MASARYKOVA UNIVERZITA

Z2069 Statistické metody a zpracování dat II

I. Analýza rozptylu

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

K čemu to je (příklad)

Studenti se připravovali na test ze statistiky třemi různými metodami.

Existuje na hladině významnosti α=0,05 rozdíl mezi metodami přípravy?

Metoda učení		
A	B	C
89	104	86
101	120	98
87	98	100
87	110	96

Faktor

Výběr	Počet	Součet	Průměr	Rozptyl
A	4	364	91	45,3
B	4	432	108	88
C	4	380	95	38,7

ANOVA

Zdroj variability	SS	Rozdíl	MS	F	Hodnota P	F krit
Mezi výběry	632	2	316	5,511628	0,027364	4,256492
Všechny výběry	516	9	57,33333			
Celkem	1148	11				

Existuje rozdíl

K čemu to je?

- Porovnávání libovolného počtu průměrů (více než dvou).
- Jeden či více tzv. **faktorů** dělí vyšetřované znaky do skupin.
- Testujeme, zda existuje významný rozdíl v průměrech skupin

Příklady:

- Vliv průmyslové lokality na koncentraci přízemního ozónu v ovzduší. Pro čtyři lokality jsme získali několik vzorků měření koncentrace přízemního ozónu. Máme zjistit, zda má lokalita významný vliv na koncentraci ozónu. Existuje lokalita, která se významně liší od ostatních?
- Existuje významný rozdíl v názoru různých skupin obyvatelstva na problém polohy brněnského nádraží?

Obecný problém, který řeší ANOVA

	Skupina1	Skupina2	.	.	Skupina_m
Měření1	x_{11}	x_{12}	.	.	x_{1m}
Měření2	x_{21}	x_{11}	.	.	
Měření3	.	.	x_{ij}	.	
.	.	.	.	.	
Měření_n	x_{n1}			.	
Počet	n_1	n_2	n_3	.	n_m
Průměr	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$		.	$\bar{x}_m$
Sm.odch.	s_1	s_2		.	s_m

Máme *m* nezávislých náhodných výběrů (*m>2, j=1,2,….m)* vyšetřované proměnné *x.* Rozsahy výběrů n_j nemusí být stejné. V každém výběru je znám průměr $\bar{x}_j$ a rozptyl s_j^2.

Výběry vzniknou obvykle tak, že základní soubor rozdělíme podle určitého znaku (FAKTORU) do *m* skupin a v každé z nich pak vybereme n_i prvků.

Prvek x_{ij} označuje i-té pozorování v *j*-tém výběru

Základní druhy ANOVA

- ANOVA při jednoduchém třídění (**jednofaktorová**) – sledujeme efekt jednoho faktoru na závisle proměnnou
- ANOVA **vícefaktorová** – při dvojnásobném třídění, …
- ANOVA při **vyváženém** třídění (stejný počet prvků ve skupinách) a při **nevyváženém** třídění
- ANOVA s **opakováním** měření
- **Neparametrická** ANOVA

Dva důvody, proč nemůžeme analýzu provést postupným testováním jednotlivých dvojic (např. t-testem):

(poznámka)

1) Museli bychom provádět **velký počet testování** (pro *m* skupin *m.(m-1)*/2 testů

2) Opakovaným porovnáváním významnosti bychom neoprávněně **zvyšovali pravděpodobnost chyby prvního druhu.**

U každého testu je řekněme 5% možnost chybného pozitivního výsledku (tedy chyby prvního druhu - hladina významnosti α = 0,05) pokud neexistuje žádný rozdíl.

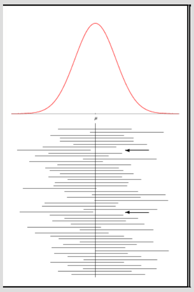
Máme-li tři skupiny a provedeme všechny tři testy, pravděpodobnost, že dostaneme nejméně jeden chybný pozitivní výsledek (chybu prvního druhu) je větší než 5 %.

S rostoucím počtem provedených testů roste pravděpodobnost, že alespoň jeden výsledek bude statisticky významný, přestože ve skutečnosti platí nulová hypotéza.

Abychom se tomuto problému vyhnuli, použijeme k testování hypotézy metodu analýzy rozptylu a testů, které řeší tzv. mnohonásobná porovnávání (viz. dále).

(poznámka)

Dva důvody, proč nemůžeme analýzu provést postupným testováním jednotlivých dvojic



http://new.euromise.org

S rostoucím počtem provedených testů roste pravděpodobnost, že alespoň jeden výsledek bude statisticky významný, přestože ve skutečnosti platí nulová hypotéza.

Obecný model analýzy rozptylu

ANOVA je založena na **předpokladu**, že každý z m výběrů pochází z populace s normálním rozdělením se stejnou směrodatnou odchylkou.

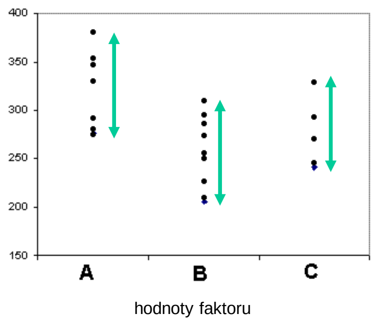
Zajímá nás, zda střední hodnoty (průměry) skupin jsou všechny shodné, nebo zda se navzájem liší.

$$x_{ij} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij}$$

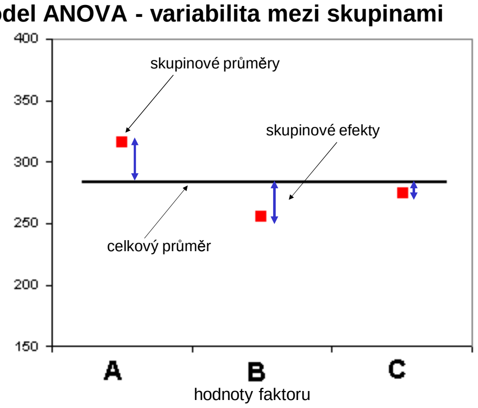
x_{ij} je i-té pozorování z j-té skupiny.

Každé pozorované x je funkcí nějaké celkové průměrné hodnoty μ, **skupinového efektu** α_i a blíže nespecifikované náhodné chyby ε_{ij} .

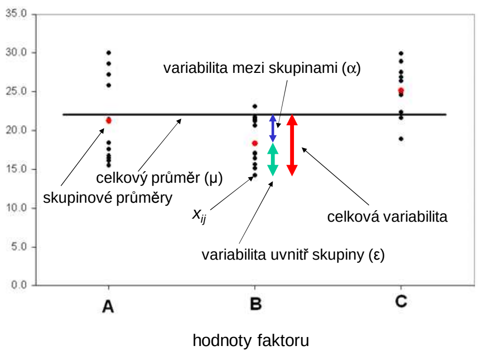
Model ANOVA - variabilita uvnitř skupin



Model ANOVA - variabilita mezi skupinami



Zdroje variability v modelu ANOVA



Obecný model analýzy rozptylu

Z předchozího plyne, že střední hodnota j-té skupiny je rovna:

$$\mu_j = \mu + \alpha_j$$

V analýze rozptylu chceme zjistit, zda jsou skupinové efekty důležité, tj. zda existuje nějaký rozdíl mezi průměry jednotlivých skupin.

Nulová hypotéza H_0: všechny výběry pocházejí z jednoho základního souboru s normálním rozložením (jinými slovy – faktor neovlivňuje závisle proměnnou)

H_0: $\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_i = \ldots = \mu_m = \mu$

nebo:

H_0: $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_i = \ldots = \alpha_m = 0$

Cílem ANOVA je zjistit, zda se jednotlivé dílčí průměry μ_m mezi sebou a tedy i od celkového průměru μ liší pouze v mezích náhodného kolísání.

Obecný výpočet ANOVA

Podstatou výpočtů při ANOVA je rozdělení celkového rozptylu (S_T) závisle proměnné do dvou částí, na **variabilitu uvnitř skupin** (S_e) a **variabilitu mezi skupinami** (S_A)

$$S_T = S_A + S_e$$

Variabilita uvnitř skupin popisuje, jak se každá hodnota ve skupině liší od skupinového průměru.

Variabilita mezi skupinami je funkcí, která ukazuje, jak se navzájem liší skupinové průměry. Zahrnuje porovnání všech k skupinových průměrů s tzv. celkovým průměrem.

Pokud neexistuje žádný rozdíl mezi skupinovými průměry, pak variabilita mezi skupinami i variabilita v rámci skupiny popisují stejný jev - stejný populační rozptyl.

Toto porovnání variability v rámci skupiny a mezi skupinami se provádí pomocí **F testu**.

Obecný výpočet ANOVA

Zkoumáme, že vypočtené průměry $\bar{x}_j$ se liší jen v mezích náhodného kolísání $\bar{x}$

Odchylku konkrétního měření x_{ij} od celkového průměru lze zapsat:

$$x_{ij} - \bar{x} = (x_{ij} - \bar{x}_j) + (\bar{x}_j - \bar{x})$$

odhad parametru α_j - tedy efekt kategorie j

Umocníme a sečteme obě strany rovnice pro všechna měření:

$$S_T = \sum_j \sum_i (x_{ij} - \bar{x})^2 = \sum_j n_j (\bar{x}_j - \bar{x})^2 + \sum_j \sum_i (x_{ij} - \bar{x}_j)^2 = S_A + S_e$$

Obecný výpočet ANOVA

Jednotlivé složky celkového rozptylu mají tento význam:

S_T – celkový součet čtverců odchylek všech měření od celkového průměru

S_A - vážený součet druhých mocnin rozdílů každého skupinového průměru a celkového průměru

S_e - součet druhých mocnin rozdílů hodnot a příslušného skupinového průměru

Každé složce rozptylu přísluší jistý počet stupňů volnosti ν :

ν_T pro S_T – počet pozorování – 1:		*(n-1)*
ν_A pro S_A - počet skupin – 1:		*(m-1)*
ν_e pro S_e – počet pozorování – počet skupin:		*(n – m)*

Obecný výpočet ANOVA

Charakteristiky

$$MS_A = \frac{S_A}{\nu_A} \qquad MS_e = \frac{S_e}{\nu_e}$$

představují součty čtverců dělené odpovídajícím počtem stupňů volnosti. Tyto veličiny jsou **mírou variability pro jednotlivé zdroje rozptylu** a ve statistických programech jsou označovány anglicky jako Mean Square (průměrné čtverce).

Testovací kritérium se potom vypočte jako podíl míry variability mezi skupinami a míry variability uvnitř skupin podle následujícího vztahu:

$$F = \frac{MS(mezi\_skupinami)}{MS(uvnitř\_skupin)} = \frac{S_A/\nu_A}{S_e/\nu_e}$$

Typická tabulka výstupu z ANOVA

Zdroj variability	S	st.v.	MS	F
faktor *A*	S_A	$m-1$	$MS_A = \frac{S_A}{m-1}$	$F = \frac{MS_A}{MS_e}$
reziduální	S_e	$n-m$	$MS_e = \frac{S_e}{n-m}$	
Celková variabilita	S_T	$n-1$		

Výstupy ze statistického programu ještě nabízejí ***p hodnotu*** příslušející vypočtené hodnotě testovacího kritéria

Interpretace testovacího kritéria

Zdroj variability	S	st.v.	MS	F
faktor *A*	S_A	$m-1$	$MS_A = \frac{S_A}{m-1}$	$F = \frac{MS_A}{MS_e}$
reziduální	S_e	$n-m$	$MS_e = \frac{S_e}{n-m}$	
Celková variabilita	S_T	$n-1$		

- V případě platnosti H_0 (všechny populační průměry shodné) bude čitatel *F* statistiky (zhruba) stejný jako jmenovatel (tzv. reziduální rozptyl)
- Pak by tedy hodnota *F* statistiky byla přibližně rovna jedné. Ve statistických tabulkách zjistíme, zda hodnota *F* je významně větší než 1
- To by ukazovalo, že *MS* mezi skupinami je významně větší než *MS* uvnitř skupin, a tedy že se průměry skupin liší.
- (Pokud by *F* statistika byla menší než 1, pak to znamená, že variabilita mezi skupinami může být dokonce menší než uvnitř skupin, a tedy tím spíše není důvod zamítat nulovou hypotézu.)

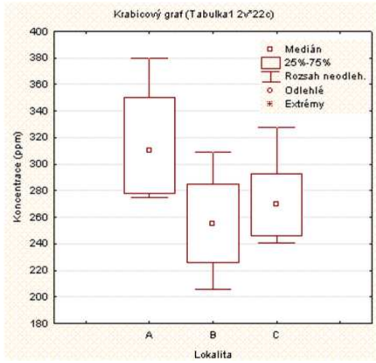
Příklad ANOVA při jednoduchém třídění

Zjistěte, zda se na hladině významnosti α=0,05 liší se koncentrace znečišťující látky (ppm) v ovzduší měřené na třech lokalitách?

Lokalita	A	B	C
1	276	206	241
2	280	210	246
3	275	226	270
4	291	249	293
5	347	255	328
6	354	273	
7	380	285	
8	330	295	
9		309	
n	8	9	5
$\bar{x}$	316,6	256,4	275,6
s	41,2	37,1	35,9

Příklad

Vizuální analýza jednotlivých skupin za pomoci vhodného grafu a porovnání úrovně a variability skupin.



Příklad

Výpočet v EXCELU:

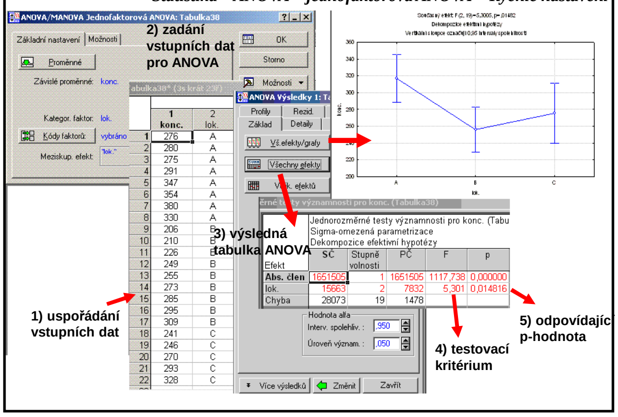
Nástroje – Analýza dat – ANOVA jeden faktor

A	B	C	Anova: jeden faktor						
276	206	241	Faktor						
280	210	246	*Výběr*	*Počet*	*Součet*	*Průměr*	*Rozptyl*		
275	226	270	A	8	2533	316,625	1699,411		
291	249	293	B	9	2308	256,4444	1378,028		
347	255	328	C	5	1378	275,6	1288,3		
354	273		ANOVA						
380	285		*Zdroj variability*	*SS*	*Rozdíl*	*MS*	*F*	*Hodnota P*	*F krit*
330	295		Mezi výběry	15663,48	2	7831,738	5,300518	0,014816	3,52189
	309		Všechny výběry	28073,3	19	1477,542			
			Celkem	43736,77	21				

Protože $p = 0,0148$, což je méně než $\alpha = 0,05$, můžeme zamítnout nulovou hypotézu a učinit závěr, že průměrná koncentrace znečišťující látky není ve všech třech skupinách stejná.

Příklad ANOVA v programu Statistica – část I.

Statistika – ANOVA – jednofaktorová ANOVA – Rychlé nastavení



Dva problémy výsledu ANOVA:

1) Zda jsou výsledky ANOVA vůbec použitelné - musíme ověřit, že náš model splňuje **předpoklady**

2) Výsledek ANOVA nám neříká, které průměry se navzájem liší.

Můžeme se podívat na skupinové průměry a zjistit, že určitá skupina má vyšší průměr než ostatní skupiny.

V tuto chvíli ale nemůžeme říci, že tento průměr je významně vyšší.

Musíme data analyzovat dále použitím metod **mnohonásobného porovnávání**, abychom zjistili, které průměry se navzájem významně liší.

Předpoklady ANOVA

Aby byly výsledky analýzy rozptylu správné, musí být splněny následující předpoklady:

a) Všechna měření musí být vzájemně nezávislá uvnitř skupin i mezi skupinami

b) Vyšetřovaný znak, jehož průměry chceme porovnávat musí mít normální rozdělení

c) Rozptyly jednotlivých výběrů se mezi sebou statisticky neliší (což ověřujeme testy (Bartlettův test nebo tzv. Hartleyův test (F_{max} test) - pokud mají všechny výběry stejný rozsah.)

Ad c) předpoklad rovnosti rozptylů

Zkoumáme, zda je splněno:

$$\frac{\max s_j}{\min s_j} \leq 3$$

Hodnoty s_j jsou směrodatné odchylky měření v jednotlivých skupinách

Ad b) předpoklad normálního rozdělení

Ověřování lze provádět graficky analýzou tzv. **reziduálních** (zbytkových) hodnot

Hodnoty pozorovaných veličin můžeme vyjádřit takto:

$$x_{ij} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij}$$

ε_{ij} jsou náhodné navzájem nezávislé chybové složky (**rezidua**)

- Model platí pro základní soubor
- Skutečné parametry však můžeme pouze odhadovat z výběrových souborů.
- V následujícím příkladu index *o* u symbolu parametru znamená, že se jedná o odhad.

Ověřování normality

α_{oj} - odhady skupinových efektů - tedy toho, jak se každý průměr liší od celkového průměru.

Předpovídaná hodnota pro pozorování z j-té skupiny je průměr j-té skupiny:

$$\mu_{oi} = \mu_o + \alpha_{oi}$$

Příklad:
μ_O – celkový průměr = 282,7
α_{o1} = průměr první skupiny - celkový průměr = 316,6 – 282,7 = 33,9
α_{o2} = průměr druhé skupiny - celkový průměr = 256,4 – 282,7 = -26,3
α_{o3} = průměr třetí skupiny - celkový průměr = -7,1

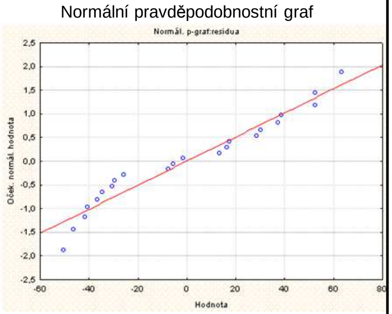
Naším modelem ANOVA jsme tedy vypočetli, že například průměrná hodnota koncentrace měřené látky se v první skupině rovná 282,7 + 33,9 = 316,6.

Ověřování normality

Rezidua (zbytkové hodnoty) pro každé pozorování spočteme jako rozdíl mezi pozorovanou hodnotou a předpovídanou hodnotou:

LOK.	MĚŘENO	MODEL	REZIDUUM
A	276	316,6	-40,6
A	280	316,6	-36,6
A	275	316,6	-41,6
A	291	316,6	-25,6
A	347	316,6	30,4
A	354	316,6	37,4
A	380	316,6	63,4
A	330	316,6	13,4
B	206	256,4	-50,4
B	210	256,4	-46,4
B	226	256,4	-30,4
B	249	256,4	-7,4
B	255	256,4	-1,4
B	273	256,4	16,6
B	285	256,4	28,6
B	295	256,4	38,6
B	309	256,4	52,6
C	241	275,6	-34,6
C	246	275,6	-29,6
C	270	275,6	-5,6
C	293	275,6	17,4
C	328	275,6	52,4

Normální pravděpodobnostní graf



Statistika- Základní statistiky/tabulky – Popisné statistiky – Prav. & bod. grafy

Ověřování předpokladu normality

- Vytvoříme nejprve graf předpovídaných hodnot vs. pozorovaných hodnot.
- Mají-li rezidua normální rozdělení, měl by tzv. normální pravděpodobnostní graf vytvořit přímku.
- Přítomnost jakýchkoli velkých odchylek by mohla znamenat doporučení transformace dat před provedením analýzy nebo nutnost provedení neparametrické verze testu.
- Jak je patrné z normálního grafu, v našem případě je sestavený model ANOVA vyhovující.

Mnohonásobná porovnávání

- Analýza rozptylu nám pouze říká, že průměry nejsou stejné. Je třeba provést další analýzu, abychom zjistili, jak se liší.
- Jednou z možností je porovnat každou dvojici průměrů, nebo dvojice, které nás zajímají.
- Mnohonásobné testování významnosti dává vysokou pravděpodobnost, že bude nalezen významný rozdíl pouze náhodou.
- Například: test má 5% možnost chybného pozitivního výsledku (hladina významnosti α).
- To znamená, že při opakovaném testování bychom chybně zamítli nulovou hypotézu v 5 % případů **– tedy např. při padesáti testech uděláme při α = *0,05* 2-3 chyby .**
- Kdybychom měli čtyři skupiny a porovnali je navzájem tak, že bychom provedli všech šest testů, potom by pravděpodobnost, že dostaneme nejméně jednou chybný pozitivní výsledek **(chyba prvního druhu), byla mnohem větší než 5 %.**

Mnohonásobná porovnávání

Tato situace se označuje jako problém mnohonásobného porovnávání a pro jeho řešení existuje několik metod (např. Bonferroniho, Tukeyova, Newman-Keulsova, Duncanova, Fisherovo LSD (nejmenší významný rozdíl - Least Significant Difference) a Scheffého).

Úkolem každé metody je udržet danou hladinu pravděpodobnosti chyby prvního druhu (5 %) a v podstatě ji rozdělit mezi všechna porovnání.

Mnohonásobná porovnávání

Bonferroniho metoda: Pro ta porovnání, která nás zajímají, provedeme modifikované t-testy s upravenou hladinou významnosti.

Tu získáme tak, že hladinu α jednoduše vydělíme celkových počtem porovnání, která chceme provést.

Tato hodnota pak bude naší hladinou významnosti pro každý t-test.

Řekněme, že pro náš příklad chceme provést všechna možná porovnání - pro tři skupiny existují tři.

Naše hladina významnosti pro každé porovnání nebude tedy 5 %, ale (5/3) % = 1,67 %.

Nulová a alternativní hypotéza jsou stejné jako pro obyčejný t test.

Mnohonásobná porovnávání

Testová statistika t-testu se v tomto případě počítá následujícím způsobem:

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{S_e}{\nu_e}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$$

Od běžného t-testu se liší ve jmenovateli – na místo rozptylu jen ze dvou skupin(které porovnáváme) použijeme sdruženou verzi rozptylu ze **všech** skupin, včetně těch, které nepoužíváme při porovnávání.

Za platnosti nulové hypotézy má testová charakteristika t rozdělení s ν_e stupni volnosti.

Upravená hladina významnosti při třech skupinách (viz. výše) se rovná 1,67%.

Je-li tedy vypočtená hladina významnosti (p hodnota) menší než 0,0167, potom zamítáme nulovou hypotézu o rovnosti průměrů dvou testovaných skupin.

Výsledky mnohonásobných porovnávání

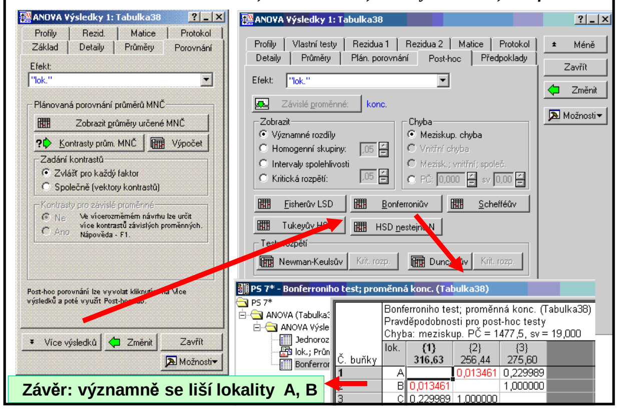
Příklad: srovnání jednotlivých skupin:

první – druhá	t = 3,22	p < 0,0167
první – třetí	t = 1,87	p > 0,0167
druhá – třetí	t = -0,90	p > 0,0167

Výsledky ANOVA nám ukazují, že existuje významný rozdíl mezi průměry skupin 1 a 2.

Příklad ANOVA v programu Statistica – část II. pokračování

1) Porovnání – 2) Více výsledků – 3) Bonferroniův

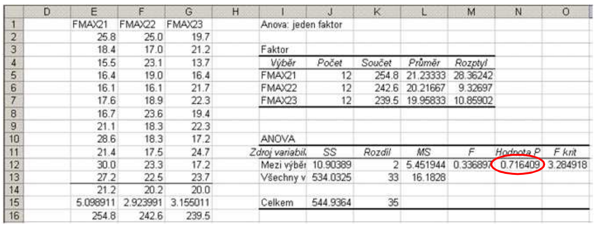


Závěr: významně se liší lokality A, B

Jednofaktorová ANOVA – základní interpretace výsledků v programu Excel

Příklad: Zjistěte, zda se významně liší hodnoty maximálních měsíčních nárazů větru naměřené v letech 1921 až 1923 na stanici Praha -Karlov

Příklad řešený v EXCELu:

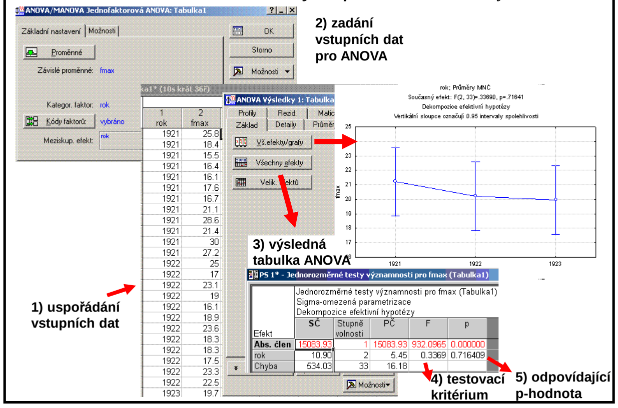


	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1		FMAX21	FMAX22	FMAX23		Anova: jeden faktor						
2		25.8	25.0	19.7								
3		18.4	17.0	21.2		Faktor						
4		15.5	23.1	13.7		*Výběr*	*Počet*	*Součet*	*Průměr*	*Rozptyl*		
5		16.4	19.0	16.4		FMAX21	12	254.8	21.23333	28.36242		
6		16.1	16.1	21.7		FMAX22	12	242.6	20.21667	9.32697		
7		17.6	18.9	22.3		FMAX23	12	239.5	19.95833	10.85902		
8		16.7	23.6	19.4								
9		21.1	18.3	22.3								
10		28.6	18.3	17.2		ANOVA						
11		21.4	17.5	24.7		*Zdroj variabil.*	*SS*	*Rozdíl*	*MS*	*F*	*Hodnota P*	*F krit*
12		30.0	23.3	17.2		Mezi výběr	10.90389	2	5.451944	0.336897	0.716409	3.284918
13		27.2	22.5	23.7		Všechny v	534.0325	33	16.1828			
14		21.2	20.2	20.0								
15		5.098911	2.923991	3.155011		Celkem	544.9364	35				
16		254.8	242.6	239.5								

Hodnoty maximálních měsíčních nárazů větru pro α=0,05 se neliší

Příklad ANOVA v programu Statistica

Statistika – ANOVA – jednofaktorová ANOVA – Rychlé nastavení



Neparametrická Analýza rozptylu (Kruskalův –Wallisův test)

- měření nejsou normálně rozdělena, jsou měřena na ordinální škále, …
- využívá ne vlastních měřených hodnot, ale jejich pořadí (rank), které získáme jejich setříděním.

Nulová hypotéza H_o: Měření ve skupinách mají stejné mediány

$$H_0 : \tilde{\mu}_1 = \tilde{\mu}_2 = \ldots = \tilde{\mu}_m$$

Alternativní hypotéza H_1: Alespoň pro jednu dvojici *i,j* platí:

$$\tilde{\mu}_i \neq \tilde{\mu}_j$$

Kruskalův –Wallisův test – obecný postup

- Uspořádáme všech *n* měření podle velikosti.
- Nahradíme hodnoty měření jejich pořadími
- Vypočítáme hodnoty SR_j – tj. součet pořadí měření ze skupiny j
- Vypočítáme testovací charakteristiku H jako míru rozdílnosti mediánu pořadí ve skupinách

$$H = \left[\frac{12}{n(n+1)} \sum_j \frac{(SR_j)^2}{n_j} \right] - 3(n+1)$$

- Pokud platí H_0, potom pro velká n_j má testovací statistika H přibližně $\chi 2$ rozdělení
- Na zvolené hladině významnosti α zamítáme H_0, pokud testovací statistika H je větší než kritická hodnota $\chi 2$ rozdělení o *m-1* stupních volnosti.
- A nebo: vypočtenému H příslušející *p hodnota* je menší než hladina významnosti α.

Kruskalův – Wallisův test příklad

Zjistěte, zda existuje významný rozdíl v názorech lidí žijících v různých lokalitách na ohrožení životního prostředí?

Tři skupiny respondentů po 10 členech.

- Skupina A – lidé pracující v chemickém závodě a bydlící v jeho okolí
- Skupina B – lidé pracující mimo lokalitu a bydlící v sousedství chemického závodu
- Skupina C – lidé, kteří nepracují v chemické továrně, ani nebydlí v jejím okolí

Výsledky dotazníku jsou v dispozici ve formě skore.

Kruskalův – Wallisův test - příklad

Vstupní data:

Skupina A		Skupina B		Skupina C	
skore	pořadí	skore	pořadí	skore	pořadí
2	7	3	15	3	15
3	15	4	24	4	24
1	2	4	24	2	7
2	7	5	29,5	1	2
2	7	3	15	3	15
1	2	4	24	4	24
3	15	2	7	2	7
4	24	4	24	3	15
3	15	5	29,5	3	15
2	7	4	24	4	24

$\sum R_A = 101$ $\sum R_B = 216$ $\sum R_C = 148$

Kruskalův –Wallisův test

Výpočet testovacího kritéria

$$H = \left[\frac{12}{n(n+1)} \cdot \left(\frac{(\Sigma R_A)^2}{n_A} + \frac{(\Sigma R_B)^2}{n_B} + \frac{(\Sigma R_C)^2}{n_C} \right) \right] - 3(n+1)$$

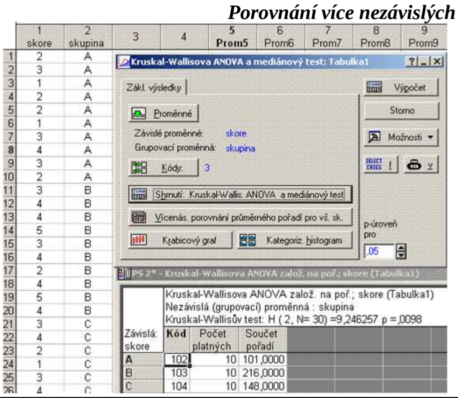
$$H = \left[\frac{12}{30 \cdot 31} \cdot \left(\frac{101^2}{10} + \frac{216^2}{10} + \frac{148^2}{10} \right) \right] - 3 \cdot 31 = 8{,}627$$

V tabulkách najdeme kritickou hodnotu χ2 rozdělení pro $\alpha = 0{,}05$ a pro $v = m - 1$, tedy 2 stupně volnosti: 5,991

Závěr: Odmítáme nulovou hypotézu. V názorech lidí žijících v různých lokalitách na ohrožení životního prostředí je statisticky významný rozdíl na hladině významnosti $\alpha = 0{,}05$.

Kruskalův –Wallisův test - Statistica

Statistika – Neparametrická statistika – Porovnání více nezávislých vzorků (skupiny)



Analýza rozptylu při dvojném třídění

Zkoumáme vliv dvou faktorů (např. A, B) na závisle proměnnou

a – počet úrovní faktoru A

b – počet úrovní faktoru B

n_{ij} – počet objektů odpovídajících i-té úrovni faktoru A a j-té úrovni faktoru B

Často jsou všechny četnosti n_{ij} stejné: $n_{ij} = c$ (tzv. vyvážené třídění)

	Chlapci (hladina B1)	Dívky (hladina B2)
Metoda výuky 1 (hladina A1)	89 101	87 87
Metoda výuky 2 (hladina A2)	120 110	98 104
Metoda výuky 3 (hladina A3)	100 98	86 96

Model ANOVA při dvojném třídění

$$x_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{ij} + \varepsilon_{ijk}$$

μ - společná část průměru závisle proměnné

α_i - efekt faktoru A na úrovni *i (i=1, …, a)*

β_j - efekt faktoru B na úrovni *j (j=1, …, b)*

γ_{ij} - **interakce** mezi faktorem A na úrovni *i* a faktorem B na úrovni *j*

ε_{ijk} – náhodná chyba s nulovou střední hodnotou, normálním rozdělením a stejným rozptylem pro všechna *i, j.*

Pro každou kombinaci faktorů měříme *c* objektů (k=1,2,…c), c>1

Model ANOVA při dvojném třídění

Zkoumáme tři páry hypotéz:

H01: $\alpha 1 = \alpha 2 = \ldots = \alpha a = 0$
H11: Ne všechny efekty αi jsou nulové
H02: $\beta 1 = \beta 2 = \ldots = \beta b = 0$
H12: Ne všechny efekty βj jsou nulové
H03: Mezi faktory A B není žádná interakce (všechna $\gamma_{ij}=0$)
H13: Některé interakce jsou nenulové

Testovací statistika F opět vychází z rozkladu čtverců odchylek měření od společného průměru $\bar{x}$

Symbolicky:

$$S_T = S_A + S_B + S_I + S_e$$

S_A, S_B – efekty faktorů
S_I – interakce
S_e – variabilita uvnitř skupin

Tabulka výstupu z ANOVA při dvojném třídění

Zdroj variability	S	st.v.	MS	F	H_0
faktor A	S_A	$a-1$	MS_A	MS_A/MS_e	H_{01}
faktor B	S_B	$b-1$	MS_B	MS_B/MS_e	H_{02}
interakce	S_I	$(a-1)(b-1)$	MS_I	MS_I/MS_e	H_{03}
reziduální	S_e	$ab(c-1)$	MS_e		
Celkový rozptyl	S_T	$abc-1$			

INTERAKCE:

Značí, že faktory nepůsobí izolovaně - jinými slovy nejsou nezávislé.

Faktory produkují větší (menší) efekt, než který bychom zjistili, kdybychom posuzovali každý faktor zvlášť.

Významné interakce způsobují, že jednotlivé faktory nevysvětlují veškerou variabilitu

Hypotézu o existenci (H03) či neexistenci (H13) interakcí zkoumáme jako první.

Příklad – výsledky ANOVA při dvojném třídění

Zdroj variability	S	st.v.	MS	F	Kritická hodnota
faktor A	632	2	316	9,88	$F_{0.05}(2,6) = 5,14$
faktor B	300	1	300	9,36	$F_{0.05}(1,6) = 5,99$
interakce $A \times B$	24	2	12	0,38	$F_{0.05}(2,6) = 5,14$
reziduální	192	6	32		
Celkový S_T	1148	11			