Polynomy

Mgr. Veronika Švandová a Mgr. Zdeněk Kříž, Ph. D.

Obsah

1 Základní vlastnosti polynomů

1.1 Teorie

1.1.1 Zavedení polynomů

Polynomem (*mnohočlenem*) stupně n rozumíme funkci tvaru

$$P(x) = P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0; \quad (1)$$

kde $n \in \mathbb{N}$, $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$. Čísla $a_0, a_1, \ldots, a_n$ se nazývají *koeficienty polynomu*, a_n se nazývá *vedoucí koeficient polynomu*, a_0 se nazývá *absolutní člen polynomu*, x je *proměnná*, n je *stupeň polynomu*, který se také značívá $st(P)$.
Jsou-li koeficienty $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$, mluvíme o *komplexním polynomu*; v případě že $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, mluvíme o *reálném polynomu.* V našem případě budeme pracovat právě s reálnými polynomy a stručně je označovat "*polynomy*".
Je-li $a_n = 1$, nazývá se polynom $P(x)$ *normovaný polynom.*
Polynomy tvaru $P(x) = a_0$, tj. konstanty, nazýváme *polynomy nultého stupně* nebo *konstantní polynomy.* Speciálním případem konstantního polynomu je $P(x) = 0$ - *nulový polynom.*
Polynom prvního stupně $P(x) = a_1 x + a_0$ se nazývá *lineární polynom.*
Polynom druhého stupně $P(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ se nazývá *kvadratický polynom.*
Polynom třetího stupně $P(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ se nazývá *kubický polynom.*

1.1.2 Operace s polynomy

Polynomy můžeme sčítat, odečítat, násobit či dělit. S příslušnými operacemi jste se jistě seznámili již na základní, či střední škole. Stručně jen připomeňme následující základní informace.

Při **sčítání** resp. **odečítání** polynomů vždy sčítáme nebo odečítáme koeficienty u členů se stejným mocnitelem (exponentem).

Při **násobení** polynomů násobíme každý člen prvního polynomu s každým členem druhého polynomu. **Koeficienty** násobíme klasicky jako reálná čísla. **Exponenty** u proměnných naopak sčítáme podle pravidel pro počítání s mocninami (např. $4x^2 \cdot 2x^3 = 8x^5$).

Příklad
Určete součet, rozdíl a součin polynomů P a Q:

$P(x) = 5x^3 + 3x^2 + 4x + 3$, $Q(x) = 3x^2 - x + 5$.

$(P + Q)(x) = 5x^3 + (3 + 3)x^2 + (4 - 1)x + 3 + 5 = \underline{\underline{5x^3 + 6x^2 + 3x + 8}}$

$(P - Q)(x) = 5x^3 + (3 - 3)x^2 + (4 + 1)x + 3 - 5 = \underline{\underline{5x^3 + 5x - 2}}$

$$
\begin{aligned}
(P\cdot Q)(x) = {} & 5x^3\cdot 3x^2 + 5x^3\cdot(-x) + 5x^3\cdot 5 + 3x^2\cdot 3x^2 + 3x^2\cdot(-x) + 3x^2\cdot 5+\\
& +4x\cdot 3x^2 + 4x\cdot(-x) + 4x\cdot 5 + 3\cdot 3x^2 + 3\cdot(-x) + 3\cdot 5 =\\
= {} & 15x^5 - 5x^4 + 25x^3 + 9x^4 - 3x^3 + 15x^2 + 12x^3 - 4x^2 + 20x + 9x^2-\\
& -3x + 15 =\\
= {} & 15x^5 + (-5+9)x^4 + (25-3+12)x^3 + (15-4+9)x^2+\\
& +(20-3)x + 15 =\\
= {} & \underline{\underline{15x^5 + 4x^4 + 34x^3 + 20x^2 + 17x + 15}}
\end{aligned}
$$

Dělení polynomů si ukážeme na následujícím příkladě.

Příklad
Určete podíl polynomů P a Q:

a) $P(x) = x^3 - 2x^2 + 4x + 7$, $Q(x) = x + 1$,

$$
\begin{array}{l}
(\;\; x^3 - 2x^2 + 4x + 7) : (x+1) = x^2 - 3x + 7\\
\underline{-x^3 - x^2}\\
\qquad -3x^2 + 4x\\
\qquad \underline{\;\;3x^2 + 3x}\\
\qquad\qquad\quad 7x + 7\\
\qquad\qquad \underline{-7x - 7}\\
\qquad\qquad\qquad\;\; 0
\end{array}
$$

V tomto případě jsme našli takový polynom R, takový, že $P = Q \cdot R$. Říkáme, že *polynom Q dělí polynom P* (zapisujeme $Q|P$).

b) $P(x) = x^4 + x^2 - 2$, $Q(x) = x^2 + 2x - 3$.

$$
\begin{array}{l}
(\;\; x^4 \qquad\quad + x^2 \qquad\qquad - 2) : (x^2 + 2x - 3) = x^2 - 2x + 8 + \dfrac{-22x + 22}{x^2 + 2x - 3}\\
\underline{-x^4 - 2x^3 + 3x^2}\\
\qquad -2x^3 + 4x^2\\
\qquad \underline{\;\;2x^3 + 4x^2 - 6x}\\
\qquad\qquad\quad 8x^2 - 6x - 2\\
\qquad\qquad \underline{-8x^2 - 16x + 24}\\
\qquad\qquad\qquad -22x + 22
\end{array}
$$

V tomto případě polynom Q nedělí polynom P, dělení vyšlo se *zbytkem* - tím je polynom $-22x + 22$.

Největší společný dělitel polynomů

Podobně jako u přirozených čísel můžeme definovat největšího společného dělitele polynomů P a Q jako polynom, který dělí P i Q a je dělitelný všemi ostatními polynomy s touto vlastností. Největší společný dělitel polynomů P a Q budeme označovat jako $NSD(P,Q)$. K jeho nalezení lze využít tzv. **Eukleidův algoritmus**:

Vydělíme polynom P polynomem Q a v každém dalším kroku pak dělíme polynom s menším stupněm (tj. např. ve 2. kroku polynom Q) zbytkem získaným z předchozího dělení (např. ve 2.

kroku zbytkem z 1. dělení). **Poslední nenulový zbytek**, který tímto algoritmem dostaneme, je největším společným dělitelem polynomů P a Q. Jelikož největší společný dělitel polynomů je určen jednoznačně až na násobek libovolnou nenulovou reálnou konstantou, výpočet vždy zjednodušíme tím, že každý zbytek znormujeme (vynásobíme tak, aby vedoucí koeficient zbytku byl roven jedné). Celý postup ilustrují řešené příklady 1 a 2.

1.1.3 Kořeny polynomů

Každé číslo c (reálné či komplexní, podle oboru v jakém pracujeme) splňující

$$P_n(c) = 0 \tag{2}$$

se nazývá *kořen polynomu* $P_n(x)$ stupně $n \geqslant 1$.

Rovnice tvaru $P_n(x) = 0$, tj.

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0 \tag{3}$$

je tzv. *algebraickou rovnicí stupně* n. Hledání kořenů polynomů tedy odpovídá hledání řešení příslušné algebraické rovnice. Nalézt řešení lineární či kvadratické rovnice, tj. kořeny polynomů 1. a 2. stupně, by měl zvládnout bez potíží každý z vás. Otázkou však je, zda existuje nějaký univerzální algoritmus na hledání kořenů polynomů stupňů vyšších? Již v 16. století byly známy vzorce pro polynomy stupně 1, 2, 3 a 4. Dlouhou dobu se potom matematikové snažili nalézt podobné vzorce pro kořeny polynomů stupně 5. Teprve v polovině 19. století bylo dokázáno, že takové vzorce pro polynomy stupně většího nebo rovného pěti neexistují! Při hledání kořenů polynomů se tedy musíme spokojit s jejich odhady na základě vlastností, které si dále uvedeme.

Je-li c kořenem polynomu $P_n(x)$, lze tento polynom rozložit na tvar

$$P_n(x) = (x - c)Q_{n-1}(x). \tag{4}$$

Je-li c kořenem polynomu, pak lineární polynom $(x - c)$ s proměnnou x se nazývá *kořenový činitel příslušný ke kořeni* c.

Známe-li tedy kořen polynomu $P_n(x)$, můžeme jej rozložit na součin kořenového činitele a polynomu stupně o jedno nižšího než je zadaný polynom. Polynom lze tedy beze zbytku vydělit kořenovým činitelem - výsledkem je polynom Q_{n-1}.

Řekneme že *kořen* c je k*-násobný*, jestliže existuje polynom $Q_{n-k}(x)$ stupně $n-k$ takový, že platí

$$P_n(x) = (x - c)^k Q_{n-k}(x) a\ Q_{n-k}(c) \neq 0. \tag{5}$$

To znamená, že c je k-násobný kořen polynomu $P_n(x)$, jestliže tento polynom lze beze zbytku vydělit polynomem $(x-c)^k$, přičemž c není kořenem polynomu $Q_{n-k}(x)$. Mimo to platí, že polynomy $P_n(x)$ a $Q_{n-k}(x)$ z předchozí definice mají stejné kořeny včetně násobnosti, s výjimkou kořene c. Hledáme-li kořeny polynomu $P_n(x)$, je vhodné po nalezení jednoho z nich vydělit polynom $P_n(x)$ kořenovým činitelem příslušným tomuto kořeni "maximálně-možně-krát". Tím zjistíme násobnost kořene (je to číslo, udávající, kolikrát se nám podařilo provést dělení beze zbytku) a obdržíme polynom $Q_{n-k}(x)$ z předchozí definice (je to poslední podíl, který vyšel beze zbytku). Dále budeme hledat kořeny polynomu $Q_{n-k}(x)$. Ten je totiž nižšího stupně a tedy jednodušší.

Základní věta algebry, Gaussova věta:
Každý nekonstantní polynom s komplexními koeficienty má alespoň jeden komplexní kořen.

Gaussova základní věta algebry z roku 1799 tedy říká, že (pro nekonstantní polynomy) aspoň jeden kořen vždy existuje. Z této věty plyne velmi důležitý důsledek.

Důsledek:
Každý polynom (každá algebraická rovnice) stupně n má v oboru komplexních čísel právě n kořenů (řešení). Přitom každý kořen počítáme i s jeho násobností.

Víme tedy, kolik kořenů polynomu v oboru $\mathbb{C}$ existuje, neexistuje však univerzální návod, jak tyto kořeny nalézt. Pro řadu úloh v matematice je vhodné umět **rozložit polynom na součin polynomů jednodušších**. Lze ukázat, že každý polynom lze (v oboru reálných čísel) **rozložit na** součin, v němž jsou jenom **kořenové činitele**, tj. lineární polynomy tvaru $(x - c)$ u jednoduchých reálných kořenů a tvaru $(x - c)^k$ u k-násobných reálných kořenů, případně kvadratické výrazy $x^2 + px + q$, které mají 2 komplexně sdružené kořeny nebo mocniny těchto kvadratických výrazů $(x^2+px+q)^k$[1] . Rozklad však není možné provést bez znalosti kořenů tohoto polynomu. V praxi dokážeme zpravidla rozložit na součin pouze kvadratické polynomy, polynomy, které mají celočíselné či racionální kořeny, případně polynomy, kde rozklad na součin lze provést postupným vytýkáním. Více nám ukáže následující kapitola "Hledání kořenů polynomů".

1.1.4 Hledání kořenů polynomů

Při hledání kořenů polynomů nám může pomoci několik následujících vět.

Počet kladných kořenů polynomu (1) (řešení algebraické rovnice (3) je roven počtu znaménkových změn v posloupnosti koeficientů $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$, nebo o sudé číslo menší. Případné koeficienty, které jsou rovny nule, přitom neuvažujeme. **Počet záporných kořenů** polynomu (1) (řešení algebraické rovnice (3) je roven počtu znaménkových změn v posloupnosti koeficientů polynomu $P(-x)$, nebo o sudé číslo menší. Případné koeficienty, které jsou rovny nule, přitom neuvažujeme.

Praktický význam věty je vidět v řešených příkladech 3 a 4.

Podmínka pro celočíselné kořeny Nechť všechny koeficienty polynomu (1) jsou celá čísla. Je-li $c \in \mathbb{Z}$ kořenem tohoto polynomu, pak je číslo a_0 dělitelné číslem c, tj. $c|a_0$.

Předchozí věta se týká pouze polynomů **s celočíselnými koeficienty** a říká, že celočíselným kořenem takového polynomu může být pouze dělitel absolutního člene. Je tedy možné si všechny dělitele vypsat a po řadě je otestovat, např. Hornerovým schématem. Navíc, najdeme-li takový kořen, zjistíme opakovaným testováním současně i jeho násobnost.

Hornerovo schéma

Hornerovo schéma je metoda, která umožňuje snadno určit, zda dané číslo je kořenem polynomu P_n (tj. zda $P_n(c) = 0$[2]) a umožňuje rozložit zadaný polynom na součin kořenového činitele $(x - c)$ příslušného nalezenému kořeni a polynomu Q_{n-1} stupně o jedno nižšího než je

[1] V oboru komplexních čísel bychom mohli rozložit i kvadratické výrazy se záporným diskriminantem. Pro naše účely však postačí rozklad v oboru reálných čísel.

[2] To lze samozřejmě zjistit dosazením $x = c$ do $P_n(c) = 0$. Dostaneme-li platnou rovnost, jedná se o kořen polynomu. U složitějších polynomů však výpočet s pomocí Hornerova schématu může být mnohem jednodušší.

zadaný polynom. Opakovaným užitím Hornerova schématu lze zjistit násobnost nalezeného kořene a rozložit polynom na součin kořenových činitelů.

Testování kořene polynomu probíhá pomocí následující tabulky. V jejím záhlaví jsou v 1. řádku koeficienty zadaného polynomu P_n, do 1. sloupce se zapíše testované číslo (potenciální kořen c). Postupně **získáváme čísla ve 3. řádku**: nejdříve opíšeme koeficient a_n do 2. sloupce. Hodnoty ve 3. a dalších sloupcích získáme vždy vynásobením kořene s hodnotou v předchozím sloupci (mezivýsledek se zapíše do 2. řádku) a následně sečtením čísel v 1. a 2. řádku daného sloupce.

	a_n	a_{n-1}	$\dots$	a_1	a_0
c		$c \cdot a_n$	$\dots$	$c \cdot b_2$	$c \cdot b_1$
	a_n	$\underbrace{c \cdot a_n + a_{n-1}}_{b_{n-1}}$	$\dots$	$\underbrace{c \cdot b_2 + a_1}_{b_1}$	$\underbrace{c \cdot b_1 + a_0}_{b_0}$

Pokud $b_0 \neq 0$, pak c není kořenem polynomu P_n a b_0 je hodnota $P(c)$.

Pokud vyjde $b_0 = 0$, je c kořenem polynomu P_n. Čísla $a_n, b_{n-1}, \dots, b_1$ jsou pak koeficienty polynomu Q_{n-1} stupně o jedno nižšího než je zadaný polynom P_n. P_n tak můžeme rozložit na součin kořenového činitele $(x - c)$ příslušného nalezenému kořeni a polynomu Q_{n-1}.

Další kořeny polynomu P_n musí být zároveň kořeny polynomu Q_{n-1}, tj. musí dělit b_0 - díky této vlastnosti se okruh testovaných čísel (dělitelů a_0) může zúžit. Při hledání dalšího kořene můžeme sestavit samostatnou tabulku pro Q_{n-1}, nebo pokračovat v původní tabulce.

Příklad
Ověřte, je-li $x = 2$ kořenem polynomu $P(x) = x^7 - 6x^6 - x^5 + 70x^4 - 120x^3 - 112x^2 + 432x - 288$.

Sestavíme Hornerovo schéma:

	1	-6	-1	70	-120	-112	432	-288
2		2	-8	-18	104	-32	-288	288
	1	-4	-9	52	-16	-144	144	$\boxed{0}$

Jelikož vyšlo $b_0 = 0$ (zarámovaná hodnota), je $x = 2$ kořenem zadaného polynomu.

Můžeme také ověřit, zda $x = 2$ je dvojnásobným kořenem zadaného polynomu P_7. Sestavíme tabulku pro koeficienty polynomu Q_6 (stupně o jedno nižšího než je zadaný polynom).

	1	-4	-9	52	-16	-144	144
2		2	-4	-26	52	72	-144
	1	-2	-13	26	36	-72	$\boxed{0}$

Vyšlo nám, že $x = 2$ je kořenem polynomu Q_6 a tedy minimálně dvojnásobným kořenem zadaného polynomu P_7.

Polynom P_7 lze rozložit na $(x - 2)^2 \cdot Q_5$. Nalezením dalších kořenů polynomu Q_5 bychom mohli rozložit polynom P_7 na součin všech kořenových činitelů.

1.2 Řešené příklady

1.2.1 Největší společný dělitel polynomů

Příklad 1. *Nalezněte největší společný dělitel polynomů P a Q:* $P(x) = x^4 + x^2 - 2$, $Q(x) = x^2 + 2x - 3$.

Řešení. Postupujeme dle Eukleidova algoritmu.

Nejdříve vydělíme polynom P polynomem Q:

$$(x^4 + x^2 - 2) : (x^2 + 2x - 3) = x^2 - 2x + 8 + \frac{-22x + 22}{x^2 + 2x - 3}$$

$$\begin{array}{l}
-x^4 - 2x^3 + 3x^2 \\
\hline
-2x^3 + 4x^2 \\
2x^3 + 4x^2 - 6x \\
\hline
8x^2 - 6x - 2 \\
-8x^2 - 16x + 24 \\
\hline
-22x + 22
\end{array}$$

Získaný nenulový zbytek znormujeme (vydělíme číslem -22): $-22x + 22 \sim x - 1$.

Ve 2. kroku vydělíme polynom Q normovaným zbytkem získaným v předcházejícím kroku:

$$(x^2 + 2x - 3) : (x - 1) = x + 3$$

$$\begin{array}{l}
-x^2 + x \\
\hline
3x - 3 \\
-3x + 3 \\
\hline
0
\end{array}$$

Ve 2. kroku jsme dostali nulový zbytek, algoritmus tedy končí. Největším společným dělitelem polynomů P a Q je $\underline{\underline{x - 1}}$ - poslední nenulový zbytek.

Příklad 2. *Nalezněte největší společný dělitel polynomů P a Q:* $P(x) = x^5 + x^2 - 2$, $Q(x) = x^3 + 2x - 3$.

Řešení. Postupujeme dle Eukleidova algoritmu.

Nejdříve vydělíme polynom P polynomem Q:

$$(x^5 + x^2 - 2) : (x^3 + 2x - 3) = x^2 - 2 + \frac{4x^2 + 4x - 8}{x^3 + 2x - 3}$$

$$\begin{array}{l}
-x^5 - 2x^3 + 3x^2 \\
\hline
-2x^3 + 4x^2 - 2 \\
2x^3 + 4x - 6 \\
\hline
4x^2 + 4x - 8
\end{array}$$

Získaný nenulový zbytek znormujeme (vydělíme číslem 4): $4x^2 + 4x - 8 \sim x^2 + x - 2$.

Ve 2. kroku vydělíme polynom Q normovaným zbytkem získaným v předcházejícím kroku:

$$
\begin{array}{l}
\left(x^3 + 2x - 3\right) : \left(x^2 + x - 2\right) = x - 1 + \dfrac{5x-5}{x^2+x-2} \\
\underline{-x^3 - x^2 + 2x} \\
\qquad - x^2 + 4x - 3 \\
\qquad \underline{x^2 + x - 2} \\
\qquad\qquad\quad 5x - 5
\end{array}
$$

Získaný nenulový zbytek znormujeme (vydělíme číslem 5): $5x - 5 \sim x - 1$.

Ve 3. kroku vydělíme polynom $x^2 + x - 2$ normovaným zbytkem získaným v předcházejícím kroku:

$$
\begin{array}{l}
\left(x^2 + x - 2\right) : \left(x - 1\right) = x + 2 \\
\underline{-x^2 + x} \\
\qquad\quad 2x - 2 \\
\qquad\quad \underline{-2x + 2} \\
\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

Ve 3. kroku jsme dostali nulový zbytek, algoritmus tedy končí. Největším společným dělitelem polynomů P a Q je $\underline{\underline{x - 1}}$ - poslední nenulový zbytek.

1.2.2 Hledání kořenů polynomů

Příklad 3. *Určete počet kladných, záporných, reálných, komplexních (a imaginárních) kořenů polynomu P: $P(x) = x^4 + 2x^3 - 25x^2 - 26x + 120$.*

Řešení. Stupeň polynomu $st(P) = 4 \rightarrow$ podle důsledku Základní věty algebry je počet komplexních kořenů roven 4.

Koeficienty $P(x)$ jsou $1, 2, -25, -26, +120 \rightarrow 2$ znaménkové změny $\rightarrow 2$ nebo 0 kladných reálných kořenů.

Koeficienty $P(-x) = x^4 - 2x^3 - 25x^2 + 26x + 120$ jsou $1, -2, -25, 26, 120 \rightarrow 2$ znaménkové změny $\rightarrow 2$ nebo 0 záporných reálných kořenů.

Pro kořeny polynomu P jsou následující možnosti:

a) 0 reálných kořenů, 4 kořeny imaginární,

b) 2 reálné kořeny (buď 2 kladné, nebo 2 záporné), 2 kořeny imaginární (2 komplexně sdružené kořeny $\alpha \pm \beta i$),

c) 4 reálné kořeny (2 kladné a 2 záporné), 0 kořenů imaginárních.

Příklad 4. *Určete počet kladných, záporných, reálných, komplexních (a imaginárních) kořenů polynomu P: $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$.*

Řešení. Stupeň polynomu $st(P) = 3 \rightarrow$ podle důsledku Základní věty algebry je počet komplexních kořenů roven 3.

Koeficienty $P(x)$ jsou $1, -6, 11, -6 \rightarrow 3$ znaménkové změny $\rightarrow 3$ nebo 1 kladných reálných kořenů.

Koeficienty $P(-x)$ jsou $-1, -6, -11, -6 \rightarrow$ žádná znaménková změna $\rightarrow 0$ záporných reálných kořenů.

Pro kořeny polynomu P jsou následující možnosti:

a) 1 reálný kladný kořen, 2 kořeny imaginární (2 komplexně sdružené kořeny $\alpha \pm \beta i$),

b) 3 reálné kladné kořeny, 0 kořenů imaginárních.

Příklad 5. *Ověřte, je-li $x = 1$ kořenem polynomu $P(x) = 4x^4 - 6x^3 + 3x - 5$.*

Řešení. Sestavíme Hornerovo schéma:

$$\begin{array}{c|ccccc} & 4 & -6 & 0 & 3 & -5 \\ 1 & & 4 & -2 & -2 & 1 \\ \hline & 4 & -2 & -2 & 1 & \boxed{-4} \end{array}$$

Jelikož vyšlo $b_0 = -4 \neq 0$ (zarámovaná hodnota), není $x = 1$ kořenem zadaného polynomu.

Příklad 6. *Rozložte polynom $P(x) = x^5 + x^4 - 5x^3 - 9x^2 - 24x - 36$ na součin kořenových činitelů v oboru reálných čísel.*

Řešení. Podle podmínky pro celočíselné kořeny mohou být kořeny polynomu pouze dělitelé čísla -36, tj. $\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm9, \pm12, \pm18$ a ±36.

Postupně sestavíme Hornerovo schéma pro potenciální kořeny.

$x = 1$ není kořenem zadaného polynomu:

$$\begin{array}{c|cccccc} & 1 & 1 & -5 & -9 & -24 & -36 \\ 1 & & 1 & 2 & -3 & -12 & -36 \\ \hline & 1 & 2 & -3 & -12 & -36 & \boxed{-72} \end{array}$$

$x = -1$ není kořenem zadaného polynomu:

$$\begin{array}{c|cccccc} & 1 & 1 & -5 & -9 & -24 & -36 \\ -1 & & -1 & 0 & 5 & 4 & 20 \\ \hline & 1 & 0 & -5 & -4 & -20 & \boxed{-16} \end{array}$$

$x = 2$ není kořenem zadaného polynomu:

$$\begin{array}{c|cccccc} & 1 & 1 & -5 & -9 & -24 & -36 \\ 2 & & 2 & 6 & 2 & -14 & -76 \\ \hline & 1 & 3 & 1 & -7 & -38 & \boxed{-112} \end{array}$$

$x = -2$ **je** kořenem zadaného polynomu:

$$\begin{array}{c|cccccc} & 1 & 1 & -5 & -9 & -24 & -36 \\ -2 & & -2 & 2 & 6 & 6 & 36 \\ \hline & 1 & -1 & -3 & -3 & -18 & \boxed{0} \end{array}$$

Jelikož kořeny zadaného polynomu P_5 musí být zároveň kořeny polynomu $Q_4 = x^4 - x^3 - 3x^2 - 3x - 18$, musí dělit -18. Lze tedy okruh testovaných čísel zúžit na $-2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm9, \pm12$ a ±18

Otestujeme znovu $x = -2$:

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & -1 & -3 & -3 & -18 \\
-2 & & -2 & 6 & -6 & 18 \\
\hline
 & 1 & -3 & 3 & -9 & \boxed{0}
\end{array}
$$

$x = -2$ **je** kořenem zadaného polynomu. Jelikož kořeny zadaného polynomu P_5 musí být zároveň kořeny polynomu $Q_3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 9$, musí dělit -9. Lze tedy okruh testovaných čísel zúžit na ± 3 a ± 9. Víme tedy, že $x = -2$ nemůže být více než dvojnásobným kořenem zadaného polynomu.

$x = 3$ **je** kořenem zadaného polynomu:

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & -3 & 3 & -9 \\
3 & & 3 & 0 & 9 \\
\hline
 & 1 & 0 & 3 & \boxed{0}
\end{array}
$$

Kořeny zadaného polynomu P_5 musí být zároveň kořeny polynomu $Q_2 = x^2 + 3$. Rovnice $x^2 + 3 = 0$ nemá celočíselné kořeny, ale 2 komplexně sdružené kořeny[3] .

Rozklad zadaného polynomu na součin kořenových činitelů je tedy tvaru: $\underline{\underline{(x+2)^2(x-3)(x^2+3)}}$.

1.3 Příklady k procvičení

1.3.1 Největší společný dělitel polynomů

Příklad 1. *Nalezněte největší společný dělitel polynomů P a Q:*

a) $P(x) = x^4 + x^3 - 5x^2 - 3x + 6$, $Q(x) = x^4 - 5x^2 + 4$

b) $P(x) = 2x^4 + 12x^3 + 11x^2 - 39x - 58$, $Q(x) = 2x^3 + 16x^2 + 41x + 34$

Řešení. a) $x^2 + x - 2$

b) $x + 2$

1.3.2 Hledání kořenů polynomů

Příklad 2. *Určete počet kladných, záporných, reálných, komplexních (a imaginárních) kořenů polynomu P: $P(x) = x^7 - 14x^5 + 3x^2 + 1$.*

Řešení. 7 komplexních kořenů s následujícími možnostmi:

a) 1 reálný záporný kořen, 6 kořenů imaginárních ($3 \cdot 2$ komplexně sdružené kořeny)

b) 1 reálný záporný kořen, 2 reálné kladné kořeny, 4 kořeny imaginární ($2 \cdot 2$ komplexně sdružené kořeny)

Příklad 3. *Ověřte, je-li c kořenem polynomu $P(x) = x^5 + x^4 + x^3 - x^2 - x - 1$:*

[3] Lze zjistit např. tak., že ve vzorci pro řešení dané kvadratické rovnice vyjde záporný diskriminant.

a) $c = -1$

b) $c = 1$

Řešení. a) není

b) je

Příklad 4. *Rozložte polynom* $P(x) = x^5 - 4x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 6$ *na součin kořenových činitelů v oboru reálných čísel.*

Řešení. $x^5 - 4x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 6 = (x+1)(x-2)(x-3)(x^2+1)$

Literatura

[1] http://vydavatelstvi.vscht.cz/katalog/uid_isbn-978-80-7080-656-2/anotace/

[2] http://user.mendelu.cz/marik/mat-web/mat-webse22.html

[3] http://math.feld.cvut.cz/mt/txtb/4/txc3ba4b.htm

[4] http://www.slu.cz/math/cz/knihovna/docs/algebra1/15.-polynomy

[5] http://www.karlin.mff.cuni.cz/katedry/kdm/diplomky/vladimira_pavlicova_bp/Operace.php

[6] http://www.matweb.cz/mnohocleny

[7] http://kam.mff.cuni.cz/ sbirka/show_exercise.php?c=65e=335

[8] http://www.studopory.vsb.cz/studijnimaterialy/MatematikaI/21_MI_KAPI_1_1.pdf

[9] http://kam.mff.cuni.cz/ hladik/LA/text_la.pdf

[10] http://mathonline.fme.vutbr.cz/download.aspx?id_file=915

[11] http://brkos.math.muni.cz/files/povidani/povidani165.pdf

[12] http://mks.mff.cuni.cz/library/PolynomyLB/PolynomyLB.pdf

[13] http://www.talnet.cz/documents/18/975952a7-b849-4a9e-a358-21c10c29a4d0

[14] http://user.mendelu.cz/hasil/Data/CZ/Teach/Prez/09-Aproximace.pdf