{b_1, \ldots, b_k\}$.

Kód délky n je libovolný systém $\mathcal{C}$ různých posloupností délky n symbolů ze Σ_1.

Kódování a dekódovací pravidla I

Kódování a dekódovací pravidla

Buď dán kanál bez paměti se vstupní abecedou $\Sigma_1 = \{a_1, \ldots, a_m\}$ a výstupní abecedou $\Sigma_2 = \{b_1, \ldots, b_k\}$.

Kód délky n je libovolný systém $\mathcal{C}$ různých posloupností délky n symbolů ze Σ_1.

Prvky z $\mathcal{C}$ se nazývají *kódová slova*.

Kódování a dekódovací pravidla I

Kódování a dekódovací pravidla

Buď dán kanál bez paměti se vstupní abecedou $\Sigma_1 = \{a_1, \dots, a_m\}$ a výstupní abecedou $\Sigma_2 = \{b_1, \dots, b_k\}$.

Kód délky n je libovolný systém $\mathcal{C}$ různých posloupností délky n symbolů ze Σ_1.

Prvky z $\mathcal{C}$ se nazývají *kódová slova*.

Je-li dán kód délky n s kódovými slovy $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_N$, *dekódovací pravidlo* je libovolný rozklad množiny možných obdržených posloupností do disjunktních množin $R_1, R_2, \dots, R_N$ se zřejmou interpretací toho, že je-li obdržená posloupnost $\mathbf{y}$ prvkem množiny R_j, je $\mathbf{y}$ dekódováno jako kódové slovo $\mathbf{c}_j$.

Kódování a dekódovací pravidla II

Formálně vzato, předpokládáme-li, že kód $\mathcal{C}$ neobsahuje např. symbol "?"jakožto kódové slovo, *rozhodovací (dekódovací) pravidlo* pro kód $\mathcal{C}$ je funkce $f : \Sigma_2^n \to \mathcal{C} \cup \{?\}$.

Kódování a dekódovací pravidla II

Formálně vzato, předpokládáme-li, že kód $\mathcal{C}$ neobsahuje např. symbol "?"jakožto kódové slovo, *rozhodovací (dekódovací) pravidlo* pro kód $\mathcal{C}$ je funkce $f : \Sigma_2^n \to \mathcal{C} \cup \{?\}$.

Aplikaci dekódovacího pravidla nazýváme *dekódování*.

Kódování a dekódovací pravidla II

Formálně vzato, předpokládáme-li, že kód $\mathcal{C}$ neobsahuje např. symbol "?"jakožto kódové slovo, *rozhodovací (dekódovací) pravidlo* pro kód $\mathcal{C}$ je funkce $f : \Sigma_2^n \to \mathcal{C} \cup \{?\}$.

Aplikaci dekódovacího pravidla nazýváme *dekódování*.

Je-li $\mathbf{y}$ (obdržené) slovo v Σ_2^n, pak rozhodovací pravidlo *dekóduje* $\mathbf{y}$ jakožto kódové slovo $f(\mathbf{y})$ nebo v opačném případě nahlásí *dekódovací chybu*, jestliže $f(\mathbf{y}) = ?$.

Kódování a dekódovací pravidla II

Formálně vzato, předpokládáme-li, že kód $\mathcal{C}$ neobsahuje např. symbol "?"jakožto kódové slovo, *rozhodovací (dekódovací) pravidlo* pro kód $\mathcal{C}$ je funkce $f : \Sigma_2^n \to \mathcal{C} \cup \{?\}$.

Aplikaci dekódovacího pravidla nazýváme *dekódování*.

Je-li $\mathbf{y}$ (obdržené) slovo v Σ_2^n, pak rozhodovací pravidlo *dekóduje* $\mathbf{y}$ jakožto kódové slovo $f(\mathbf{y})$ nebo v opačném případě nahlásí *dekódovací chybu*, jestliže $f(\mathbf{y}) = ?$.

Výběr dekódovacího pravidla je podstatný k úspěchu každého komunikačního systému.

Kódování a dekódovací pravidla III

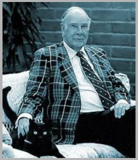
Hammingovo paradigma

Jsou-li $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ vektory z $\mathbf{F}_q^n$, definujme *Hammingovu vzdálenost* $\mathrm{d}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ mezi $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ jako počet míst, ve kterých se $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ liší.

Kódování a dekódovací pravidla III

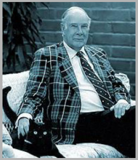
Hammingovo paradigma

Jsou-li $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ vektory z $\mathbf{F}_q^n$, definujme *Hammingovu vzdálenost* $\mathrm{d}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ mezi $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ jako počet míst, ve kterých se $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ liší.



Kódování a dekódovací pravidla III

Hammingovo paradigma



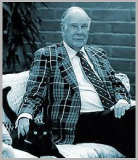
Jsou-li **x** a **y** vektory z $\mathbf{F}_q^n$, definujme *Hammingovu vzdálenost* $\mathrm{d}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ mezi **x** a **y** jako počet míst, ve kterých se **x** a **y** liší. *Minimální vzdálenost kódu* $\mathcal{C}$ je číslo

$$d = \mathrm{d}(\mathcal{C}) = \min \mathrm{d}(\mathbf{c}_i, \mathbf{c}_j),$$

kde je minimum bráno přes všechny navzájem různé dvojice kódových slov z $\mathcal{C}$.

Kódování a dekódovací pravidla III

Hammingovo paradigma



Jsou-li $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ vektory z $\mathbf{F}_q^n$, definujme *Hammingovu vzdálenost* $\mathrm{d}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ mezi $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ jako počet míst, ve kterých se $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ liší. *Minimální vzdálenost kódu* $\mathcal{C}$ je číslo

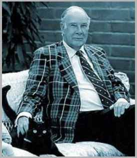
$$d = \mathrm{d}(\mathcal{C}) = \min \mathrm{d}(\mathbf{c}_i, \mathbf{c}_j),$$

kde je minimum bráno přes všechny navzájem různé dvojice kódových slov z $\mathcal{C}$.

Má-l kódování minimální vzdálenost d, můžeme jej považovat za rozmístění navzájem disjunktních koulí o poloměru $t = \lfloor (d-1)/2 \rfloor$ v Hammingově prostoru $\mathbf{F}_q^n$.

Kódování a dekódovací pravidla III

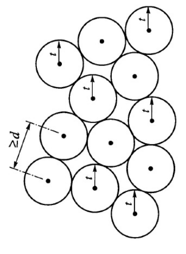
Hammingovo paradigma



Jsou-li **x** a **y** vektory z $\mathbf{F}_q^n$, definujme *Hammingovu vzdálenost* $\mathrm{d}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ mezi **x** a **y** jako počet míst, ve kterých se **x** a **y** liší. *Minimální vzdálenost kódu* $\mathcal{C}$ je číslo

$$d = \mathrm{d}(\mathcal{C}) = \min \mathrm{d}(\mathbf{c}_i, \mathbf{c}_j),$$

kde je minimum bráno přes všechny navzájem různé dvojice kódových slov z $\mathcal{C}$.



Má-l kódování minimální vzdálenost d, můžeme jej považovat za rozmístění navzájem disjunktních koulí o poloměru $t = \lfloor (d-1)/2 \rfloor$ v Hammingově prostoru $\mathbf{F}_q^n$.

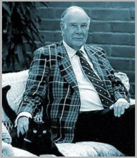
Kódování a dekódovací pravidla III

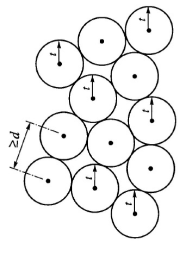
Hammingovo paradigma

Jsou-li $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ vektory z $\mathbf{F}_q^n$, definujme *Hammingovu vzdálenost* $\mathrm{d}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ mezi $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ jako počet míst, ve kterých se $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ liší. *Minimální vzdálenost kódu* $\mathcal{C}$ je číslo

$$d = \mathrm{d}(\mathcal{C}) = \min \mathrm{d}(\mathbf{c}_i, \mathbf{c}_j),$$

kde je minimum bráno přes všechny navzájem různé dvojice kódových slov z $\mathcal{C}$.
Má-l kódování minimální vzdálenost d, můžeme jej považovat za rozmístění navzájem disjunktních koulí o poloměru $t = \lfloor (d-1)/2 \rfloor$ v Hammingově prostoru $\mathbf{F}_q^n$.





Takovýto kód opraví až t chyb.

Kódování a dekódovací pravidla III

Hammingovo paradigma

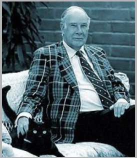
Jsou-li $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ vektory z $\mathbf{F}_q^n$, definujme *Hammingovu vzdálenost* $\mathrm{d}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ mezi $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ jako počet míst, ve kterých se $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ liší. *Minimální vzdálenost kódu* $\mathcal{C}$ je číslo

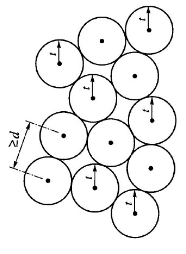
$$d = \mathrm{d}(\mathcal{C}) = \min \mathrm{d}(\mathbf{c}_i, \mathbf{c}_j),$$

kde je minimum bráno přes všechny navzájem různé dvojice kódových slov z $\mathcal{C}$.

Má-l kódování minimální vzdálenost d, můžeme jej považovat za rozmístění navzájem disjunktních koulí o poloměru $t = \lfloor (d-1)/2 \rfloor$ v Hammingově prostoru $\mathbf{F}_q^n$.

Lze tedy pohlížet na teorii kódování jako na kombinatorickou úlohu o rozmístění koulí hustě a efektivně v metrických prostorech.





Takovýto kód opraví až t chyb.

Kódování a dekódovací pravidla IV

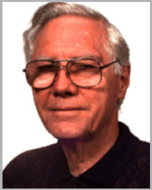
Jaké jsou nejlepší kódy?

$A_q(n, d) =$ největší počet vektorů délky n nad abecedou s q písmeny tak, že každá dvě písmena mají vzdálenost alespoň d.

Kódování a dekódovací pravidla IV

Jaké jsou nejlepší kódy?

$A_q(n, d) =$ největší počet vektorů délky n nad abecedou s q písmeny tak, že každá dvě písmena mají vzdálenost alespoň d.

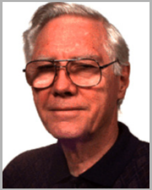


Kódování a dekódovací pravidla IV

Jaké jsou nejlepší kódy?

$A_q(n, d) =$ největší počet vektorů délky n nad abecedou s q písmeny tak, že každá dvě písmena mají vzdálenost alespoň d.

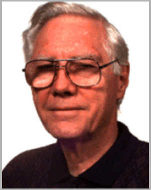
$S_q(n, d) =$ objem Hammingovy sféry o poloměru d ve vektorovém prostoru n-tic nad abecedou s q písmeny.



Kódování a dekódovací pravidla IV

Jaké jsou nejlepší kódy?

$A_q(n,d) =$ největší počet vektorů délky n nad abecedou s q písmeny tak, že každá dvě písmena mají vzdálenost alespoň d.



$S_q(n,d) =$ objem Hammingovy sféry o poloměru d ve vektorovém prostoru n-tic nad abecedou s q písmeny.

Věta (Gilbert-Varshamova hranice)

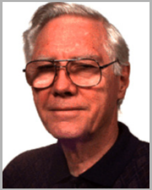
$$A_q(n,d) \geq \frac{q^n}{\sum_{k=0}^{d-1} \binom{n}{k} (q-1)^k} = \frac{q^n}{S_q(n,d-1)}$$

Kódování a dekódovací pravidla IV

Jaké jsou nejlepší kódy?

$A_q(n, d) =$ největší počet vektorů délky n nad abecedou s q písmeny tak, že každá dvě písmena mají vzdálenost alespoň d.

$S_q(n, d) =$ objem Hammingovy sféry o poloměru d ve vektorovém prostoru n-tic nad abecedou s q písmeny.



Věta (Gilbert-Varshamova hranice)

$$A_q(n, d) \geq \frac{q^n}{\sum_{k=0}^{d-1} \binom{n}{k} (q-1)^k} = \frac{q^n}{S_q(n, d-1)}$$

E.N. Gilbert, A comparison of signaling alphabets, Bell Systems Technical Journal, October 1952.

Kódování a dekódovací pravidla IV

Důkaz Gilbert-Varshamovy hranice

.

Kódování a dekódovací pravidla IV

Důkaz Gilbert-Varshamovy hranice

Fixujme libovolný vektor $\mathbf{x}$ z dané množiny vektorů, přidejme jej do konstruovaného kódování a odstraňme z dané množiny Hammingovu sféru o středu $\mathbf{x}$ a poloměru $d - 1$.

Kódování a dekódovací pravidla IV

Důkaz Gilbert-Varshamovy hranice

Fixujme libovolný vektor **x** z dané množiny vektorů, přidejme jej do konstruovaného kódování a odstraňme z dané množiny Hammingovu sféru o středu **x** a poloměru $d - 1$.

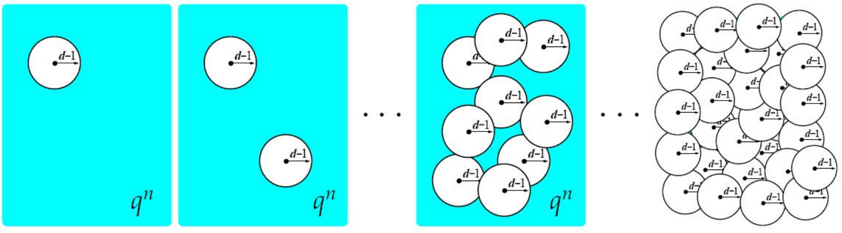
Postup opakujme.

Kódování a dekódovací pravidla IV

Důkaz Gilbert-Varshamovy hranice

Fixujme libovolný vektor **x** z dané množiny vektorů, přidejme jej do konstruovaného kódování a odstraňme z dané množiny Hammingovu sféru o středu **x** a poloměru $d - 1$.

Postup opakujme.

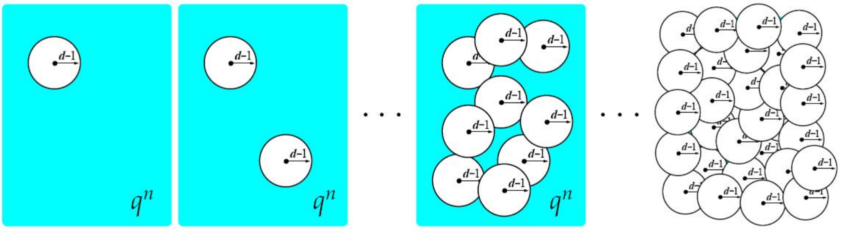


Kódování a dekódovací pravidla IV

Důkaz Gilbert-Varshamovy hranice

Fixujme libovolný vektor **x** z dané množiny vektorů, přidejme jej do konstruovaného kódování a odstraňme z dané množiny Hammingovu sféru o středu **x** a poloměru $d-1$.

Postup opakujme.



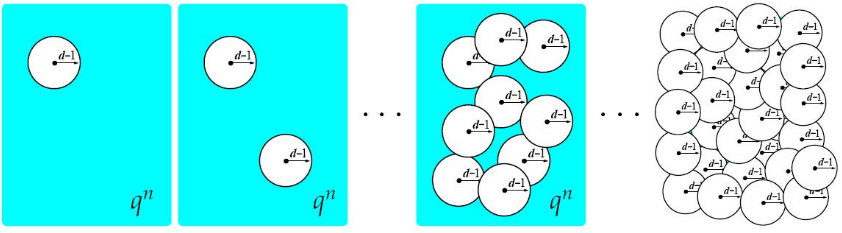
Jestliže po M krocích nic v dané množině nezůstane, nutně M sfér se středy, jež jsou kódová slova, pokrývá celý prostor $\mathbf{F}_q^n$.

Kódování a dekódovací pravidla IV

Důkaz Gilbert-Varshamovy hranice

Fixujme libovolný vektor $\mathbf{x}$ z dané množiny vektorů, přidejme jej do konstruovaného kódování a odstraňme z dané množiny Hammingovu sféru o středu $\mathbf{x}$ a poloměru $d-1$.

Postup opakujme.



Jestliže po M krocích nic v dané množině nezůstane, nutně M sfér se středy, jež jsou kódová slova, pokrývá celý prostor $\mathbf{F}_q^n$.

Nutně tedy $M \sum_{k=0}^{d-1} \binom{n}{k} (q-1)^k \geq q^n$.

Kódování a dekódovací pravidla V

Hammingova hranice a perfektní kódy

Kódování a dekódovací pravidla V

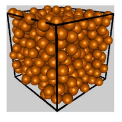
Hammingova hranice a perfektní kódy

$$\frac{q^n}{S_q(n,2e)} \leq A_q(n,2e+1) \leq \frac{q^n}{S_q(n,e)}$$

Kódování a dekódovací pravidla V

Hammingova hranice a perfektní kódy

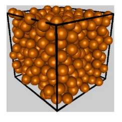
$$\frac{q^n}{S_q(n, 2e)} \leq A_q(n, 2e+1) \leq \frac{q^n}{S_q(n, e)}$$



Kódování a dekódovací pravidla V

Hammingova hranice a perfektní kódy

$$\frac{q^n}{S_q(n,2e)} \leq A_q(n,2e+1) \leq \frac{q^n}{S_q(n,e)}$$

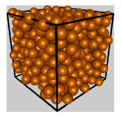


Ideální situace z ekonomického pohledu je najít kód $\mathcal{C}$ nad $\mathbf{F}_q^n$ tak, že pro jisté kladné $t > 0$ jsou všechny prvky z $\mathbf{F}_q^n$ obsaženy v disjunktním sjednocení koulí, jejichž středy jsou navzájem různá kódová slova. Takový kód se pak nazývá *perfektní*.

Kódování a dekódovací pravidla V

Hammingova hranice a perfektní kódy

$$\frac{q^n}{S_q(n,2e)} \leq A_q(n,2e+1) \leq \frac{q^n}{S_q(n,e)}$$



Ideální situace z ekonomického pohledu je najít kód $\mathcal{C}$ nad $\mathbf{F}_q^n$ tak, že pro jisté kladné $t > 0$ jsou všechny prvky z $\mathbf{F}_q^n$ obsaženy v disjunktním sjednocení koulí, jejichž středy jsou navzájem různá kódová slova. Takový kód se pak nazývá *perfektní*.
Příklady perfektního kódu:

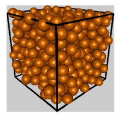
1. každý kód s právě jedním kódovým slovem,
2. každý binární kód s právě dvěma slovy lichých délek, např. $00\ldots0$ a $11\ldots1$.

Triviální perfektní kódy

Kódování a dekódovací pravidla V

Hammingova hranice a perfektní kódy

$$\frac{q^n}{S_q(n,2e)} \leq A_q(n,2e+1) \leq \frac{q^n}{S_q(n,e)}$$



Ideální situace z ekonomického pohledu je najít kód $\mathcal{C}$ nad $\mathbf{F}_q^n$ tak, že pro jisté kladné $t > 0$ jsou všechny prvky z $\mathbf{F}_q^n$ obsaženy v disjunktním sjednocení koulí, jejichž středy jsou navzájem různá kódová slova. Takový kód se pak nazývá *perfektní*. Příklady perfektního kódu:

1. každý kód s právě jedním kódovým slovem,
2. každý binární kód s právě dvěma slovy lichých délek, např. $00\ldots0$ a $11\ldots1$.

Triviální perfektní kódy

3. $(n, n-m, 3)$ Hammingovy kódy pro $n = 2^m - 1$,
4. $(23, 12, 7)$ binární Golayův kód.

Netriviální perfektní kódy

Kódování a dekódovací pravidla VI

Singletonova hranice a MDS kódy

Kódování a dekódovací pravidla VI

Singletonova hranice a MDS kódy

$$A_q(n, d) \leq q^{n-d+1}$$

Příklady MDS kódů

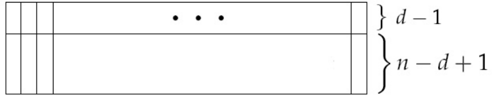
- Reed-Solomonovy kódy a zobecněné Reed-Solomonovy kódy

Kódování a dekódovací pravidla VI

Singletonova hranice a MDS kódy

$$A_q(n,d) \leq q^{n-d+1}$$

Seznam všech kódových slov



Příklady MDS kódů

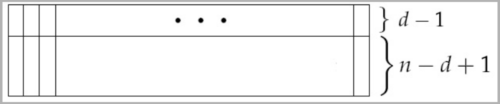
- Reed-Solomonovy kódy a zobecněné Reed-Solomonovy kódy

Kódování a dekódovací pravidla VI

Singletonova hranice a MDS kódy

$$A_q(n, d) \leq q^{n-d+1}$$

Seznam všech kódových slov



Kódy, pro které nastane v Singletonově hranici rovnost, se nazývají *MDS kódy* (maximum distance separable).

Příklady MDS kódů

- Reed-Solomonovy kódy a zobecněné Reed-Solomonovy kódy

Kódování a dekódovací pravidla VII

Konstrukce Reed-Solomonových kódů

Popíšeme kódování pomocí kódovacího předpisu $\mathcal{E} : \mathbf{F}_q^k \to \mathbf{F}_q^n$.

Kódování a dekódovací pravidla VII

Konstrukce Reed-Solomonových kódů

Popíšeme kódování pomocí kódovacího předpisu $\mathcal{E} : \mathbf{F}_q^k \to \mathbf{F}_q^n$. Zafixujme přirozená čísla $k \leq n \leq q$ a n různých prvků $x_1, \dots, x_n \in \mathbf{F}_q$.

Kódování a dekódovací pravidla VII

Konstrukce Reed-Solomonových kódů

Popíšeme kódování pomocí kódovacího předpisu $\mathcal{E} : \mathbf{F}_q^k \to \mathbf{F}_q^n$. Zafixujme přirozená čísla $k \leq n \leq q$ a n různých prvků $x_1, \ldots, x_n \in \mathbf{F}_q$. Pak z k informačních symbolů obdržíme n kódových slov.

Kódování a dekódovací pravidla VII

Konstrukce Reed-Solomonových kódů

Popíšeme kódování pomocí kódovacího předpisu $\mathcal{E} : \mathbf{F}_q^k \to \mathbf{F}_q^n$. Zafixujme přirozená čísla $k \leq n \leq q$ a n různých prvků $x_1, \ldots, x_n \in \mathbf{F}_q$. Pak z k informačních symbolů obdržíme n kódových slov.

$$u_0, u_1, \ldots, u_{k-1}$$
$$\Downarrow$$
$$f_{\underline{u}}(X) = u_0 + u_1 X + \cdots + u_{k-1} X^{k-1}$$
$$\Downarrow$$
$$c_1 = f_{\underline{u}}(x_1),\ c_2 = f_{\underline{u}}(x_2),\ \cdots,\ c_n = f_{\underline{u}}(x_n)$$
$$\Downarrow$$
$$(c_1, c_2, \ldots, c_n)$$

Kódování a dekódovací pravidla VII

Konstrukce Reed-Solomonových kódů

Popíšeme kódování pomocí kódovacího předpisu $\mathcal{E} : \mathbf{F}_q^k \to \mathbf{F}_q^n$. Zafixujme přirozená čísla $k \leq n \leq q$ a n různých prvků $x_1, \ldots, x_n \in \mathbf{F}_q$. Pak z k informačních symbolů obdržíme n kódových slov.

$$u_0, u_1, \ldots, u_{k-1}$$
$$\Downarrow$$
$$f_{\underline{u}}(X) = u_0 + u_1 X + \cdots + u_{k-1} X^{k-1}$$
$$\Downarrow$$
$$c_1 = f_{\underline{u}}(x_1),\ c_2 = f_{\underline{u}}(x_2),\ \cdots,\ c_n = f_{\underline{u}}(x_n)$$
$$\Downarrow$$
$$(c_1, c_2, \ldots, c_n)$$

Reed-Solomonovy kódy jsou lineární. Mají poměr $R = k/n$ a vzdálenost $d = n - k + 1$, která je nejlepší možná (MDS).

Kódování a dekódovací pravidla VIII

Algebraické dekódování Reed-Solomonových kódů

Kódování a dekódovací pravidla VIII

Algebraické dekódování Reed-Solomonových kódů

- Každé kódové slovo Reed-Solomonova kódu $\mathbf{C}_q(n,k)$ sestává z nějakých n hodnot polynomu $f(X)$, který je stupně $< k$.

Kódování a dekódovací pravidla VIII

Algebraické dekódování Reed-Solomonových kódů

- Každé kódové slovo Reed-Solomonova kódu $\mathbf{C}_q(n,k)$ sestává z nějakých n hodnot polynomu $f(X)$, který je stupně $< k$. Tento polynom můžeme jednoznačně zpětně určit interpolací jeho libovolných k funkčních hodnot.

Kódování a dekódovací pravidla VIII

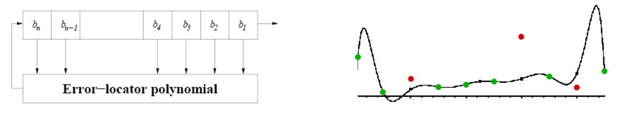
Algebraické dekódování Reed-Solomonových kódů

- Každé kódové slovo Reed-Solomonova kódu $\mathbf{C}_q(n, k)$ sestává z nějakých n hodnot polynomu $f(X)$, který je stupně $< k$. Tento polynom můžeme jednoznačně zpětně určit interpolací jeho libovolných k funkčních hodnot.
- Tedy Reed-Solomonův kód $\mathbf{C}_q(n, k)$ může opravit až $(n - k)/2 = (d - 1)/2$ chyb.

Kódování a dekódovací pravidla VIII

Algebraické dekódování Reed-Solomonových kódů

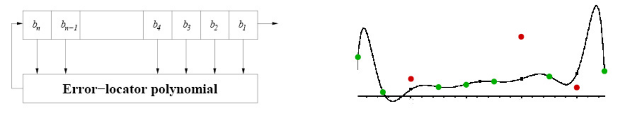
- Každé kódové slovo Reed-Solomonova kódu $\mathbf{C}_q(n, k)$ sestává z nějakých n hodnot polynomu $f(X)$, který je stupně $< k$. Tento polynom můžeme jednoznačně zpětně určit interpolací jeho libovolných k funkčních hodnot.
- Tedy Reed-Solomonův kód $\mathbf{C}_q(n, k)$ může opravit až $(n - k)/2 = (d - 1)/2$ chyb.



Kódování a dekódovací pravidla VIII

Algebraické dekódování Reed-Solomonových kódů

- Každé kódové slovo Reed-Solomonova kódu $\mathbf{C}_q(n,k)$ sestává z nějakých n hodnot polynomu $f(X)$, který je stupně $< k$. Tento polynom můžeme jednoznačně zpětně určit interpolací jeho libovolných k funkčních hodnot.
- Tedy Reed-Solomonův kód $\mathbf{C}_q(n,k)$ může opravit až $(n-k)/2 = (d-1)/2$ chyb.



- Berlekamp-Masseyho algoritmus je velmi efektivní způsob pro takovéto dekódování.

Kódování a dekódovací pravidla IX

Algebraické soft-decision dekódování Reed-Solomonových kódů

Kódování a dekódovací pravidla IX

Algebraické soft-decision dekódování Reed-Solomonových kódů