HYPERBOLICKÉ ROVNICE

se řeší obdobným způsobem jako parabolické. Ukážeme stručně metody pro vlnovou rovnici

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t) \quad , \quad (x,t) \in D \times D_t$$

$$u(x,o) = g^o(x) \ , \quad \frac{\partial u(x,o)}{\partial t} = g^1(x) \ , \quad x \in D$$

$$u(o,t) = g^2(t) \ , \quad u(1,t) = g^3(t) \ , \quad t \in D_t$$

kde $D = (o,1)$, $D_t = [o,T]$.

Přibližné řešení hledáme na obdélníkové síti s kroky h, τ ; $h = \frac{1}{M}$, $\tau = \frac{T}{N}$ pomocí diferenčního schematu s váhou $\sigma \geq o$:

(72)
$$\frac{1}{\tau^2}(u^h_{m,n+1} - 2 u^h_{m,n} + u^h_{m,n-1}) - \Big\{ \frac{\sigma}{h^2} (u^h_{m+1,n+1} - 2u^h_{m,n+1} + u^h_{m-1,n+1}) + \frac{(1-2\sigma)}{h^2} (u^h_{m+1,n} - 2u^h_{m,n} + u^h_{m-1,n}) + \frac{\sigma}{h^2} (u^h_{m+1,n-1} - 2u^h_{m,n-1} + u^h_{m-1,n-1})\Big\} = f_{m,n} \ , \quad m = 1,2,\dots,M-1 \ ; \ n = 1,2,\dots,N-1 .$$

$$u^h_{o,n} = g^2_n \ , \quad u^h_{M,n} = g^3_n \ , \quad n = 1,\dots,N .$$

Lehce se zjistí, že chyba aproximace je $O(\tau^2 + h^2)$, pokud je řešení dostatečně hladké. Pokud systém (72) vhodně přeuspořádáme, vidíme, že lze opět řešit po vrstvách. Hodnotu na (n+1)té vrstvě vypočítáme z hodnot na předcházejících dvou vrstvách :

(73)
$$\frac{\tau^2}{h^2} \left(+ \sigma u^h_{m+1,n+1} - \left(2\sigma + \frac{h^2}{\tau^2}\right) u^h_{m,n+1} + \sigma u_{m-1,n+1}\right) = F_{m,n}$$

$$u^h_{o,n+1} = g^2_{n+1} \ , \quad u^h_{M,n+1} = g^3_{n+1} \ , \quad m = 1,\dots,M-1; n=1,2,\dots N-1.$$

kde
$$F_{m,n} = - \frac{(1-2\sigma)\tau^2}{h^2} (u^h_{m+1,n} - 2u^h_{m,n} + u^h_{m-1,n}) - 2u^h_{m,n} - \frac{\sigma\tau^2}{h^2} \times (u^h_{m+1,n-1} + u^h_{m-1,n-1} - 2u^h_{m,n-1} - \tau^2 f_{m,n} + u^h_{m,n-1} .$$

Hodnoty na prvních dvou vrstvách získáme z počátečních podmínek

(74) $$u^h_{m,o} = g^o_m \ , \quad m = o,1,\dots,M$$

(75) $$\frac{u^h_{m,1} - u^h_{m,o}}{\tau} = g^1_m \ , \quad m = o,1,\dots,M$$

(75)

Používat aproximace však není vhodné, neboť její chyba je pouze prvního řádu, a tím ztrácíme přesnost získanou při aproximaci diferenciální rovnice

Proto počáteční podmínku

(76) $$\frac{\partial u(x,o)}{\partial t} = g^1(x)$$

je vhodné aproximovat přesněji. Jedna z metod spočívá v tom, že zavedeme ještě jednu vrstvu pomocných uzlů pro $n = -1$ a předpokládáme, že lze řešení vlnové rovnice rozšířit i do nich. Podmínku (76) pak nahradíme rovnicí

$$\frac{u^h_{m,1} - u^h_{m,-1}}{2\tau} = g^1_m \ .$$

chyba této aproximace je $O(\tau^2)$. Z tohoto vztahu a z diferenčního připisu vlnové rovnice (73) pro $n = 0$ vyloučíme pomocné hodnoty $u_{m,-1}$ a získáme systém lineárních rovnic pro hodnoty řešení na první vrstvě :

(77)
$$\frac{2\sigma\tau^2}{h^2} u^h_{m+1,1} - u^h_{m,1}\left(\frac{4\sigma\tau^2}{h^2} + 2\right) + \frac{2\sigma\tau^2}{h^2} u^h_{m-1,1} = F_{m,1} ,$$

$$u^h_{o,1} = g^2_1 \ , \quad u^h_{M,1} = g^3_1 ,$$

kde
$$F_{m1} = \frac{(1 - 2\sigma)}{h^2} \tau^2 (g^o_{m+1} g^o_m + g^o_{m-1}) - 2(g^o_m + g^1_m \tau) + \frac{2\sigma\tau^3}{h^2} (g^1_{m+1} - 2g^1_m + g^1_{m-1}) - \tau^2 f_{m,o} .$$

Použijeme-li aproximaci (73), (74), (77) pak chyba bude tvaru $O(\tau^2 + h^2)$. Přitom je vidět, že musíme řešit systémy lineárních rovnic s triagonální maticí, které jsme vyšetřovali v předcházející kapitole, přitom podmínka (29) § 3 je splněna. Odtud plyne, že tyto systémy jsou jednoznačně řešitelné např. Gaussovou eliminací a tedy první podmínka stability je splněna.

Při ověřování druhé podmínky stability můžeme využít metod, které jsme poznali u parabolických rovnic. Ukážeme užití metody Fourierových řad pro tzv. explicitní schema : $\sigma = 0$, homogenní okrajové podmínky a $f \equiv 0$, která sleduje zejména vliv počáteční podmínky:

$$\frac{u^h_{m,n+1} - 2u^h_{m,n} + u^h_{m,n-1}}{\tau^2} - \frac{u^h_{m+1,n} - 2u^h_{m,n} + u^h_{m-1,n}}{h^2} = 0 \qquad (78)$$

$$m = 1,2,\dots, M-1 \ , \quad n = 0,1,\dots, N-1,$$

$$u^h_{mo} = g^o_m \ ; \quad u^h_{m1} = -\frac{1}{2} F_{m,1} = \bar{F}_m \ , \quad m = 0,1,\dots, M \ .$$

$$u^h_{o,n} = u^h_{M,n} = 0 \ , \quad n = 0,1,\dots,N$$

Budeme hledat řešení ve tvaru

$$u^h_{m,n} = \lambda^n_k \sqrt{2} \sin \frac{k\pi m}{M} = \lambda^n_k \gamma^k_m \ .$$

Dosazením do (78) zjistíme, že pro λ_k platí:

$$\lambda^2_k - 2\left(1 - 2r^2 \sin^2 \frac{k\pi}{2M}\right) + 1 = 0 \ , \quad r = \frac{\tau}{h} \ ,$$

$$\lambda_{1,k} = 1 - 2r^2 \sin^2 \frac{k\pi}{2M} + \sqrt{\left(1 - 2r^2 \sin^2 \frac{k\pi}{2M}\right)^2 - 1}$$

$$\lambda_{2,k} = 1 - 2r^2 \sin^2 \frac{k\pi}{2M} - \sqrt{\left(1 - 2r^2 \sin^2 \frac{k\pi}{2M}\right)^2 - 1} \ .$$

Tedy obecné řešení úlohy (78) je tvaru

$$u^h_{m,n} = \sum_{k=1}^{M-1} [\alpha_k \lambda^n_{1k} + \beta_k \lambda^n_{2k}] \gamma^k_m$$

kde čísla α_k, β_k určíme z počátečních podmínek:

$$u^h_{m,o} = \sum_{k=1}^{M-1} (\alpha_k + \beta_k) \gamma^k_m = g^o_m$$

$$u^h_{m1} = \sum_{k=1}^{M-1} (\alpha_k \lambda_{1k} + \beta_k \lambda_{2k}) \gamma^k_m = \bar{F}_m \ , \quad m = 1,\dots,M-1 \ .$$

Předpokládejme, že platí

$$|\lambda_{s,k}| \leq 1 \quad , \quad s = 1,2 \ , \quad k = 1,\dots, M-1 \ . \qquad (80)$$

a označme $\quad u^n = (u^h_{on}, \dots, u^h_{M,n})^T$.

Normu na množině všech vektorů (M+1) rozměrných definujeme podobně jako u parabolických parciálních diferenciálních rovnic pomocí skalárního součinu

$$\|v\|^2 = (v,v) \ , \quad (v,w) = h \sum_{m=0}^{M} v_i \bar{w}_i \ .$$

Pak $\gamma^k = (0, \gamma^k_1, \dots, \gamma^k_{M-1}, 0)$ je ortonormální množina.
Tedy z (79) vyplývá, že

$$\alpha_k = \frac{(\bar{F}, \gamma^k) - 2K(g^o, \gamma^k)}{\lambda_{1k} - \lambda_{2k}} \ , \quad k = \frac{\lambda_{1k}(g^o, \gamma^k) - (\bar{F}, \gamma^k)}{\lambda_{1k} - \lambda_{2k}}$$

Dále

$$\|u^{n+1}\|^2 = (u^{n+1}, u^{n+1}) = h \sum_{k=1}^{M-1} |\alpha_k \lambda^{n+1}_{1k} + \beta_k \lambda^{n+1}_{2k}|^2 \leq$$

$$\leq h \sum_{k=1}^{-1} (|\alpha_k| + |\beta_k|)^2 \leq \frac{h}{\left|\left(1 - r^2 \sin^2 \frac{\pi}{2M}\right)^2 - 1\right|} \sum_{k=1}^{M-1} \left(|(\bar{F}, \gamma^k)| + |(g^o, \gamma^k)|\right)^2 \leq$$

$$\frac{1}{1 - \left(1 - r^2 \sin^2 \frac{\pi}{2M}\right)^2} \left(\max_{1 \leq k \leq M} |(\bar{F}, \gamma^k)| + \max_{1 \leq k \leq M} |(g^o, \gamma^k)| \right)^2 .$$

Pokud tedy volíme

$$\|\varphi\|_{G_1} = \max_{1 \leq k \leq M-1} |(\varphi, \gamma^k)| \ ,$$

$$\|u^h\|_{\phi_h} = \max_{0 \leq n \leq N} \|u^n\| \ ,$$

pak

$$\|u^h\|_{\phi_h} \leq \frac{1}{\sqrt{1 - \left(1 - r^2 \sin^2 \frac{\pi}{M}\right)^2}} \left(2\|g^o\|_{G_1} + \tau \|g^1\|_{G_1}\right) \leq$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{1 - \left(1 - r^2 \sin^2 \frac{\pi}{M}\right)^2}} \left(2\|g^o\|_{G_1} + T\|g^1\|_{G_1}\right)$$

a odtud plyne, že úloha je stabilní. Podmínka (80) je splněna v případě, že platí

$$\frac{\tau}{h} \leq 1 \ .$$

Podmínka

$$\frac{\tau}{h} \leq 1 \ .$$

je nejen dostatečnou podmínkou stability, ale je i nutnou podmínkou.

To vyplývá z následující úvahy:

Uvažujme libovolný bod sítě S a sestrojme trojúhelník s vrcholem v S a se směrnicemi ramen $\pm \tau/h$ a základnou $C\,D$ na ose x. (pro jednoduchost předpokládáme, že trojúhelník neprotne boční strany definičního obdélníku). Jak je vidět ze tvaru diferenčních rovnic (78) je hodnota u_S v uzlovém bodě S určena hodnotami v těch uzlových bodech $u_{m,n}$, které leží uvnitř a na hranici tohoto trojúhelníka, tedy speciálně hodnotami g^o_m, g^1_m na základně $C\,D$. Je ale známo z teorie parciálních diferenciálních rovnic, že přesné řešení problému je plně určeno hodnotami funkcí g^o, g^1 na úsečce AB osy x, kterou vytínají charakteristiky procházející bodem S, mající v našem případě směrnice ± 1. Jestliže tedy $\tau > h$, pak $C\,D \subset A\,B$, $C \neq A$, $D \neq B$ a obecně konvergence nemůže nastat - změníme-li totiž funkce g^o, g^1 na intervalech $A\,C$, $D\,B$, pak se změní řešení vlnové rovnice, ale systém diferenčních rovnic je stejný, tedy i jeho řešení v bodě S je stejné. Proto v tomto případě nemůže nastat stabilita metody.

Podobným způsobem jako pro explicitní schema můžeme zjistit, že implicitní schema ($\sigma = 1$) je absolutně stabilní, je stabilní při libovolných krocích τ, h .

Uvažujme nyní rovnici vedení tepla ve dvou prostorových proměnných:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x,y,t) \quad , \qquad (x,y,t) \in D \times D_t,$$

$$u(x,y,0) = g^o(x,y)$$

$$\frac{\partial u(x,y,o)}{\partial t} = g^1(x,y) \quad , \qquad (x,y) \in D$$

$$u(x,y,t) = 0 \qquad (x,y,t) \in \partial D \times D_t$$

Zde $D = (o,1) \times (o,1)$, $D_t = [o,T]$.

Zavedeme síť obdobně jako pro vlnovou rovnici v jedné prostorové proměnné s kroky h podle x a y a τ podle t. Potom explicitní schema můžeme zapsat ve tvaru

$$\frac{u_{k,m,n+1} - 2u_{k,m,n} + u_{k,m,n-1}}{\tau^2} + A\, u_{k,m,n} = f_{k,m,n} \;;$$

$$u_{m,n,o} = g^o_{m,n}$$

$$u_{m,n,1} = g_{m,n}$$

kde g je vhodná funkce, závislá na g^o a g^1, , A je operátor definovaný vztahem (57) .

I zde lze použít metodu stabilizace. Budeme uvažovat schema

$$(81) \quad \left(E + \frac{\tau^2}{2} A_1\right)\left(E + \frac{\tau^2}{2}\right) A_2 \; \frac{u_{km,+1} - 2u_{k,m,n} + u_{k,m,n-1}}{\tau^2} + {}_{m,n} = F_{k,m,n}$$

$$u_{k,m,o} = g^o_{m,n} \,, \quad u_{m,n,1} = g_{m,n} \,.$$

Operátory A_1, A_2 jsou dány vztahy (55), (56).
Realizace tohoto druhu je následující:

$$\left(E + \frac{\tau^2}{2} A_1\right) \xi^{n+1/2} = f^n - A\,u^n$$

$$\left(E + \frac{\tau^2}{2} A_2\right) \xi^{n+1} = \xi^{n+1/2}$$

$$u^{n+1} = 2u^n - u^{n-1} + \tau^2 \, \xi^{n+1} .$$

Zde je použito označení z metody stabilizace u parabolických rovnic, $\xi^{n+1/2}$, ξ^{n+1} jsou pomocné vektory. Opět lze lehce dokázat, že chyba aproximace je $O(\tau^2 + h^2)$ a vzhledem k tomu, že (81) lze převést na

$$\frac{u_{k,m,n+1} - 2u_{k,m,n} + u_{k,m,n-1}}{\tau^2} + B\, u_{k,m,n} = B_1\, f_{k,m,n} \,,$$

$$B_1 = \left(E + \frac{\tau^2}{2} A_1\right)^{-1} \left(E + \frac{\tau^2}{2} A_2\right)^{-1} , \quad B = B_1 \; A$$

lze vyšetřovat stabilitu podobně jako pro úlohu (78) .

Výpočet nespojitých řešení

Dosud jsme předpokládali, že existuje dostatečně hladké řešení. Diferenciální funkce však nestačí k popisu všech fyzikálních situací. Např. rozložení tlaku hustoty a teploty v plynu, pohybujícím se rychlostí větší než rychlost zvuku jsou popsány funkcemi, které mají skoky. Je nutno tedy rozšířit pojem řešení diferenciální úlohy. Ukážeme 2 způsoby. Nejdříve však stručně popíšeme mechanismus vzniku skoků na příkladě jednoduché úlohy

$$(82) \quad \begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad , \quad 0 < t < T \; , \; -\infty < x < \infty , \\ &u(x,o) = \psi(x) \quad , \quad -\infty < x < \infty . \end{aligned}$$