

Gravitace je nejdéle studovaná fyzikální interakce. I přesto je s ní spojena řada nevyřešených otázek. Jednou z nich je, odkud pochází antigravitační (odpudivý) charakter kosmologické konstanty Λ zodpovědné za zrychlené rozpínání vesmíru. Podle standardního kosmologického modelu je vesmír složen z 27 % jakési záhadné temné hmoty, z 68 % ještě záhadnější temné energie a jen necelých 5 % připadá na baryonovou hmotu složenou ze známých elementárních částic. Cílem této publikace je ukázat, že se může jednat jen o chybu modelu, když se ztotožňuje realita s modelem. Zejména bychom neměli aplikovat teorie, které jsou prověřené na škálách Sluneční soustavy, na celý vesmír a na extrémně dlouhé časové intervaly bez jakéhokoliv odhadu chyby modelu.

V první části knihy se budeme věnovat Newtonově teorii gravitace a odhadu temné hmoty ve spirálních galaxiích a galaktických kupách. Předložíme argumenty, které si každý může přepočítat, aby se sám mohl ujistit, že temné hmoty ve vesmíru není 5 až 6krát více než baryonové hmoty a že je tento odhad značně nadsazený. Ve druhé části knížky se zaměříme na temnou energii. Uvedeme desítky příkladů, které dokládají mírné narušení zákona zachování energie ve vesmíru. Uvidíme, že se pozvolna rozpíná nejen celý vesmír, ale i Sluneční soustava. Budeme rozvíjet hypotézu, že zdrojem energie potřebné na toto rozpínání může být nepatrná antigravitační síla, jež je důsledkem konečné rychlosti šíření gravitační interakce.



Prof. RNDr. Michal Křížek, DrSc., (1952) vystudoval Matematicko-fyzikální fakultu UK. Pracuje v Matematickém ústavu Akademie věd ČR, kde se zabývá teorií čísel a odhady chyby při numerickém řešení problémů matematické fyziky. Je spoluautorem několika monografií (např. Longman 1990, Kluwer 1996, Springer 2001, 2011, Academia 2002, 2009, 2011, Nova Science Publishers 2012), členem Učené společnosti ČR a Klubu českých hlav. Působí v redakčních radách časopisů *Applications of Mathematics*, *Advances in Applied Mathematics and Mechanics*, *Applcationes Mathematicae* a je vedoucím redaktorem časopisu *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*.

ISBN 978-80-7015-019-1

Michal Křížek

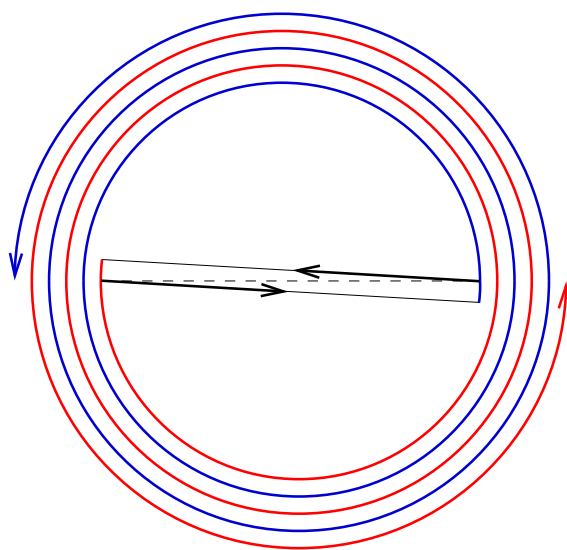
ANTIGRAVITACE



↑
ANTIGRAVITACE
↓
Michal Křížek

Antigravitace

Michal Křížek



Praha
2014

*Věnováno těm, kteří hledají podstatu
temné hmoty a temné energie.*

Recenzenti

RNDr. Jan Maršák, CSc.

Prof. RNDr. Karel Segeth, CSc.

Prof. Lawrence Somer, PhD.

© Michal Křížek

Vydala Jednota českých matematiků a fyziků

Sazbu programem T_EX připravila Hana Bílková

Obálka Pavel Křížek

Autor fotografie na zadní straně obálky Jan Brandts

Tisk Tigris s. r. o.

První vydání, Praha 2014

ISBN 978-80-7015-019-1

EAN 9788070150191

Předmluva: Komu patří fyzika?

V roce 1999 jsme vzpomněli 120. výročí narození Alberta Einsteina. K této příležitosti se Michalu Křížkovi a jeho kolegům matematikům podařilo, ve spolupráci s Jednotou českých matematiků a fyziků a Magistrátem hlavního města Prahy, zajistit novou, v Praze dokonce již třetí pamětní desku Albertu Einsteinovi. Deska byla odhalena na domě na Staroměstském náměstí 17 (viz *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie* 44 (1999), 258–262). Odhalení desky se konalo v přátelské atmosféře a zúčastnili se ho nejvyšší představitelé Univerzity Karlovy, Akademie věd České republiky i hlavního města Prahy. Jeden můj spolužák z Matematicko-fyzikální fakulty UK, v té době již profesor teoretické fyziky na Karlově univerzitě, se o události vyjádřil vlídně, ale jednoznačně. „Tak nám ti matematici už vzali i Einsteina,“ řekl (ale za doslovnost citátu po těch letech už neručím). Tehdy jsem si uvědomil, že třeba malé zamyšlení má smysl. Komu patří Einstein? A hlavně, komu patří fyzika?

V době, kdy jsem studoval matematiku na MFF UK (1959–1964), byly první dva roky studia pro matematiky i fyziky prakticky identické. Stejně předměty, stejní přednášející, stejné zkoušky. Tak jsem se, navíc ke středoškolské fyzice, naučil ještě mnoho dalšího z fyziky a také jsem měřil v třísemestrálním fyzikálním praktiku. Teď už je na fakultě všechno jinak.

V oddělení konstruktivních metod matematické analýzy Matematického ústavu ČSAV (nyní AV ČR), kam jsem po promoci nastoupil, se pod vedením prof. Iva Babušky pěstoval a rozvíjel vědní obor, kterému je teď módní říkat *výpočtová matematika*. V našem oddělení se výpočtová matematika pěstuje dodnes, ale Ivo Babuška pracuje od roku 1968 ve Spojených státech, i když s námi je v čilém kontaktu. V poslední době se zabývá zejména otázkami validace a verifikace matematických a výpočtových modelů fyzikální reality, tedy postupy, které dovolují zjistit, jak se liší řešení modelu od skutečnosti.

V ústavu se mi, byť základní, znalosti fyziky hodily. Nejen proto, že praktický model pro svou teorii najde matematik zpravidla nejsnáz v nějakém fyzikálním procesu. I obráceně, v oddělení jsme ve spolupráci s vědci z jiných oborů teoreticky i početně řešili praktické, většinou technické úlohy, které byly zajímavé pro československý průmysl. Hovořím převážně o svých vlastních zkušenostech s potřebou fyziky pro matematika (a matematiky pro fyzika) a rád bych, aby z toho vyplynul pro čtenáře závěr, že pro matematika není ostuda, když zná fyziku, a pro fyziku není ostuda, když v ní pracují matematici. Tedy že je užitečné, když se fyzici o fyziku dělí i s matematiky.

Řada fyzikálních poznatků je v posledních letech výsledkem numerického počítání. Už v devadesátých letech minulého století se výpočtová matematika postupně dostala na úroveň, kdy pro většinu základních úloh algebry i analýzy jsou známy účinné výpočtové metody a existují jejich efektivní algoritmické realizace. Někdy jsou na prodej, někdy (jako výsledky státem podporovaného výzkumu na univerzitách) i zadarmo. Existují jednoduchá pravidla, jak má vypadat spolehlivý software, píše se o tom v mnoha knihách a časopiseckých článcích. Přesto řada běžných komerčních softwarových produktů těmto pravidlům nevyhovuje.

Můžete se dočíst (viz například řadu příspěvků v časopise *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie* v posledních dvaceti letech), jak pomocí komerčního softwaru, i toho nejběžnějšího a nejčastěji používaného, spočtete chybné výsledky. Nespolehlivost softwaru spolehlivě odhalíte, když sami úmyslně zadáte vhodnou testovací úlohu (ve které se třeba vyskytne potíž typu dělení nulou). Software dá nějaký výsledek, jeho správnost zpravidla neověřuje a uživatele na možnou chybu ve výsledku neupozorní. Slepá víra v neomylnost komerčního softwaru není na místě!

A ještě jeden argument pro spolupráci fyzika a matematika. Když jsem po několik let držel na jedné fakultě ČVUT v Praze semestrální výběrovou přednášku, překvapilo mě, že většina studentů vůbec neví, jak jsou v počítači zobrazena čísla a že každý výpočet, který se neprovádí v celočíselné aritmetice, nezbytně doprovázejí zaokrouhlovací chyby. Přitom průběh výpočtu velmi záleží na tom, jak moc se zaokrouhlovací chyby akumulují. Mohou se totiž akumulovat „zhoubným“ způsobem a pak můžete jako „výsledek“ dostat celkem libovolné číslo. Čím déle váš výpočet trvá, tím více aritmetických operací provedete, tím více zaokrouhlovacích chyb se dopustíte a tím méně důvěryhodný výsledek můžete očekávat. Protože výpočtová matematika od svých počátků zkoumá vliv zaokrouhlovacích chyb na spolehlivost výsledku, je dnes o běžných výpočtových algoritmech známo, jak se při zaokrouhlování chovají. Ale je třeba, aby uživatel softwaru věnoval této otázce dostatečnou pozornost, zejména pak u softwaru, který si sestavuje sám.

Profesor Ivo Babuška v období před asi 15 lety rád zahajoval své přednášky příklady projektů, které byly (špatně) spočteny, realizovány podle výsledků výpočtu, a postavené zařízení potom havarovalo. Důsledky výpočtů, které provádí kosmolog, samozřejmě nejsou konstrukce staveb nebo strojů. Případná chyba ve výsledku (způsobená třeba zaokrouhlováním) nebude stát lidské životy. Výsledky takových výpočtů ale mají vést ke konstrukci hypotéz o vzniku a fungování vesmíru, a když se ukáže, že jsou chybné, působí škody ideové a ideologické.

Shrnuto v jedné větě: prosím fyziky, aby neodmítali práci nefyziků ve fyzice, aby jim naslouchali a k výsledkům svých výpočtů přistupovali kriticky. Třeba v tom tahle knížka může být prospěšná fyzikům i nefyzikům.

Karel Segeth

Obsah

Předmluva: Komu patří fyzika?	iii
Seznam symbolů a konstant	x
Úvodní slovo	xii

Část 1: Newtonova teorie gravitace a temná hmota

1. O tisíciletém svazku astronomie a matematiky	1
1.1. Úvod	1
1.2. Keplerovy zákony	3
1.3. Keplerovská dráha	6
1.4. Některé důsledky druhého Keplerova zákona	7
2. Význam úhlových měření při poznávání vesmíru	9
2.1. Úhломěrné přístroje	9
2.2. Měření relativních vzdáleností ve Sluneční soustavě	11
2.3. Stanovení absolutních vzdáleností	13
2.4. Stanovení relativních vzdáleností vnitřních planet	14
2.5. Podstatné zpřesnění odhadu vzdálenosti Země od Slunce	14
2.6. Další kroky ke zpřesnění vzdálenosti Země od Slunce	16
2.7. Zpomalování rotace Země	17
2.8. Paralaxa nejbližších hvězd	18
2.9. Změření rychlosti světla	19
2.10. Sférická trigonometrie	21
2.11. Ohyb světelných paprsků v gravitačním poli	22
3. O Keplerově rovnici	25
3.1. Pravá a excentrická anomálie	25
3.2. Vztah mezi pravou a excentrickou anomálií	27
3.3. Keplerova rovnice pro excentrickou anomálii	27
3.4. Keplerovské parametry	28
4. Gravitační zákon – objev tisíciletí	30
4.1. Newtonovy věty	30
4.2. Nejdůležitější objevy a aplikace	33
4.3. Velikost konstanty ve 3. Keplerově zákonu	34
4.4. Hmotnost Slunce	36

4.5. Hmotnost Marsu	36
4.6. Délka doby pádu do Slunce	37
4.7. Velikost první, druhé a třetí kosmické rychlosti	37
4.8. Výška letu geostacionárních družic	38
4.9. Doba letu na Mars	39
4.10. Střední hustota Slunce	40
4.11. Rychlost Halleyovy komety	41
4.12. Platnost gravitačního zákona mimo Sluneční soustavu	42
4.13. Určení vzdálenosti exoplanet od jejich mateřských hvězd	42
4.14. Odhad hmotnosti supermasivní černé díry	43
4.15. Fyzikální charakteristiky planet	46
5. Problém N těles	48
5.1. Úvod	48
5.2. Problém dvou těles	48
5.3. Problém tří těles	51
5.4. Problém N těles	54
5.5. Celková chyba aproximace	56
6. Zatmění a aberace světla	61
6.1. Význam zatmění při poznávání vesmíru	61
6.2. Krátce z historie pozorování zatmění	62
6.3. Vznik a periodicitu zatmění	63
6.4. Proč jsou zatmění Měsíce méně častá než zatmění Slunce	65
6.5. Co způsobuje aberace světla při úplném zatmění Slunce	66
7. Jak Zwicky předpověděl existenci temné hmoty	68
7.1. Fritz Zwicky	68
7.2. Věta o viriálu	70
7.3. Jak Zwicky použil větu o viriálu na kupu A1656	72
8. Problém chybějící hmoty	77
8.1. Rozbor Zwickyovy metody	77
8.2. Analýza současných dat	83
8.3. Snížení odhadu viriálové hmotnosti kupy A1656	86
8.4. Jakou hmotnost má temná hmota v centru kupy A1656.....	91
9. Ploché rotační křivky spirálních galaxií	93
9.1. Vera Rubinová	93
9.2. Spirální galaxie nerotují podle Keplerových zákonů	94
9.3. Oběžná rychlost kolem centrálního bodového tělesa	97
9.4. Oběžná rychlost kolem plochého disku	100
9.5. Oběžná rychlost kolem galaxie s výdutí a halem	103
9.6. Současný stav chápání temné hmoty	104

Část 2: Antigravitace a temná energie

10. Zrychlující se rozpínání vesmíru	107
10.1. Nobelova cena za fyziku v roce 2011	107
10.2. Rozpínající se vesmír a Hubbleova konstanta	108
10.3. Supernovy typu Ia — standardní svíčky	112
10.4. Měření kosmologických parametrů	114
10.5. Souhrn	120
11. Vzdalování Marsu od Slunce	121
11.1. Antigravitace a zákon zachování energie	121
11.2. Rychlost rozpínání Sluneční soustavy	122
11.3. Řeky na Marsu	123
11.4. Mars z pohledu Stefanova–Boltzmannova zákona	127
12. Vzdalování Měsíce od Země	131
12.1. Měření vzdálenosti Země–Měsíc	131
12.2. Paradox slapových sil Měsíce	133
12.3. Pozoruhodná souvislost	134
12.4. Rychlost vzdalování Měsíce od Země v důsledku slapů	135
12.5. Časově proměnný moment setrvačnosti Země	138
12.6. Paradox velkého orbitálního momentu hybnosti Měsíce	139
13. Vzdalování Země od Slunce	140
13.1. Paradox mladého horkého Slunce	140
13.2. Rozpínání ekosféry	140
13.3. Analýza přírůstků fosilních korálů ze slunečních dat	143
13.4. Analýza přírůstků fosilních korálů z měsíčních dat	144
13.5. Prodlužování délky siderického roku Země	146
13.6. Eliminace dalších příčin vzdalování Země od Slunce	148
13.7. Proč jiní autoři tvrdí, že se Sluneční soustava nerozpíná	150
13.8. Generování temné energie systémem Země–Slunce	152
14. Temná energie a antropický princip	154
14.1. Antropický princip a kosmologická konstanta	154
14.2. Dvoustranné odhady	156
14.3. Ochránit temná energie Zemi před rozpínajícím se Sluncem?	159
14.4. Pravděpodobnost vzniku života	160
15. Rozpínání Sluneční soustavy	163
15.1. Rychlé měsíce planet	163
15.2. Kde byla Larissa před miliardami let?	165
15.3. Měsíčky Uranu	166
15.4. Padající Phobos	167

15.5. Opožd'ující se Neptun	170
15.6. Soustava Neptun–Triton	171
15.7. Další kandidáti na projevy temné energie ve Sluneční soustavě	173
16. Rozpínání samotných galaxií	174
16.1. Expandují samotné galaxie v důsledku antigravitace?	174
16.2. Galaktická expanze	174
16.3. Rozpínání Mléčné dráhy	175
16.4. Rozložení galaxií v minulosti	176
16.5. Rychlost tvorby hvězd	177
16.6. Aktivita galaktických jader	178
16.7. Staré trpasličí galaxie	178
16.8. Kulové hvězdokupy	179
16.9. Gravitermální katastrofa	179
16.10. Exoplaneta WASP-18b	180
17. Co je záhadným zdrojem temné energie?	182
17.1. Gravitační aberace	182
17.2. Postnewtonovský model aneb jak se generuje temná energie	185
17.3. Rychlost gravitační interakce	188
17.4. Platí zákon zachování energie?	190
18. Co je vesmír	191
18.1. Neeukleidovské modely vesmíru	191
18.2. Izotropie a homogenita vesmíru	195
18.3. Nejednoznačnost pojmu vesmír	196
18.4. Hyperbolický prostor	198
18.5. Maximálně symetrické variety	202
19. Kritika standardního kosmologického modelu	205
19.1. Standardní matematický kosmologický model	205
19.2. Podivné chování kosmologických parametrů	207
19.3. Odvážné extrapolace	209
19.4. Temná hmota versus hmota baryonová	210
19.5. Temná energie versus kosmologická konstanta	211
19.6. Hlavní nedostatky kosmologického modelu	213
20. Zdánlivě nadsvětelné rychlosti ve vesmíru	215
20.1. Pozorování nadsvětelných rychlostí	215
20.2. Matematické objasnění pozorovaného paradoxu	217
20.3. Nadsvětelné rychlosti v kosmologických vzdálenostech	219
20.4. Princip časové čočky	220
20.5. Co bylo před Velkým třeskem?	222

21. Proč vznikla tato kniha	223
Literatura	230
Jmenný rejstřík	248
Věcný rejstřík	251

Seznam symbolů a konstant

3.14	desetinné číslo (s desetinnou tečkou místo čárky)
$[0, 1)$	polouzavřený interval
$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$	množina přirozených čísel
\mathbb{E}^n	n -rozměrný eukleidovský prostor
\mathbb{S}^n	jednotková n -rozměrná sféra
\mathbb{H}^n	jednotková n -rozměrná pseudosféra
\mathbb{C}	množina komplexních čísel
$ F $	absolutní hodnota, velikost (norma) vektoru
\dot{a}	časová derivace funkce $a = a(t)$
\times	násobení i kartézský součin
\cdot	násobení i skalární součin
$:=$	přiřazení
\approx	přibližná rovnost
\Leftrightarrow	ekvivalence
\in	je prvkem
\subset	podmnožina
\hookrightarrow	izometrické vložení
\ll	mnohem menší
\gg	mnohem větší
\max	maximum
\min	minimum
\log_b	logaritmus o základu b
\ln	přirozený logaritmus
\exp	exponenciální funkce $\exp(x) = e^x$
e	Eulerovo číslo 2.718281828...
e	excentricita
π	Ludolfovo číslo 3.14159265...
i	imaginární jednotka
i, j, k	celočíslné indexy
$\binom{m}{n}$	kombinační číslo m nad n (binomický koeficient)
\forall	pro všechna
$o(\cdot)$	$f(\alpha) = o(g(\alpha))$, pokud $f(\alpha)/g(\alpha) \rightarrow 0$ pro $\alpha \rightarrow 0$ nebo $\alpha \rightarrow \infty$
\sum	součet
$\{x \in A \mid \mathcal{P}(x)\}$	množina všech prvků x z A majících vlastnost $\mathcal{P}(x)$
$f : A \rightarrow B$	funkce f zobrazující prvky z A do B
$x \mapsto f(x)$	funkce, která každému x přiřadí hodnotu $f(x)$
\square	Halmosův symbol označující konec důkazu

\odot	Slunce
M_{\odot}	hmotnost Slunce $1.988\,547 \cdot 10^{30}$ kg
m_{proton}	hmotnost protonu $1.67 \cdot 10^{-27}$ kg
z	červený posuv
c	rychlost světla ve vakuu $299\,792\,458$ m/s
c_G	rychlost gravitační interakce
G	gravitační konstanta $6.674 \cdot 10^{-11}$ m ³ kg ⁻¹ s ⁻²
Λ	kosmologická konstanta $\approx 10^{-52}$ m ⁻²
σ	Stefanova–Boltzmannova konstanta $5.669 \cdot 10^{-8}$ Wm ⁻² K ⁻⁴
h	Planckova konstanta $6.626\,069\,3 \cdot 10^{-34}$ Js
H_0	Hubbleova konstanta ≈ 70 km/(s Mpc)
$H(t)$	Hubbleův parametr
au	astronomická jednotka $149\,597\,870\,700$ m
AU	původní označení astronomické jednotky
pc	parsek 3.262 ly = $206\,265$ au = $3.086 \cdot 10^{16}$ m
yr	siderický rok $365.256\,36$ dne = $31\,558\,149.54$ s
ly	světelný rok $63\,240$ au = $9.46 \cdot 10^{15}$ m

Úvodní slovo

*Jediný zákon je, že
neplatí žádný zákon.*

JOHN ARCHIBALD WHEELER

Důležité revoluce ve fyzice jako např. Newtonova teorie gravitace, speciální teorie relativity či kvantová mechanika přišly v době, kdy někteří badatelé našli odvahu se vymanit ze zajetých kolejí tehdejší vědy a podívali se na přírodní jevy a naměřená data poněkud jiným pohledem. Úkolem této publikace je poukázat na některá zrádná úskalí, na která narážíme, pokud ztotožňujeme výsledky jednoduchých matematických modelů s realitou. Kupříkladu v soudobé kosmologii panuje představa, že vesmír je složen z 68 % jakési temné energie, z 27 % neznámé temné hmoty a jen necelých z 5 % běžné baryonové látky. Přitom všechny modely (bez výjimky!), které se pro popis vývoje vesmíru používají, máme otestovány jen na podstatně menších časoprostorových škálách. Při jejich použití na celý vesmír se tedy nutně dopouštíme značné extrapolace bez záruky, že obdržení výsledek je správně. Rozdíl oproti naměřeným datům se pak interpretuje jako působení temné hmoty a temné energie. Lidé ale mají rádi záhady a senzace. Chtějí tajemnou temnou hmotu a ještě tajemnější temnou energii, a proto je velice obtížné tento stav zvrátit.

Dříve, než se v knize pustíme do rozboru mnoha otevřených otázek soudobé kosmologie, si připomeneme některé důležité milníky ilustrující, jak k tomuto konceptu lidstvo dospělo. Proto jsou úvodní kapitoly věnovány především historii poznávání okolního vesmíru a krokům vedoucím až k objevu Newtonova gravitačního zákona. Dále se podrobně podíváme na výpočty Fritze Zwickyho a Very Rubinové, kteří přišli s myšlenkou, že pro popis dynamiky rozměrných gravitačně vázaných soustav — galaktických kup a spirálních galaxií — je třeba uvažovat existenci temné hmoty. Upozorníme na jevy, které ve svých odhadech opomenuli, a proč pak museli temnou hmotu postulovat. Vědecké výsledky musí být kdykoliv zpětně verifikovatelné. Proto uvedeme nová naměřená data, která odhadované množství temné hmoty podstatně redukuje a naopak navyšují množství baryonové látky.

Ve druhé části knížky budeme diskutovat vliv konečné rychlosti šíření gravitační interakce v systémech vázaných těles, což teoreticky vede k jejich pozvolnému roz-

pínání. Nabízí se tedy otázka, zda lze takové projevy ve vesmíru pozorovat. V kapitolách 11–16 proto uvádíme celou řadu observačních argumentů, které naznačují, že se Sluneční soustava i samotné galaxie na dlouhodobých časových intervalech nepatrně rozpínají. Je to způsobeno všudypřítomnou repulzivní silou — **antigravitací**, která je důsledkem kauzality a konečné rychlosti šíření gravitační interakce. Z toho lze ovšem vyvodit závěr, že je mírně narušen zákon zachování energie. Přitom jsme si dobře vědomi, že astronomická data mohou být dosti nepřesná (typu fuzzy), např. když se jedná o hmotnosti, velikosti či vzdálenosti galaxií. Proto by mnohé rovnosti „=“ v knížce měly být nahrazeny spíše symbolem „ \approx “, pokud se přímo nejedná o definici či rovnosti v matematickém modelu. Vztahy, za nimiž jsou fyzikální jednotky v kulatých závorkách, je třeba chápat tak, že všechny bezrozměrné výrazy mezi rovnítky či nerovnicemi jsou v těchto jednotkách.

Předložená knížka vznikla z článků, které jsem v letech 1992–2014 publikoval v mezinárodních časopisech (New Astronomy, Communications in Computational Physics, Mathematics and Computers in Simulation, International Journal of Astronomy and Astrophysics, Journal of Computational and Applied Mathematics), ale i v řadě domácích časopisů. Kapitola 6 vznikla rozšířením popularizačního článku, na kterém jsem spolupracoval s Marií Větrovcovou. S analýzou dat z kapitol 8 a 9 mi zase pomáhal můj syn Filip. Jim patří můj velký dík.

Většinu kapitol lze číst nezávisle na předchozím výkladu. Pokud bude pro Vás některá partie příliš obtížná, není problém ji přeskočit. Čtenář většinou dobře vystačí se středoškolskou matematikou, i když na několika místech se objevují integrály či jednoduché diferenciální rovnice. Celá kniha je volně k dispozici na

<http://users.math.cas.cz/~krizek/list.html>

Její obsah mi v řadě mnohdy velmi polemických diskusí pomohli zdokonalit především Jiří Bičák, Jan Brandts, Miroslav Brož, Leoš Dvořák, Soňa Ehlerová, Helena Holovská, Jan Chleboun, Bruno Jungwiert, Marian Karlický, Oldřich Kowalski, Filip a Pavel Křížkovi, František Lomoz, Martin Markl, Ctirad Matyska, Jan Novotný, Oldřich Novotný, Vladimír Novotný, Jan Palouš, Jiří Podolský, Alena a Vojtěch Pravdovi, Petr Preuss, Vojtech Rušin, Petr Sadílek, Lawrence Somer, Alena, Jakub a Martin Šolcovi, Ladislav Šubr, Michal Švanda, Marie Větrovcová, David Vokrouhlický, Jan Vondrák, Vladimír Wagner, Marek Wolf, Richard Wunsch a Weijia Zhang. Jejich pomoci si velice vážím a patří jim můj velký dík.

Hodně mě též ovlivnily publikace a veřejná vystoupení Jiřího Grygara, Josipa Kleczka a Petra Kulhánka, kteří mě svými přehledovými přednáškami inspirovali k napsání řady článků. Mnohokrát jim za to děkuji. Rovněž bych rád poděkoval všem svým učitelům na Matematicko-fyzikální fakultě Univerzity Karlovy. Na cvičeních z matematické analýzy s Ivanem Netukou jsme většinou příklady nepočítali, zato jsme hlavně dokazovali matematické věty a hledali nejružnější protipříklady na ne-

správná či nepřesně formulovaná tvrzení, čehož jsem později mnohokráté využil. Jsem také vděčen Attilovi Mészárosovi, že mi umožnil navštěvovat jeho skvělé přednášky z kosmologie.

Dále jsem hluboce zavázán Janu Maršákovi za bedlivé přečtení celého rukopisu, manželce Lei, Janě Grünerové a Karlu Segethovi za jazykové korektury, svým synům Filipovi a Pavlovi za nakreslení většiny obrázků, předsedovi JČMF Josefu Kubátovi za trvalou podporu, Jarmile Štruncové za shánění odborné literatury a Haně Bílkové za technickou pomoc při závěrečné úpravě rukopisu a za pečlivé grafické zpracování knížky. Konečně bych rád vzdal dík za finanční podporu z grantu GA ČR P101/14-020675 a projektu RVO 67985840. Uvítám jakékoliv vaše připomínky.

8. března 2014

Michal Křížek
krizek@cesnet.cz

Část 1

Newtonova teorie gravitace a temná hmota

1. O tisíciletém svazku astronomie a matematiky

*Matematika je jazyk,
kterým hovoří všechny exaktní vědy.*

NIKOLAJ I. LOBAČEVSKIJ

1.1. Úvod

Astronomie a matematika patří mezi nejstarší vědní disciplíny. Již po tisíciletí spolu koexistují a vzájemně se obohacují. K určování astronomických vzdáleností blízkých objektů se používají trigonometrické metody. Pomocí numerických metod se zase počítají trajektorie kosmických sond, což umožnilo mj. navštívit Měsíc, získat unikátní fotografie planet a jejich měsíců, počítat dráhy těles ohrožujících Zemi nebo vypustit telekomunikační či meteorologické družice. Když sonda posílá získané informace na Zemi, použije důmyslné matematické algoritmy ke kompresi dat a jejich následný přenos je zabezpečen pomocí samoopravných kódů [158]. Ke zpracování příchozího signálu se pak obvykle používá Fourierova analýza. Bez fundovaných výpočtů se dnes neobejde ani konstrukce a montáž mnoha astronomických přístrojů, například dalekohledů a jejich zrcadel, koutových odražečů, interferometrů, CCD-kamer, GPS, ale i superpočítačů a počítačových sítí hojně využívaných astronomy.

Na druhé straně matematika vděčí astronomii za rozvoj přibližných a numerických metod pro řešení diferenciálních rovnic a výpočtu integrálů, teorie interpolace a extrapolace, metody nejmenších čtverců, optimalizačních metod, statistických metod, teorie grup, teorie chaosu, teorie řad, matematického modelování, stereometrie, neeukleidovských geometrií, tenzorového počtu aj.

O astronomická pozorování se různé kultury zajímaly již od dávnověku. Nebeská sféra sloužila hlavně k orientaci a odhadování času, dokladem čehož jsou četné megalitické stavby dochované na různých místech na Zemi. V jižní Anglii se nachází jedna z nejstarších známých astronomických observatoří — Stonehenge. Sloužila pro zavedení kalendáře na základě přesného určování poloh nebeských těles a též slunovratů,



Obr. 1.1. Kamenný kruh Castlerigg východně od Keswiku v Anglii sloužil před 5 200 lety jako astronomická observatoř (foto Pavel Křížek).

východů a západů Slunce. Vznikla asi před 5 000 lety. V Británii však existují i další starověké observatoře, např. Castlerigg (viz obr. 1.1). Podobná půlkruhová kamenná stavba Taosi z roku 2100 př. n. l. se nalézá též v čínské provincii Šan-si (angl. Shanxi) a také v České republice máme doloženu astronomickou orientaci starobylého čtverce u Makotřas. Dávní astronomové jistě byli dobří pozorovatelé a počtáři, o čemž svědčí pozoruhodná matematická struktura původních mayských či čínských kalendářů (viz např. [149], [150]).

Astronomie se úspěšně rozvíjela také v dalších civilizacích. Největší řecký pozorovatel Hipparchos (190–125 př. n. l.) sestavil katalog pozic více než 800 hvězd. Zavedl též pojem hvězdná velikost a byl zastáncem geocentризmu, který předpokládá, že Země je středem vesmíru.

Další řecký matematik a astronom Klaudios Ptolemaios (cca 100–170) převzal Hipparchovy údaje o hvězdách a názory o nehybnosti Země a jejím umístění uprostřed vesmíru. Vytvořil tzv. *ptolemaiovskou geocentrickou soustavu*, která měla vysvětlovat pohyby nebeských těles. Jeho teorii později přijala církev, a proto bylo ve středověku velice obtížné prosadit jiný názor. Moderní astronomie se tak začala rozvíjet až o 13 století později, když polský astronom Mikuláš Koperník (1473–1543) ve svém díle *O obězích nebeských sfér* vytvořil *heliocentrickou soustavu*, v níž všechny planety obíhají kolem Slunce.

Podpůrné argumenty ve prospěch heliocentrické soustavy před geocentrickou získal italský astronom Galileo Galilei (1564–1642), když objevil fáze Venuše a měsíce Jupitera. K tomu jako první použil dalekohled k pozorování nebeské sféry. Přitom také objevil krátery na Měsíci, sluneční skvrny, hvězdy v Mléčné dráze a prstence Saturnu. Byl jedním ze zakladatelů moderní fyziky. Galileo se též pokoušel změřit rychlost světla a jako první přišel s myšlenkou, že všechna tělesa padají stejně rychle k Zemi, pokud nejsou bržděna atmosférou.¹

Společně s rozvojem pozorovacích technik byly nalezeny i zákonitosti, jimiž se řídí zdánlivě nepravidelné pohyby planet. Klíč k této záhadě předložil významný německý matematik a astronom Johannes Kepler (1571–1630), který během svého

¹Praktický pokus byl proveden mj. v roce 1969 na Měsíci s peřičkem a kladivem.



Obr. 1.2. Objev prvních dvou Keplerových zákonů v Praze připomíná pamětní deska v Karlově ulici.

pobytu v Praze empiricky odvodil dva zákony o oběhu planet kolem Slunce (viz obr. 1.2). Později přidal ještě třetí zákon, který je snad nejpoužívanějším vztahem v astronomii vůbec (srov. věcný rejstřík). Všechny tři zákony jsou formulovány jako matematická tvrzení. Proto je Kepler právem považován za zakladatele nebeské mechaniky. O Keplerových objevech a jejich využití v astronomii pojednáme v kapitolách 1–3.

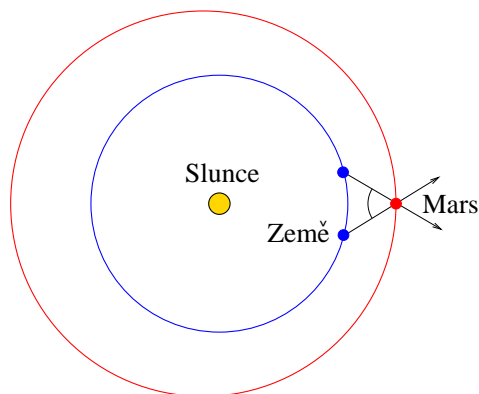
Vyvrcholením těchto snah bylo vytvoření Newtonovy teorie gravitace. Keplerovy myšlenky rozvinul anglický učenec sir Isaac Newton (1643–1727) v díle *Philosophiae naturalis principia mathematica* (*Matematické základy přírodní filosofie*). V něm formuloval své tři pohybové zákony a gravitační zákon, což jsou vskutku mocné nástroje k poznávání přírody, jak ještě uvidíme v kapitole 4 a 5. Newton byl též zakladatelem infinitezimálního počtu, který použil mj. při odvozování Keplerových zákonů.



1.2. Keplerovy zákony

Čínští astronomové sestavovali podrobné tabulky poloh planet již od 7. století n. l., tj. již tisíc let před Keplerem. Věděli dokonce, že planety dělají na svých drahách kličky.² Proč ale neobjevili Keplerovy zákony? Staročínské astronomové se patrně až příliš soustřeďovali na předpovědi zatmění Slunce a Měsíce, což bylo spojováno s katastrofami, než na vysvětlení pohybu planet. Také neměli dobrý geometrický model fungování Sluneční soustavy a jejich měření poloh planet byla o řád méně přesná než měření dánského astronoma Tychona Brahe (1546–1601), který používal

²Hlavním důvodem vzniku kliček je skutečnost, že každá planeta obíhá v jiné rovině.



Obr. 1.3. Znázornění Keplerovy metody pro stanovení eliptické dráhy Marsu, který se po jednom marsovském roce promítá na jinou část oblohy. Mars se nachází v průsečíku obou směrů.

otočný kvadrant se stupnicí připomínající nonius (viz obr. 2.1). Je nutno vzít též v úvahu, že Kepler dobře znal Koperníkův heliocentrický model Sluneční soustavy a jistě zde velkou roli sehrála i Keplerova genialita.³

Během svého pobytu v Praze Johannes Kepler analyzoval velice přesná data Tychona Brahe o pohybu bludných hvězd (tak totiž nazývali staří Řekové planety). Přitom zjistil, že se planety pohybují po eliptických drahách a že plošná rychlost průvodiče každé planety (tj. spojnice Slunce a planety) je konstantní. Tak byl kolem roku 1605 objeven první a druhý Keplerův zákon, které byly prvně publikovány ve stěžejním Keplerově díle *Astronomia nova* v roce 1609. Okolnosti vedoucí k tomuto významnému objevu jsou popsány např. v [263] a [271].

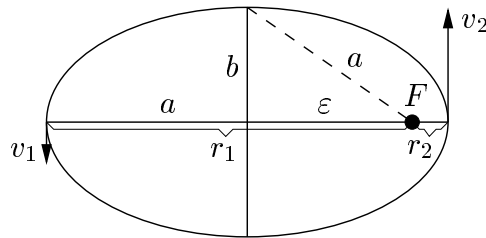
První Keplerův zákon: *Dráhy planet jsou eliptické a v jejich společném ohnisku je Slunce.*

Druhý Keplerův zákon: *Průvodič planety opíše za stejné doby plochy o stejném obsahu.*

Připomeňme si nyní, jak Johannes Kepler tyto zákony objevil. Kepler věděl, že oběžná perioda Marsu je 687 dní⁴, a proto se po této době vrátí Mars do stejného místa, zatímco Země oběhne Slunce téměř dvakrát. Tím vlastně mohl stanovit dva

³J. Kepler například našel všechna pravidelná periodická pokrytí roviny pravidelnými mnohoúhelníky. Dále zkonstruoval některá pravidelná hvězdovitá tělesa či třicetistěn, jenž je průnikem pěti krychlí. Vymyslel též dalekohled — refraktor, v němž je okulár i objektiv tvořen spojnou čočkou, atd. Kepler značně předběhl svou dobu. Uvažoval dokonce i o městech na Měsíci (viz Ioh. Kepleri Mathematico Olimimperatorii, což vydal až jeho syn Ludovico Kepler v r. 1634). Při procházkách po Karlově mostě si např. kladl hlubokou otázku, proč má každá sněhová vločka jiný tvar a šestičetnou symetrii. Proto je právem pokládán za jednoho ze zakladatelů krystalografie.

⁴Dnes víme, že oběžná perioda Marsu je 686.971 dne.



Obr. 1.4. Keplerovská dráha

různé směry, kterými se Mars promítal na nebeskou sféru, a mohl tak zjistit jeho polohu v oběžné rovině (viz obr. 1.3). Opakováním tohoto postupu pro různé časové okamžiky mohl pomocí souřadnic Marsu naměřených Tychonem Brahe nakreslit celou dráhu Marsu a zjistit tak, že jeho dráha je eliptická (viz 1. Keplerův zákon). Když si pak Kepler připsal k jednotlivým polohám Marsu příslušné časové údaje, objevil i druhý zákon.

Označme $a \geq b$ délky poloos eliptické dráhy planety. Pro jednoduchost budeme stejným symbolem a a b označovat i samotné poloosy. Velké poloose a se říká *hlavní* a malé poloose b *vedlejší*, je-li $a > b$. Vzdálenost ohniska elipsy od jejího středu se nazývá *délková* (tj. *lineární*) *excentricita* dráhy a je definována vztahem (viz obr. 1.4)

$$\varepsilon = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Podobně

$$e = \frac{\varepsilon}{a}$$

je *číselná*, (tj. *numerická*) *excentricita*. Budeme jí říkat jen *excentricita* a někdy též *výstřednost*.

Kepler měl vlastně štěstí, že upíral svoji pozornost právě na Mars, protože jeho dráha má excentricitu⁵ poměrně velkou $e \approx 0.1$ (viz obr. 1.3). Důsledkem 1. a 2. Keplerova zákona je (viz [121]):

Třetí Keplerův zákon: *Čtverce oběžných dob planet jsou v témže poměru jako třetí mocniny délek hlavních poloos.*

Důsledná a systematická práce Keplerovi pomohla k objevu třetího zákona. Kepler jej našel v podstatě empiricky, když už opustil Prahu. Třetí Keplerův zákon můžeme přepsat do tvaru

$$T^2 = Ca^3.$$

⁵Na druhé straně Země má velice malou excentricitu $e = 0.0167$ své eliptické dráhy. Délky její velké poloosy $a = 149.598 \cdot 10^6$ km a malé poloosy $b = 149.577 \cdot 10^6$ km se liší až na páté platné číslici.

Zde T je oběžná doba planety a $C > 0$ je konstanta. Tehdy se násobení čísel převádělo na součet logaritmů a po odlogaritmování se dostal hledaný součin. K tomuto účelu Johannes Kepler používal Bürgiovy tabulky⁶. Přitom si povšiml jednoduché závislosti

$$2 \log T - 3 \log a = \text{konst.}$$

mezi dekadickými logaritmy naměřených hodnot periody T a délky hlavní poloosy a . Odtud byl už jen krůček k formulování třetího „harmonického zákona“, který Kepler uveřejnil až v roce 1619 v díle *Harmonices mundi libri V*. Kepler si povšiml, že jeho nový zákon platí i pro 4 velké Jupiterovy měsíce.



1.3. Keplerovská dráha

Je-li r_1 , resp. r_2 vzdálenost planety v afeliu (odsluní), resp. periheliu (přísluní) od ohniska F , kde se nalézá Slunce, pak (viz obr. 1.4)

$$r_1 = a + \varepsilon, \quad r_2 = a - \varepsilon.$$

Hmotnost planety je přitom zanedbatelná vzhledem k hmotnosti Slunce. Pomocí vztahů

$$2a = r_1 + r_2, \quad 2\varepsilon = r_1 - r_2$$

a $b = \sqrt{a^2 - \varepsilon^2}$ vidíme, že délka hlavní poloosy a je rovna aritmetickému průměru vzdáleností r_1 a r_2 , tj.

$$a = \frac{r_1 + r_2}{2}, \tag{1.1}$$

zatímco délka vedlejší poloosy b je rovna jejich geometrickému průměru, tj.

$$b = \sqrt{\left(\frac{r_1 + r_2}{2}\right)^2 - \left(\frac{r_1 - r_2}{2}\right)^2} = \sqrt{r_1 r_2}. \tag{1.2}$$

Označme v_1 , resp. v_2 velikost rychlosti planety v afeliu, resp. periheliu. Ze zákona zachování momentu hybnosti ($mr v = \text{konst.}$) plyne, že

$$r_1 v_1 = r_2 v_2. \tag{1.3}$$

Z výše uvedených rovností dostaneme

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{a + \varepsilon}{a - \varepsilon} = \frac{1 + e}{1 - e}. \tag{1.4}$$

⁶Joost Bürgi (1555–1632), švýcarský hodinář a matematik, který vyvinul logaritmy nezávisle na Johnu Napierovi.

Pro pevné e je tedy poměr v_2/v_1 konstantní, ať je elipsa jakkoliv velká. Pro excentricitu dráhy Marsu $e = 0.0934$ dostáváme dosti vysoký poměr $v_2/v_1 = 1.206$, který vlastně pomohl Keplerovi odhalit jeho druhý zákon. Pro excentricitu Merkuru $e = 0.2056$ je tento poměr dokonce $v_2/v_1 > 1.2/0.8 = 1.5$, viz [209]. Navíc podle (1.4) a (1.3) platí

$$e = \frac{v_2 - v_1}{v_2 + v_1} = \frac{r_1 - r_2}{r_1 + r_2}. \quad (1.5)$$



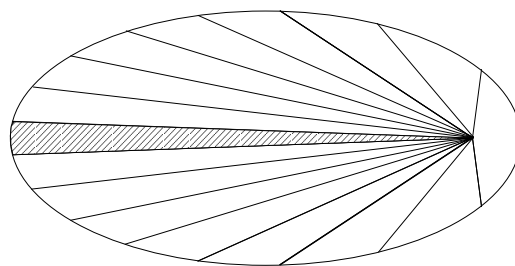
1.4. Některé důsledky druhého Keplerova zákona

Vztah (1.3) je vlastně důsledkem druhého Keplerova zákona, podle něhož průvodiče opisují za stejné doby plochy stejného obsahu (viz obr. 1.5). Tzv. plošná rychlost průvodiče je tedy konstantní, což vede k rovnosti

$$\frac{1}{2}r_1v_1 \cdot T = \frac{1}{2}r_2v_2 \cdot T = \pi ab, \quad (1.6)$$

kde výraz na pravé straně je roven *obsahu elipsy* a T je doba oběhu planety. Odtud plyne, že rychlost v_1 je minimální a rychlost v_2 maximální.

Vztah (1.6) lze dokázat pomocí infinitezimálního počtu. Zde jeho odvození pouze naznačíme.

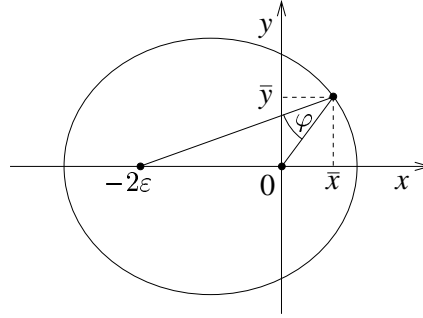


Obr. 1.5. Schématické znázornění druhého Keplerova zákona

Rozdělme dobu oběhu T na n stejně dlouhých intervalů $\Delta t = T/n$. Pokud se doba Δt blíží k nule (tj. n se blíží k nekonečnu), pak se jednotlivé segmenty na obr. 1.5 zužují a jejich zakřivená strana se „napřimuje“. Podobají se čím dále tím více trojúhelníkům, které mají všechny stejný obsah. Ten je roven obsahu $\frac{1}{2}r_1v_1\Delta t$ vyšrafovaného trojúhelníka z obr. 1.5 s výškou r_1 a základnou $v_1\Delta t$. Součet obsahů všech ploch je pak roven $\frac{1}{2}r_1v_1T$, což je hodnota levé strany vztahu (1.6).

Z Keplerových zákonů nyní odvodíme několik užitečných vztahů, které využijeme později. Z rovností (1.1), (1.2) a (1.6) plyne

$$\frac{1}{2}r_1v_1 \cdot T = \pi \frac{r_1 + r_2}{2} \sqrt{r_1r_2}.$$

Obr. 1.6. Průvodiče planety svírají úhel φ .

Dosadíme-li nyní za r_2 ze zákona (1.3), pak

$$r_1 v_1 \cdot T = \pi r_1^2 \frac{v_1 + v_2}{v_2} \sqrt{\frac{v_1}{v_2}}.$$

Pro r_1 (a podobně i pro r_2) tedy dostáváme

$$r_1 = \frac{T}{\pi} \frac{v_2}{v_1 + v_2} \sqrt{v_1 v_2}, \quad r_2 = \frac{T}{\pi} \frac{v_1}{v_1 + v_2} \sqrt{v_1 v_2}, \quad (1.7)$$

což podle (1.1) a (1.2) dává

$$a = T \sqrt{\frac{v_1 v_2}{2\pi}}, \quad b = \frac{T v_1 v_2}{\pi(v_1 + v_2)}. \quad (1.8)$$

Tak můžeme stanovit délky poloos z oběžné doby a minimální a maximální rychlosti.

Uveďme ještě vztah pro úhel mezi průvodiči planety. Předpokládejme, že je Slunce umístěno v počátku souřadnic a druhé ohnisko v bodě $(-2\varepsilon, 0)$, kde $\varepsilon = \sqrt{a^2 - b^2}$ a $a > b$. Druhý průvodič je spojnice druhého ohniska s planetou. Označme (\bar{x}, \bar{y}) souřadnice planety (viz obr. 1.6) a k_1 a k_2 směrnice jejích dvou průvodičů. Dosadíme-li $\bar{y} = k_1 \bar{x}$ do rovnice elipsy $b^2(\bar{x} - \varepsilon)^2 + a^2 \bar{y}^2 = a^2 b^2$, získáme kvadratickou rovnici pro $\bar{x} > 0$. Směrnici druhého průvodiče lze pak vyjádřit vztahem (viz obr. 1.6)

$$k_2 = \frac{k_1 \bar{x}}{\bar{x} + 2\varepsilon}. \quad (1.9)$$

Pro úhel φ mezi oběma průvodiči planety platí (viz [220], s. 171)

$$\varphi = \arctg \left| \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2} \right|, \quad k_1 k_2 \neq -1, \quad (1.10)$$

kde po dosazení za k_2 ze vztahu (1.9) získáme vyjádření úhlu φ jako funkci jen jedné směrnice k_1 . Podle [220], s. 115, normála v bodě (\bar{x}, \bar{y}) pulí úhel φ . Odtud již můžeme vypočítat, jak se liší směr normály od směrnice k_1 .



2. Význam úhlových měření při poznávání vesmíru

*Matematika, kterou se řídí náš fyzikální
svět, je neobyčejně plodná a mocná.
Tento vztah pokládám za hluboké tajemství.*

ROGER PENROSE

2.1. Úhloměrné přístroje

Lidstvu trvalo tisíce let, než získalo soudobou představu o struktuře vesmíru a dějích, které v něm probíhají. Na řadě vybraných příkladů ukážeme, že v tomto procesu sehrály podstatnou úlohu originální geometrické úvahy a docela obyčejný a jednoduchý přístroj — úhloměr. Přesněji řečeno, nejrozumnější úhloměrné přístroje tak, jak se v minulosti postupně vyvíjely, tedy gnómon, trikvetrum, Jakubova hůl, armilární sféra, astroláb, kvadrant (srov. obr. 2.1), sextant, cirkumzenitál atd. S jejich popisem se lze seznámit např. v [78]. Řadu z nich používaly již starodávne civilizace pro zaznamenávání rozmanitých nebeských úkazů.

Tisíciletou tradici má například používání slunečních hodin v Číně, Mezopotámii a Řecku, které se rozšířilo po celé Evropě. Měření času se na nich převádí na měření úhlů stínů vržených kamenným monolitem nebo tyčí (gnómonem). V roce 545 př. n. l. Anaximandros změřil polední výšky Slunce při letním a zimním slunovratu a jejich rozdíl vydělil dvěma. Získal tak úhel 23.5° mezi rovinou zemského rovníku a rovinou ekliptiky.¹

Otočný zední kvadrant Tychona Brahe (viz obr. 2.1) z konce 16. století umožňoval měřit azimut s přesností kolem jedné úhlové minuty (což je na prahu rozlišovací schopnosti lidského oka), a tedy více než o řád přesněji než ostatní tehdejší úhloměrné přístroje. Pečlivým studiem úhlových měření T. Brahe pak objevil Johannes Kepler (viz [271]) své tři slavné zákony, které dnes odvozujeme z Newtonovy mechaniky.

¹Ekliptika je rovina, v níž obíhá Země kolem Slunce.



Obr. 2.1. Jednotlivé stupně Tychonova kvadrantu jsou diagonálně rozděleny na deset částí po šesti obloukových minutách, což dále umožňovalo interpolovat měřený úhel s přesností kolem jedné minuty.

Nejběžnějším astronomickým úhloměrným přístrojem dnešní doby je dalekohled. Záměrný kříž se stupnicí v okuláru dalekohledu také slouží k měření velmi malých úhlů v úhlových minutách, popř. vteřinách. Známý Hubbleův kosmický teleskop má rozlišovací schopnost dokonce kolem jedné setiny úhlové vteřiny. Mezi nejpřesnější úhloměrné přístroje však patří optické a rádiové interferometry, které umožňují měřit nesmírně malé úhly menší než $0.001''$.

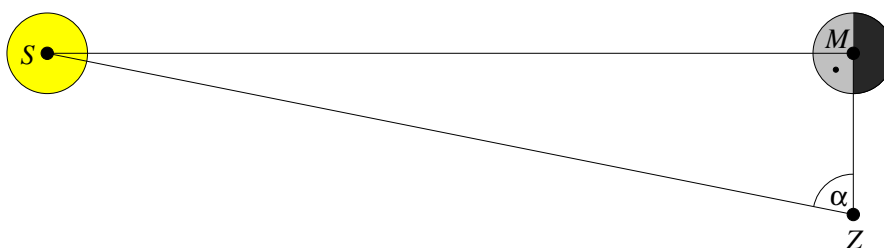


2.2. Měření relativních vzdáleností ve Sluneční soustavě

Řecký astronom Aristarchos ze Samu (3. stol. př. n. l.) byl patrně nejstarším známým učencem, který vyslovil názor, že planety obíhají kolem Slunce. Proto se mu připisuje, že je prvním tvůrcem heliocentrického modelu Sluneční soustavy. Měl několik dalších vskutku geniálních nápadů a ukázal, že i zdánlivě obtížné astronomické problémy mohou být vyřešeny pomocí elementárních geometrických metod. Uvědomil si, že když je Měsíc v první (popř. poslední) čtvrti, úhel SMZ je pravý, kde S, M, Z označují po řadě střed Slunce, Měsíce a Země (viz obr. 2.2). Pomocí jednoduchého úhloměrného přístroje pak změřil úhel SZM a zjistil, že přepona SZ pravoúhlého trojúhelníka SMZ je $19\times$ delší než odvěsna MZ . Jeho úvahu můžeme v dnešní symbolice zapsat takto:

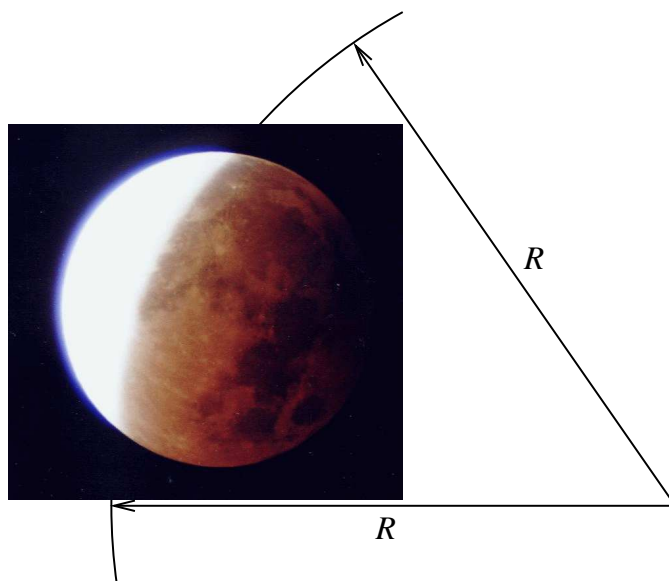
$$\cos \alpha = \frac{|MZ|}{|SZ|} = \frac{1}{19}, \quad (2.1)$$

kde $\alpha \approx 87^\circ$ je úhel SZM . Aristarchos tak usoudil, že Slunce musí být zhruba $19\times$ dále od Země než Měsíc.



Obr. 2.2. Když je Měsíc v první čtvrti, úhel SMZ je pravý, kde S označuje Slunce, M Měsíc a Z Zemi.

Samozřejmě bylo velice obtížné stanovit přesně okamžik první čtvrti a změřit tehdejšími přístroji velikost úhlu α . Dnes víme, že Slunce je přibližně $389\times$ dále od Země než Měsíc, což odpovídá téměř pravému úhlu $\alpha = 89.8527^\circ$. Velký rozdíl v těchto relativních vzdálenostech je způsoben skutečností, že $(\cos 87^\circ)^{-1} \ll (\cos 89.8527^\circ)^{-1}$, i když jsou příslušné úhly prakticky stejně velké.



Obr. 2.3. Důkaz kulatosti Země: během měsíčních zatmění je stín Země na Měsíci vždy kruhový. Jeho poloměr R je více než třikrát větší, než je poloměr Měsíce.

Aristoteles (cca 384–322 př. n. l.) ve svém pojednání *O nebi* [8] tvrdil, že Země je koule, protože její stín viditelný na povrchu Měsíce při měsíčních zatměních je vždy kruhový (viz obr. 2.3), ať je Země jakkoliv natočena. Později Aristarchos změřil úhlovou velikost tohoto stínu $\approx 1.5^\circ$, což je $3\times$ více, než činí úhlová velikost Měsíce $\approx 0.5^\circ$. Vyslovil domněnku, že Země se volně vznáší v prostoru a její poloměr je $3\times$ větší, než je poloměr Měsíce (podle dnešních měření je to 3.67 krát), protože obě tělesa jsou hodně daleko od Slunce a zároveň blízko sebe. Sluneční paprsky jsou proto téměř rovnoběžné. Odtud Aristarchos vypočítal, že Měsíc je vzdálen 70 zemských poloměrů od Země, což můžeme v soudobém zápisu vyjádřit takto:

$$\operatorname{tg}(3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0.5^\circ) = \operatorname{tg} 0.75^\circ \approx \frac{R}{70R}, \quad (2.2)$$

kde R je poloměr Země. Podle dnešních znalostí je Měsíc od Země vzdálen zhruba 60 zemských poloměrů.²

Aristarchos navíc formuloval na tehdejší dobu převratnou hypotézu, že Země obíhá kolem Slunce, a nikoli obráceně. Svoje tvrzení zdůvodnil tím, že Slunce a Měsíc mají na obloze stejný zdánlivý průměr, Slunce je mnohem větší než Země, protože je $19\times$ větší než Měsíc, zatímco Země je jen $3\times$ větší než Měsíc (viz obr. 2.2 a 2.3). Téměř žádný z originálních Aristarchových spisů se nezachoval (srov. [7]). O jeho úvahách se však zmiňuje např. Archimedes v pojednání *O počítání písku*.

⊙ ⊙ ⊙

²Protože úhlová velikost Měsíce je přibližně $31.1'$, platí $\operatorname{tg}(3.67 \cdot \frac{1}{2} \cdot 31.1') \approx R/(60R)$.

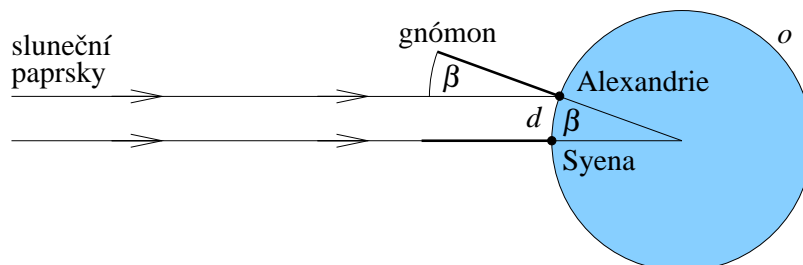
2.3. Stanovení absolutních vzdáleností

Aristarchovu koncepci určování relativních vzdáleností ve Sluneční soustavě vtipně doplnil další řecký učenec Eratosthenes (cca 276–194 př.n.l.), který se proslavil nejen svým prvočíselným sítím [158], s. 53, ale též prvním hodnověrným a velice důmyslným výpočtem velikosti obvodu Země (viz [74]). Opět zde sehrála důležitou roli úhlová měření. Z pozorování bylo známo, že polední výška Slunce pro určitý den se liší v různých zeměpisných šířkách. Eratosthenes použil nejjednodušší astronomický přístroj — gnómon³, což je jen rovná tyč zaražená kolmo do země. Věděl, že se Slunce zrcadlí v hlubokých studních v Syeně (na obratníku Raka v oblasti dnešního Asuánu) v pravé poledne v době letního slunovratu. To znamená, že se Slunce nalézá v zenitu, a tudíž zde gnómon nevrhá žádný stín. Ve stejnou dobu v Alexandrii, která leží téměř na stejném poledníku jako Syena, Eratosthenes zjistil, že úhel mezi vertikálně zaraženým gnómonem a slunečními paprsky je $\beta = 7.2^\circ$ (viz obr. 2.4), tj. $\frac{1}{50}$ plného úhlu 360° . Vzdálenost $d = 5\,000$ stadií ≈ 920 km mezi Alexandrií a Syenou byla odhadnuta jízdou na velbloudech. Pak ze vztahu

$$\frac{d}{o} = \frac{\beta}{360^\circ}$$

Eratosthenes odvodil, že obvod Země⁴ je

$$o = 250\,000 \text{ stadií} \approx 46\,000 \text{ km.} \quad (2.3)$$



Obr. 2.4. Obvod Země o byl přibližně určen ze známé vzdálenosti d mezi Alexandrií a Syenou a úhlu β , který byl změřen v pravé poledne o letním slunovratu v Alexandrii.

Není přesně známo a ani není tak podstatné vědět, jak velká byla ve skutečnosti řecká jednotka délky *stadion* [$\sigma\tau\alpha\delta\iota\omicron\nu$], *lat.* stadium. Její hodnota patrně ležela v intervalu 148–210 m. Mnohem důležitější však je nalezení elegantní metody, jak obvod Země změřit.⁵

³Gnómon mohl být též umístěn v duté polokouli se stupnicí, tzv. skafé.

⁴Dnešní hodnota je $o \approx 40\,000$ km.

⁵V 17. století se zpřesňovala hodnota obvodu Země pomocí měření úhlů ve vytyčené triangulaci (viz [14]).

Podle Aristarchových a Eratosthenových úvah (srov. (2.1), (2.2) a (2.3)) by tedy Země byla od Slunce vzdálena cca $19 \cdot 70 \cdot 46\,000 / (2\pi)$ km, což není ani 10 milionů kilometrů. Měření vzdáleností ve Sluneční soustavě starými Řeky je popsáno podrobněji např. v [96].



2.4. Stanovení relativních vzdáleností vnitřních planet

Na počátku 16. století Mikuláš Koperník pomocí úhlových měření stanovil relativní vzdálenosti tehdy známých planet až po Saturn⁶ ve Sluneční soustavě. Na základě toho pak vyslovil tvrzení, že dráhy planet jsou kruhové a v jejich společném středu je Slunce [46]. Například zjistil (viz obr. 2.5), že poloměr dráhy Venuše je přibližně 72 % poloměru dráhy Země tím, že změřil maximální úhlovou vzdálenost Venuše od Slunce (viz [242], s. 39 a 44). Vzdálenosti a_1 a a_2 obou vnitřních planet, Merkuru a Venuše, byly odhadnuty pomocí vztahu

$$a_i = a_3 \sin \alpha_i,$$

kde α_i je největší elongace, tj. největší možná úhlová vzdálenost mezi Sluncem a planetou na nebeské sféře⁷ (viz obr. 2.5). Koperníkova metoda měření relativních vzdáleností vnějších planet od Slunce je popsána např. v [14], s. 265, nebo v překladech [46]. Je podobná Keplerově metodě z obr. 1.3. Kromě úhlů je třeba měřit i časy.



2.5. Podstatné zpřesnění odhadu vzdálenosti Země od Slunce

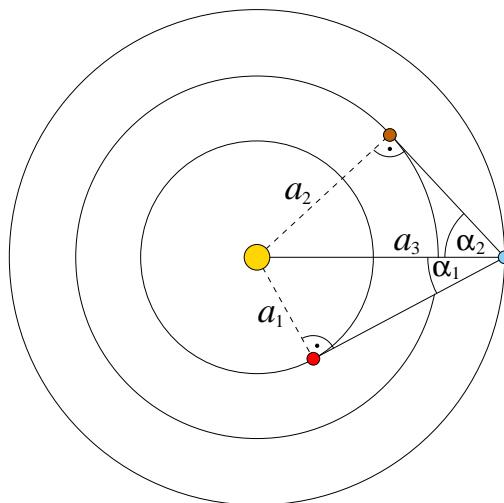
Přesnost odhadu vzdálenosti Země od Slunce dramaticky vzrostla v roce 1672, kdy G. D. Cassini⁸ měřil vzdálenost Marsu od Země pomocí úhloměrného přístroje. V Paříži (P) změřil polohu Marsu na nebeské sféře, když byl Mars nejbližší k Zemi, tj. v opozici se Sluncem (viz [107]). Ve stejný okamžik jeho kolega Jean Richer v Cayenne (C) ve Francouzské Guyaně rovněž měřil polohu Marsu (M) na nebeské sféře. Z odpovídajícího paralaktického úhlu⁹ $\angle CMP = 18''$ a ze známé vzdálenosti

⁶Uran objevil William Herschel teprve v roce 1781. Pomocí úhlových měření byly zjištěny nepravdivosti v jeho oběhu, na jejichž základě Johann Gottfried Galle v roce 1846 objevil poslední planetu Neptun (viz oddíl 4.2).

⁷Ve skutečnosti dráha Merkuru není kruhová, a tak maximální elongace kolísá mezi hodnotami 18° a 28° .

⁸Giovanni Domenico Cassini (1625–1712) objevil též mezeru v Saturnových prstencích.

⁹Úhel, o který se posune těleso oproti vzdálenému pozadí, je-li pozorováno ze dvou různých míst.



Obr. 2.5. Koperníkova metoda stanovení relativních vzdáleností vnitřních planet pro maximální elongaci Merkuru $\alpha_1 = 28^\circ$ a Venuše $\alpha_2 = 47^\circ$.

$d = 7280$ km mezi Paříží a Cayenne bylo pomocí sinové věty a standardních trigonometrických vzorců zjištěno, že Mars je 73 milionů km daleko od Země.¹⁰ Pak byl použit třetí Keplerův zákon

$$\frac{T_i^2}{T_j^2} = \frac{a_i^3}{a_j^3}, \quad i, j = 1, 2, 3, \dots, \quad (2.4)$$

kde T_i je oběžná doba i -té planety a a_i délka velké poloosy její eliptické dráhy. Pro Zemi a Mars platí $T_3 = 1$ rok a $T_4 = 1.88$ roku. Tedy

$$a_4 = 1.88^{2/3} a_3. \quad (2.5)$$

Druhá rovnice pro neznámé a_3 a a_4 plyne ze skutečnosti, že planetární dráhy jsou téměř kruhové, a z výše uvedeného úhlového měření, tj. $a_4 - a_3 = 73 \cdot 10^6$ km. Odtud a z (2.5) okamžitě dostáváme, že $a_3 \approx 140 \cdot 10^6$ km, což už je poměrně dobrá aproximace dnešní hodnoty $a_3 = 149.6 \cdot 10^6$ km.

Délku hlavní poloosy dráhy Země kolem Slunce si astronomové zvolili za základní délkovou míru a nazvali ji *astronomickou jednotkou*¹¹. Vzdálenosti a_i všech dalších známých planet pak byly spočteny pomocí třetího Keplerova zákona (2.4) a pozorovaných oběžných dob T_i .

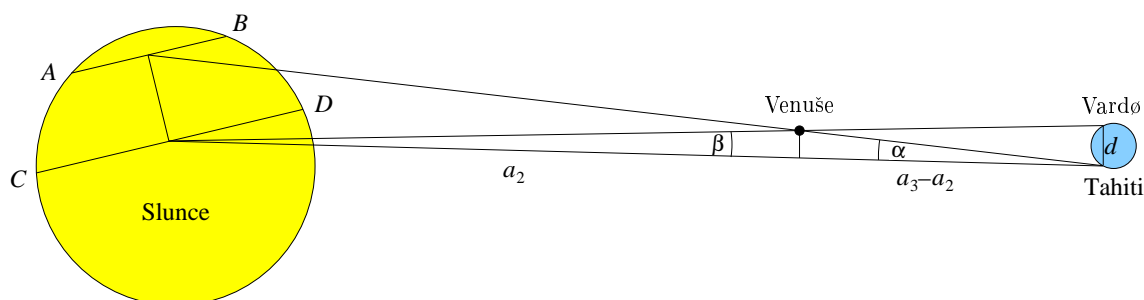


¹⁰Ve skutečnosti byl výsledek uveden ve francouzských mílech, 1 fr. míle je 1.949 km.

¹¹Dnes je astronomická jednotka definována takto: 1 au = 149 597 870 700 m. Je přibližně rovna současné střední vzdálenosti Země od Slunce.

2.6. Další kroky ke zpřesnění vzdálenosti Země od Slunce

Zajímavou geometrickou metodu (viz [81], [172]) ke zpřesnění hodnoty astronomické jednotky předložil známý astronom Edmond Halley (1656–1742). Napadlo jej využít přechodu Venuše přes sluneční disk, který je sledován ze dvou míst různé zeměpisné šířky. Halleyovu metodu použila až další generace astronomů¹² v roce 1769. Přechod Venuše přes sluneční disk pozorovalo podle [242], s. 133, více než 120 astronomů ze 60 stanic. Například jedna skupina, vedená Maximilianem Hellem, byla na ostrově Vardø v dnešním Norsku a jiná skupina, vedená kapitánem Jamesem Cookem a Charlesem Greenem, cestovala na Tahiti (viz [14], s. 267). Na obr. 2.6 vidíme schematický náčrt trajektorií AB a CD Venuše pozorovaných z těchto dvou míst. Změřená úhlová vzdálenost mezi AB a CD byla přibližně $\alpha = 40''$. Ke zpřesnění paralaktického úhlu α byl také měřen čas tranzitů. Poznamenejme, že úhlový průměr Slunce $32'$ je téměř padesátkrát větší než α .



Obr. 2.6. Schematické znázornění dvou odlišných trajektorií AB a CD při přechodu Venuše přes sluneční disk, který byl pozorován z Vardø a Tahiti v roce 1769. Skutečná úhlová vzdálenost mezi AB a CD byla mnohem menší než na obrázku.

Protože $T_2 = 0.615$ roku, dostaneme ze vztahu (2.4), že $a_2 = 0.723 a_3$. Z obr. 2.6 navíc vidíme, že $a_2 \tan \beta = (a_3 - a_2) \tan \alpha$. Pro jednoduchost předpokládejme, že přímka Země–Slunce byla kolmá k úsečce Vardø–Tahiti v jistém okamžiku přechodu. Pak dostaneme

$$a_3 \approx \frac{d}{\tan \beta} = \frac{a_2}{a_3 - a_2} \cdot \frac{d}{\tan \alpha} = \frac{0.723 d}{(1 - 0.723) \tan \alpha},$$

kde $d = 11\,425$ km je vzdálenost mezi Vardø a Tahiti. Tímto způsobem byla zpřesněna vzdálenost a_3 mezi Zemí a Sluncem na hodnotu $153 \cdot 10^6$ km.

V současnosti existuje množství různých vylepšení popsané metody (viz [242]), která uvažují pohyb Země během přechodu Venuše přes sluneční disk i další okolnosti.



¹²Též v r. 1761. První známá předpověď přechodu Venuše přes sluneční disk pochází již od J. Keplera [271]. Tento velice řídký úkaz nastává jen několikrát za tisíciletí, protože sklon dráhy Venuše k ekliptice $i = 3.4^\circ$ je poměrně velký. Poslední dva tranzity nastaly 8. června 2004 a 6. června 2012 (viz obr. 6.1).

2.7. Zpomalování rotace Země

Během posledních 2 700 let se úhlová rychlost rotace Země zpomalovala v důsledku slapových sil tak, že délka dne narůstala průměrně o $1.7 \cdot 10^{-3}$ s za století (viz [239], s. 270). Tato hodnota byla získána důkladnou analýzou záznamů starých Babylóňanů o úhlových výškách Slunce při pozorovaných slunečních zatměních. Pro ilustraci se omezíme jen na příklad zaznamenaný na hliněné destičce starých Babylóňanů, která obsahuje záznam o úplném slunečním zatmění ze dne 15. dubna roku 136 př. n. l. a je uchována v Britském muzeu (viz [261], s. 340; [264]).

V té době byl den zhruba o 0.036 312 sekundy (≈ 21.36 stol. $\times 1.7$ ms/stol.) kratší než v roce 2000. Od té doby uplynulo přibližně $N = 780\,000$ dnů, během nichž došlo ke kumulování drobných odchylek ve zpomalování rotace Země. Proto je nyní její rotace opožděna zhruba o 4 hodiny, než kdyby Země rotovala zcela rovnoměrně (viz obr. 2.7). To odpovídá úhlu $60^\circ (= 360^\circ \cdot 4/24)$. Ukažme si nyní podrobně, jak lze tyto číselné údaje odvodit.



Obr. 2.7. Vpravo je poloha pásu totality při zatmění Slunce pozorovaném starými Babylóňany a vlevo je vypočítaná poloha pásu, kdyby se rotace Země nezpomalovala.

Kdyby byla zemská rotace neměnná, pak by babylónští astronomové nemohli pozorovat úplné zatmění v místě, kde jej popisují, ale o čtyři časová pásma dále na západ od Babylónu, kde bylo o 4 hodiny méně. Jejich tehdejší lokální čas 8 h 45 min můžeme nyní poměrně přesně stanovit z výšky Slunce nad obzorem, kterou Babylóňané při zatmění měřili úhломěrným přístrojem a pečlivě ji zaznamenávali. Z posunu $\Delta T = 4$ hodiny a známého počtu dní N můžeme zpětně vypočítat odpovídající velikost zpoždění rotace Země.

Předpokládejme pro jednoduchost, že délka každého dne narůstala lineárně o nepatrnou hodnotu Δt , tj. n -tý den je o $n\Delta t$ delší než den, kdy nastalo zatmění odpoví-

vídající $n = 0$. Pro celkové zpoždění ΔT pomocí trojúhelníkových čísel [158], s. 243, dostaneme

$$\Delta T = \Delta t(1 + 2 + \dots + N) = \Delta t \frac{N(N+1)}{2} = 4 \cdot 3600 \text{ s.}$$

Dosadíme-li za N celkový počet dní, obdržíme $\Delta t = 4.734 \cdot 10^{-8} \text{ s}$. Za jeden rok se pak den prodlouží v průměru o

$$\tau = 365.25 \cdot \Delta t = 1.7 \cdot 10^{-5} \text{ s.} \quad (2.6)$$

Tato hodnota je v souladu s naměřenými daty družice Lageos (viz [47] a [295]). Dnešní přesná rádiová měření zpoždování rotace Země pomocí vzdálených kvasarů také potvrzují (viz [279]) průměrnou hodnotu (2.6).

Zpoždění rotace Země je dáno rozdílem mezi terestrickým časem, který je odvozen od chodu nejpřesnějších atomových hodin světa, a světovým (greenwichským) časem definovaným rotací Země. Poznamenejme ještě, že pomocí úhломěrných přístrojů byla též objevena a změřena precese i nutace zemské osy.



2.8. Paralaxa nejbližších hvězd

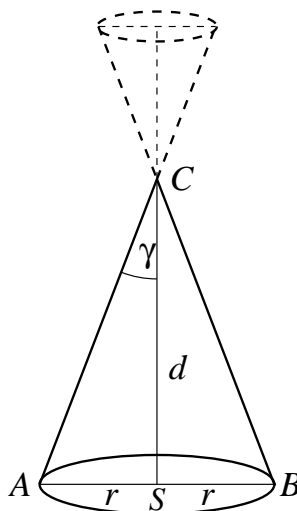
Oběh Země kolem Slunce způsobuje, že blízké hvězdy zdánlivě opisují na nebeské sféře elipsy velice malých úhlových rozměrů, které nazýváme *paralaktické elipsy*. Jejich hlavní poloosy jsou tím větší, čím je hvězda blíže. Umožňují nám zjistit vzdálenost příslušné hvězdy. Velikost hlavní poloosy paralaktické elipsy je v úhlové míře rovna tzv. roční paralaxe. Její definici nyní uvedeme.

Nechť C označuje nějakou blízkou hvězdu. Pro jednoduchost předpokládejme, že dráha Země je kruhová s poloměrem r a středem S (Slunce). Na této dráze pak existují dva protilehlé body A a B ležící v rovině procházející středem S , která je kolmá na přímkou CS . Trojúhelník ABC je proto rovnoramenný se základnou AB (viz obr. 2.8). Vzdálenost bodu C od AB je dána vztahem

$$d = \frac{r}{\operatorname{tg} \gamma},$$

kde γ je polovina úhlu ACB a nazývá se *roční paralaxa*. Jinými slovy, γ je úhel, pod jakým by hypotetický pozorovatel v bodě C viděl poloměr r zemské dráhy.

Roční paralaxy několika blízkých hvězd poprvé změřil F.W. Bessel v roce 1838 (viz [269]). V současnosti víme, že nám nejbližší hvězda (nepočítáme-li Slunce) je Proxima Centauri. Její roční paralaxa činí $0.76''$, což odpovídá vzdálenosti kolem $d = 4 \cdot 10^{13} \text{ km} \approx 4.22$ světelného roku.



Obr. 2.8. Vzdálenost d blízké hvězdy umístěné v bodě C lze určit z roční paralaxy γ a z poloměru r zemské dráhy. Úsečka AB je rovnoběžná s hlavní poloosou paralaktické elipsy (na obrázku čárkovaně).

Nalezení paralaktických elips byl důležitý důkaz oběhu Země kolem Slunce. Hledat tyto elipsy se pokoušel už Tycho Brahe, když se snažil rozhodnout, zda je správný Ptolemaiov nebo Koperníkův model Sluneční soustavy. Paralaktické elipsy však nenašel, protože neměl možnost změřit tak malé úhly tehdejšími přístroji. Astrometrická družice Hipparcos nedávno změřila paralaxy (a tím i vzdálenosti) více než 100 000 hvězd v naší Galaxii s téměř neuvěřitelnou přesností $0.001''$. Další družice Gaia vypuštěná koncem roku 2013 změří paralaxy miliard hvězd.



2.9. Změření rychlosti světla

Aberací světla obecně rozumíme zdánlivou změnu polohy nějakého nebeského tělesa způsobenou pohybem pozorovatele a konečnou rychlostí světla. Hvězdy sledované kolmo¹³ ke směru pohybu pozorovatele o rychlosti v se zdají být vychýleny o *aberační úhel* α (viz [228]), pro nějž platí

$$\operatorname{tg} \alpha \approx \frac{v}{c},$$

kde c je rychlost světla ve vakuu. Kolem roku 1727 James Bradley objevil tzv. roční aberaci. V důsledku oběhu Země kolem Slunce hvězdy na nebeské sféře opisují

¹³V obecném případě platí $\operatorname{tg} \alpha \approx (v \sin \beta)/c$, kde β je úhel mezi směrem pohybu a směrem k pozorované hvězdě.

zdánlivé elipsy (*aberační elipsy*), jejichž hlavní poloosy mají délku $\alpha \approx 20''$ a nezávisí na vzdálenosti hvězdy. Tento jev je řádově větší efekt než paralaxa z oddílu 2.8. Pomohl výrazně zpřesnit hodnotu rychlosti světla¹⁴ a přispěl k potvrzení heliocentrické soustavy. Pro průměrnou rychlost Země

$$v = \frac{2\pi r}{T} = 29.8 \text{ km/s}, \quad (2.7)$$

kde $r = 149\,597\,871 \text{ km}$ a

$$T = 31\,558\,149.5 \text{ s} \quad (2.8)$$

je siderický rok¹⁵, vychází $c \approx 300\,000 \text{ km/s}$. Úhel α je velice malý, a proto je v obloukové míře téměř roven své tangente (s relativní chybou menší než 10^{-8}). Budeme tedy psát jen

$$\alpha = \frac{v}{c}. \quad (2.9)$$

Obrovská gravitační síla mezi Sluncem a Zemí (cca $354 \cdot 10^{20} \text{ N}$) způsobuje, že se dráha Země zakřivuje a směr jejího pohybu kolem Slunce se každý den změní zhruba o 1° ($\approx 360^\circ/365.25 \text{ dne}$). Fotony slunečního záření putují ze Slunce na Zemi přibližně 8.3 minuty. Během tohoto časového intervalu se ale Slunce přemístí vzhledem ke hvězdám o úhel

$$\alpha' \approx \frac{8.3}{60 \cdot 24 \cdot 365.25} 360^\circ \approx 20''. \quad (2.10)$$

Slunce tedy nevidíme v jeho skutečné poloze, ale posunuté o $\alpha' \approx 20''$ (srov. obr. 6.3). To, že se tento úhel pro kruhovou dráhu shoduje s výše uvedeným aberačním úhlem α , není náhoda, ale plyne z (2.10), (2.7) a (2.9). V čitateli vztahu (2.10) je totiž r/c , ve jmenovateli je T a 360° je v obloukové míře 2π . Odtud vidíme, že

$$\alpha' = \frac{2\pi r}{cT} = \frac{v}{c} = \alpha.$$



¹⁴Již v roce 1676 dánský astronom Olaf Rømer (1644–1710) navrhl jinou elegantní metodu změření rychlosti světla, kterou později realizoval Christian Huygens. Když se Země přibližovala k Jupiteru, východy měsíčku Io se předcházely vůči pozemským hodinám. Při vzdalování Země od Jupiteru se zase opožďovaly. Rømer tak vlastně objevil jev, který byl později pojmenován po Christianu Dopplerovi. Oběžná doba Io je 1.769 dne, což odpovídá extrémně nízké frekvenci. Drobné odchylky ve změně frekvence se ale naakumulovaly tak, že když byl Jupiter v opozici se Sluncem, dorazil světelný paprsek od Io o 22 minut dříve, než když byl v konjunkci. Na základě těchto pozorování a ze znalosti průměru zemské dráhy pak Huygens odhadl, že rychlost světla je přibližně $c \approx 2 \cdot 150\,000\,000 / (22 \cdot 60) = 227\,000 \text{ km/s}$.

¹⁵*Siderický (hvězdný) rok* (365.25636 dne) je doba, za kterou Země urazí kolem Slunce 360° . V důsledku precese zemské osy je *kalendářní rok* (365.2425 dne) kratší.

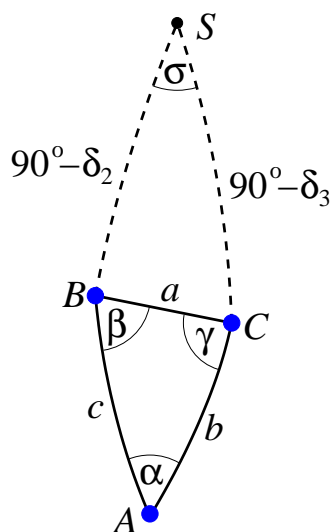
2.10. Sférická trigonometrie

Při řešení úloh z nebeské mechaniky je třeba mít na paměti, že občas nelze používat běžné vztahy z klasické Eukleidovy geometrie. Například v rovině je součet velikostí úhlů v trojúhelníku 180° . Na nebeské sféře ale platí Riemannova sférická geometrie, v níž je součet úhlů α, β a γ v trojúhelníku větší než 180° , tj.

$$\alpha + \beta + \gamma > 180^\circ. \quad (2.11)$$

Ukažme si to na konkrétním příkladu.

Letní večerní obloze dominuje nad jižním obzorem tzv. *Letní trojúhelník* tvořený hvězdami: *Altair* (A) ze souhvězdí Orla, *Deneb* (B) z Labutě a *Vega* (C) ze souhvězdí Lvy (viz obr. 2.9 a [136]). Francouzi nazývají tuto nápadnou trojici *Tři letní krásavice*. Úhlové délky protilehlých stran Letního trojúhelníka označme postupně a, b a c . Odpovídají nejkratším spojnicím (*geodetikám*) uvažovaných hvězd na nebeské sféře, tj. částem hlavních kružnic.



Obr. 2.9. Letní trojúhelník: A označuje Altair, B Deneb a C Venu. Čárkovaně jsou znázorněny poledníky a S severní pól nebeské sféry.

Polohy nebeských objektů se obvykle definují pomocí souřadnic rektascenze a deklinace. *Rektascenze* je hodinový úhel mezi rovinou procházející oběma póly a uvažovaným objektem a rovinou procházející oběma póly a jarním bodem¹⁶ (přitom $24 \text{ h} \cong 360^\circ$). *Deklinace* je úhlová vzdálenost objektu od roviny procházející nebeským rovníkem. Hodnoty rektascenze a deklinace hvězd Letního trojúhelníku jsou tyto:

¹⁶ *Jarní a podzimní bod* jsou průsečíky nebeského rovníku s ekliptikou.

Altair	$r_1 = 19 \text{ h } 50 \text{ min } 47 \text{ s}, \quad \delta_1 = 8^\circ 52',$
Deneb	$r_2 = 20 \text{ h } 41 \text{ min } 26 \text{ s}, \quad \delta_2 = 45^\circ 16',$
Vega	$r_3 = 18 \text{ h } 36 \text{ min } 56 \text{ s}, \quad \delta_3 = 38^\circ 47'.$

Úhlová vzdálenost dvou objektů na nebeské sféře se obvykle vyjadřuje ve stupních. Ze známých hodnot r_i a δ_i můžeme určit např. úhlovou délku strany a odpovídající oblouku Deneb–Vega následujícím způsobem. Na obr. 2.9 jsou čárkovane vyznačeny dva poledníky, které se protínají v severním pólu S nebeské sféry. Úhel $\sigma = \angle BSC$ mezi nimi je zřejmě roven rozdílu rektascenzí

$$\sigma \cong r_2 - r_3 = 2 \text{ h } 4 \text{ min } 30 \text{ s} \cong 31.125^\circ. \quad (2.12)$$

Protože Vega má deklinaci δ_3 , je délka oblouku CS rovna $90^\circ - \delta_3$. Podobnou úvahu můžeme udělat i pro oblouk BS . Pak pomocí kosinové věty pro úhlovou délku strany a sférického trojúhelníka BSC dostaneme (viz [220], s. 86)

$$\begin{aligned} \cos a &= \cos(90^\circ - \delta_2) \cos(90^\circ - \delta_3) + \sin(90^\circ - \delta_2) \sin(90^\circ - \delta_3) \cos \sigma \\ &= \sin \delta_2 \sin \delta_3 + \cos \delta_2 \cos \delta_3 \cos \sigma = 0.91462447. \end{aligned}$$

Úhlová délka oblouku Deneb–Vega je tedy

$$a = 23.848^\circ.$$

Zcela analogicky odvodíme, že oblouky Altair–Vega a Altair–Deneb mají úhlové délky $b = 34.197^\circ$ a $c = 38.003^\circ$. Odtud opět pomocí kosinové věty pro stranu sférického trojúhelníka ABC

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha \quad (2.13)$$

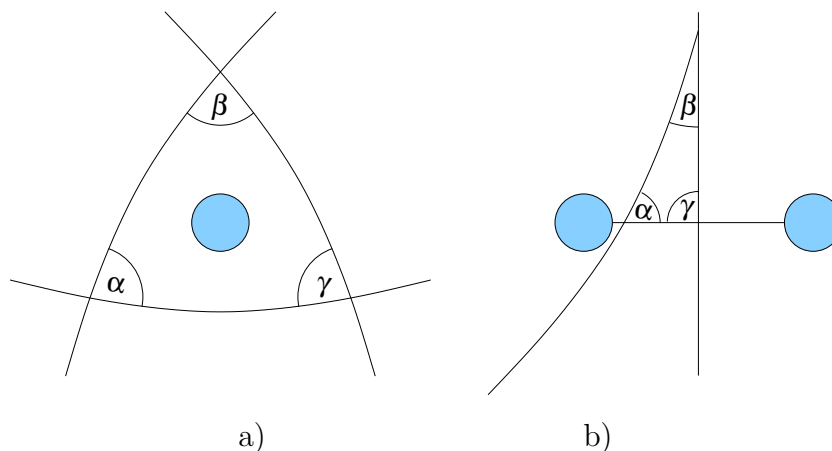
dostaneme u hvězdy Altair úhel $\alpha = 40.566^\circ$. Podobně zjistíme úhel $\beta = 64.695^\circ$ u hvězdy Deneb a úhel $\gamma = 82.036^\circ$ u Vegy. Vidíme, že pro součet úhlů v Letním trojúhelníku $\alpha + \beta + \gamma = 187.297^\circ$ platí (2.11).

Protože používáme Riemannovu sférickou geometrii, může mít trojúhelník i dva (popř. tři) pravé úhly. Například severní pól S , v jehož blízkosti se nalézá Polárka, tvoří se dvěma dalšími hvězdami na nebeském rovníku takový trojúhelník.



2.11. Ohyb světelných paprsků v gravitačním poli

V roce 1911 A. Einstein odvodil ve své průkopnické práci [58], že se světelné paprsky v gravitačním poli hmotného tělesa nepohybují po přímkách, ale zakřivují svou dráhu [293], s. 26. Tento překvapivý jev byl vyfotografován během úplného



Obr. 2.10. Zakřivené trajektorie světla v blízkosti hmotných objektů ukazují, že geometrie vesmíru může být lokálně a) Riemannova i b) Lobačevského.

slunečního zatmění v roce 1919, kdy se světelné paprsky hvězd v blízkosti slunečního disku odklonily od svého původního směru. Porovnáním tohoto snímku se snímek stejné části noční oblohy byl zjištěn dobrý soulad s hodnotou $1.75''$ předpovězenou Einsteinem. Úhlová měření tak vlastně pomohla při ověřování platnosti Einsteinovy obecné teorie relativity a přispěla i k vysvětlení principu gravitačních čoček.

Každý hmotný objekt tak způsobuje lokální zakřivení prostoročasu. Světlo se v něm pohybuje po nejkratších spojnících, tzv. geodetikách. Na obr. 2.10 vidíme dva příklady ohybu světla v blízkém okolí hvězd. Tři trajektorie světla na obr. 2.10a) tvoří křivočarý trojúhelník. Povšimněme si, že součet jeho úhlů splňuje nerovnost $\alpha + \beta + \gamma > 180^\circ$, která odpovídá vztahu (2.11) Riemannovy eliptické geometrie. Naopak na obr. 2.10b) jsou dvě hvězdy o stejné hmotnosti a tři trajektorie, které tvoří jiný křivočarý trojúhelník se součtem úhlů

$$\alpha + \beta + \gamma < 180^\circ,$$

což zase připomíná Lobačevského hyperbolickou geometrii.

Předchozí dva příklady ilustrují, že vesmír lze lokálně popsat odlišnými typy geometrií s různými křivostmi. Abychom ale našli globální křivost vesmíru (viz kapitola 18) pro pevný čas, je třeba uvažovat hodně velké škály, na nichž jsou veškeré lokální křivosti zprůměrovány. Představme si například zemský povrch, jehož globální (zprůměrovaná) křivost je kladná a téměř konstantní v libovolném bodě a libovolném tečném směru, ale jehož lokální křivost se značně mění, protože jsou zde hory, údolí, sedlové body aj. Podle Einsteinova kosmologického principu je vesmír pro pevný časový okamžik ve velice velkých škálách homogenní a izotropní, tj. jeho křivost je konstantní v libovolném bodu a libovolném směru. Tuto domněnku neustále prověřují

astronomové. Svědčí pro ni např. homogenita a izotropie reliktního záření¹⁷. Rovněž známé γ záblesky vykazují poměrně rovnoměrné rozložení na nebeské sféře. Na druhé straně je známo, že vesmír je na škálách cca 100 milionů světelných let tvořen velkorozměrovými strukturami ve formě obřích stěn a dlouhých vláken¹⁸. Porovnává se proto hustota galaxií stejně vzdálených oblastí vesmíru z odlišných částí oblohy. Globální křivost vesmíru podstatně závisí i na tzv. temné nebaryonové hmotě, jejíž rozložení je předmětem intenzivního studia (viz kapitola 7–9). Pokud se prokáže, že Einsteinův kosmologický princip platí na hodně velkých škálách, dostaneme značně omezující podmínky na globální topologii vesmíru.

V roce 1844 Bessel pomocí úhlových měření zjistil, že dráhu nejjasnější hvězdy noční oblohy — Siria (α CMa) ovlivňuje jakýsi neviditelný průvodce. Až po Besselově smrti jej zpozoroval A. G. Clark a bylo vypočteno, že nově objevené těleso má přibližně hmotnost Slunce. Tehdy ale nikoho nepřekvapilo, že jeho absolutní svítivost je asi o pět řádů nižší. V roce 1914 W. Adams prokázal, že Sirius B, jak bylo těleso nazváno, je bílý trpaslík s neuvěřitelnou hustotou několika set kilogramů na krychlový centimetr (viz oddíl 4.2). Přesná úhlová měření tak vlastně pomohla k objevu prvního bílého trpaslíka. V roce 1924 u něj navíc Adams zjistil červený gravitační posuv¹⁹ spektrálních čar, který předpověděl A. Einstein u všech hmotných objektů.

Úhloměrné přístroje sehrály důležitou roli i u dalších efektů Einsteinovy obecné teorie relativity, např. při určení stáčení perihelia Merkuru nebo při stáčení osy gyroskopu pohybujícího se v zakřiveném prostoročasu (viz [161]). V kapitole 20 uvádíme, jak interpretovat měření úhlů, jež zdánlivě vedou k pozorování nadsvětelných rychlostí ve vzdáleném vesmíru (srov. též [125] a [186]). V kapitole 4 ukazujeme, jak lze pomocí úhlových měření zjistit hmotnost černé díry uprostřed naší Galaxie (viz též [121]). Úhlová měření tak podstatným způsobem přispěla k utváření moderního pohledu na vesmír.



¹⁷Toto záření vykazuje jen nepatrné fluktuace velikosti řádově 10^{-4} K od své průměrné teploty 2.725 K.

¹⁸Například bylo objeveno vlákno mnoha tisíců galaxií o délce 1.37 miliardy světelných let, tzv. Velká Sloanova zeď.

¹⁹*Červený (rudý) posuv* z je definován vztahem $z = (\lambda - \lambda_0)/\lambda_0$, kde λ_0 označuje vlnovou délku spektrální čáry určitého atomu či molekuly v pozemské laboratoři a λ je odpovídající změřená délka ze sledovaného objektu. Není těžké se přesvědčit, že z je definováno nezávisle na zvolené spektrální čáře. Např. čára H_α odpovídá přeskoku elektronu ze třetí na druhou hladinu atomu vodíku, kdy vzniká foton o vlnové délce $\lambda_0 = 656.3$ nm.

3. O Keplerově rovnici

*Nikdy nevyhlídím rozkoš,
jakou jsem při tomto objevu zažil.*

JOHANNES KEPLER

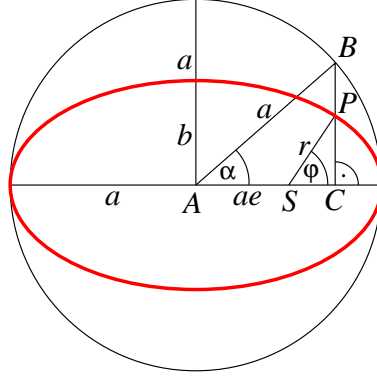
(Mysterium cosmographicum)

3.1. Pravá a excentrická anomálie

Keplerova rovnice je jedním z nejúžasnějších Keplerových matematických výsledků. Názorně dokládá jeho obrovskou genialitu. Podle 1. Keplerova zákona jsou dráhy planet eliptické a Slunce se nachází v jednom ze dvou ohnisek. Planeta se obecně nepohybuje po své dráze rovnoměrně, a proto je důležité umět určit její polohu v daném časovém okamžiku v rovině eliptické dráhy. A právě k tomu slouží Keplerova rovnice. Okamžitou polohu na elipse lze popsat pomocí úhlu zvaného excentrická anomálie. Ve třetím oddílu odvodíme Keplerovu rovnici, která svazuje excentrickou anomálii s rovnoměrně plynoucím časem, viz též [15], s. 304.



Obr. 3.1. Johannes Kepler (1571–1630)



Obr. 3.2. Slunce S je v ohnisku elipsy, po níž se pohybuje planeta P . Excentrickou anomálii α lze určit z Keplerovy rovnice (3.6) a pravou anomálii φ pak z rovnice (3.5).

Je-li $a \geq b$ délka hlavní, resp. vedlejší poloosy eliptické dráhy planety, pak pro její výstřednost platí

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}. \quad (3.1)$$

Uvažujme kružnici o poloměru a a stejném středu, jako má elipsa. Dále označme $r > 0$ heliocentrickou vzdálenost planety P od Slunce S , body A, B, C a úhly α a φ tak, jak je nakresleno na obr. 3.2. Pak vidíme, že $|AS| = ae$ a

$$a \cos \alpha = |AC| = ae + r \cos \varphi, \quad (3.2)$$

$$\frac{r \sin \varphi}{a \sin \alpha} = \frac{|PC|}{|BC|} = \frac{b}{a},$$

kde úhel α se nazývá *excentrická anomálie* a úhel φ *pravá anomálie*. Z obou rovnic po úpravě pomocí (3.1) dostaneme

$$\begin{aligned} r^2 \cos^2 \varphi &= a^2 \cos^2 \alpha - 2a^2 e \cos \alpha + a^2 e^2, \\ r^2 \sin^2 \varphi &= b^2 \sin^2 \alpha = a^2(1 - e^2) \sin^2 \alpha. \end{aligned}$$

Jestliže tyto rovnice sečteme, obdržíme $r^2 = a^2 - 2a^2 e \cos \alpha + a^2 e^2 \cos^2 \alpha$. Odtud plyne vyjádření vzdálenosti r pomocí excentrické anomálie α ,

$$r = a(1 - e \cos \alpha). \quad (3.3)$$



3.2. Vztah mezi pravou a excentrickou anomálií

Pokusme se nyní vyjádřit pravou anomálii φ pomocí α . Dosadíme-li do (3.3) za $\cos \alpha$ ze vztahu (3.2), vidíme, že $r = a - e(ae + r \cos \varphi)$, tj.

$$\frac{r}{a}(1 + e \cos \varphi) = 1 - e^2. \quad (3.4)$$

Takto se někdy vyjadřuje první Keplerův zákon v polárních souřadnicích (r, φ) . Z (3.2) po vydělení a a z (3.4) tak získáme

$$\cos \alpha = e + \frac{1 - e^2}{1 + e \cos \varphi} \cos \varphi = \frac{e + \cos \varphi}{1 + e \cos \varphi}.$$

Odtud dosazením do vztahu pro tangens polovičního úhlu máme

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} &= \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 - \frac{e + \cos \varphi}{1 + e \cos \varphi}}{1 + \frac{e + \cos \varphi}{1 + e \cos \varphi}} = \frac{1 + e \cos \varphi - e - \cos \varphi}{1 + e \cos \varphi + e + \cos \varphi} \\ &= \frac{1 - e}{1 + e} \cdot \frac{1 - \cos \varphi}{1 + \cos \varphi} = \frac{1 - e}{1 + e} \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}. \end{aligned}$$

A tak dostáváme hledané vyjádření pravé anomálie pomocí anomálie excentrické

$$\varphi = 2 \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{1 + e}{1 - e}} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right). \quad (3.5)$$



3.3. Keplerova rovnice pro excentrickou anomálii

Nyní stanovíme rovnici pro výpočet α . Nechť $t = 0$ je čas průchodu planety periheliem a T je její oběžná doba. Podle druhého Keplerova zákona je plošná rychlost planety konstantní a je rovna $\pi ab/T$ (viz obr. 1.5 a [121]). Za časový interval $\langle 0, t \rangle \subset \langle 0, T \rangle$ opíše průvodič SP plochu o obsahu $\pi abt/T$. Jestliže elipsu lineárně roztáhneme na kružnici ve směru svislé osy, pak za stejný časový interval opíše úsečka SB plochu o obsahu $\pi a^2 t/T$ (tj. $\frac{a}{b}$ -krát větší) a úsečka AB plochu o obsahu $\pi a^2 \alpha(t)/(2\pi)$. Jejich rozdíl je roven obsahu trojúhelníka ASB (viz obr. 3.2),

$$\frac{a^2 \alpha(t)}{2} - \frac{\pi a^2 \pi t}{T} = \frac{ae}{2} a \sin \alpha(t),$$

kde $\alpha(t)$ vyjadřuje skutečnost, že úhel α závisí na čase t . Po vydělení číslem $-a^2/2$ již dostaneme *Keplerovu rovnici* nebo též *Keplerovu časovou rovnici* pro excentrickou anomálii

$$\frac{2\pi}{T}t = \alpha(t) - e \sin \alpha(t). \quad (3.6)$$

Levá strana $M(t) = 2\pi t/T$ se nazývá *střední anomálie*, protože je lineární funkcí času.

Pro zadaný časový okamžik t tak můžeme z Keplerovy rovnice (3.6) stanovit úhel $\alpha = \alpha(t)$ pomocí vhodné iterační metody [280] (metody postupných aproximací, Newtonovy metody apod.). V (transcendentní) rovnici (3.6) lze také aproximovat sinus pomocí Taylorova rozvoje polynomem, a pak řešit jen algebraickou rovnici, např. $M(t) = \alpha - e\alpha + e\alpha^3/3! - e\alpha^5/5!$. Z rovnice (3.3) potom určíme vzdálenost $r(t)$ a z (3.5) vypočteme $\varphi(t)$. Tím je poloha planety jednoznačně určena.

Ke Keplerově rovnici (3.6) lze dospět i pomocí integrálního počtu. Pro úhel $\varphi(t) \in \langle 0, 2\pi \rangle$ v čase t dostaneme rovnost obsahů ploch (srov. též [15], s. 304)

$$\frac{\pi ab}{T}t = \frac{1}{2} \int_0^{\varphi(t)} r^2(\varphi) d\varphi, \quad (3.7)$$

kde $r(\varphi)$ opět vyjadřuje skutečnost, že vzdálenost r závisí na úhlu φ . Tento integrál lze vypočítat pomocí substituce (3.5), pro niž lze derivováním odvodit, že

$$d\varphi = \frac{\sqrt{1-e^2}}{1-e\cos\alpha} d\alpha = \frac{b}{a(1-e\cos\alpha)} d\alpha. \quad (3.8)$$

Ze vztahů (3.7), (3.3) a (3.8) pak dostaneme

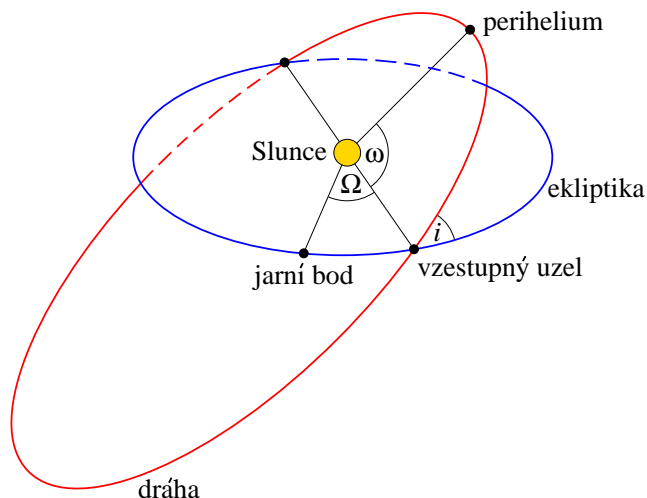
$$\frac{2\pi}{T}t = \frac{1}{ab} \int_0^{\alpha(t)} a^2(1-e\cos\alpha)^2 \frac{b}{a(1-e\cos\alpha)} d\alpha = \int_0^{\alpha(t)} (1-e\cos\alpha) d\alpha.$$

Odtud již plyne Keplerova rovnice (3.6).



3.4. Keplerovské parametry

Uvažujme opět eliptickou dráhu s hlavní poloosou a a excentricitou e . K popisu pohybu tělesa po dráze mimo rovinu ekliptiky se přidávají ještě další 4 elementy dráhy. *Sklon dráhy* k ekliptice i (tzv. *inklinace*) a *délka vzestupného uzlu* Ω určují rovinu dráhy. *Argument perihelia* ω (viz obr. 3.3) udává orientaci eliptické dráhy v trojrozměrném prostoru. Pětici keplerovských parametrů $(a, e, i, \Omega, \omega)$ je pro jednoznačné určení polohy tělesa třeba doplnit ještě šestým parametrem. Tím může být



Obr. 3.3. Elementy eliptické dráhy, které určují její orientaci v prostoru, jsou inklinace i , délka vzestupného uzlu Ω a argument perihelia ω .

bud' okamžik průchodu tělesa periheliem (argument šířky perihelia), nebo střední anomálie, viz (3.6). Více podrobností o těchto šesti elementech dráhy (tzv. efemeridách) je např. v [5], [15], [108] a [215].

Dodnes obdivujeme, jak Kepler odvodil rovnici (3.6) bez znalosti integrálního počtu. Musel mít obrovskou geometrickou představivost i fyzikální intuici. K dispozici měl jen velké množství dat o polohách planet viděných ze Země, která se pohybuje. O to to měl složitější. Kepler se také zabýval výpočtem délky eliptické dráhy. V roce 1609 dokázal zaručený dolní odhad pomocí geometrického průměru

$$2\pi\sqrt{ab} \leq L(a, b),$$

kde $L(a, b)$ je *obvod elipsy* s poloosami a a b . Později Leonhard Euler představil dvojstranný odhad¹

$$\pi(a + b) \leq L(a, b) \leq \pi\sqrt{2(a^2 + b^2)}. \quad (3.9)$$

Pro $a \neq b$ bohužel nelze určit obvod elipsy přesně. Je ale známo vyjádření pocházející od Colina MacLaurina ve tvaru nekonečné řady

$$\begin{aligned} L(a, b) &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 s + b^2 \cos^2 s} \, ds \\ &= 2\pi a \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 e^2 - \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \frac{e^4}{3} - \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \frac{e^6}{5} - \dots \right]. \end{aligned}$$

⊙ ⊙ ⊙

¹První dvojstranný odhad odvodil Archimedes (287–212 př. n. l.) pro číslo π tak, že jednotkovému kruhu opisoval a vepisoval pravidelné mnohoúhelníky.

4. Gravitační zákon — objev tisíciletí

*Tisícům lidí spadlo jablko na hlavu,
ale jen jeden se dovtípil proč.*

Parafrázoval KAREL LEPKA

4.1. Newtonovy věty

Newtonův gravitační zákon sehrál naprosto zásadní roli při rozvoji fyziky. Významně přispěl k pochopení struktury a vývoje vesmíru. Lze jej bez nadsázky označit jako objev minulého tisíciletí, jak bude ostatně patrné i z následujících odstavců. Poprvé ho formuloval sir Isaac Newton (viz obr. 4.1) ve svých *Principiích* z roku 1687. Přitom se inspiroval zejména 3. Keplerovým zákonem.



Obr. 4.1. Sir Isaac Newton (1643–1727) ukázal, že Keplerovy zákony jsou jen důsledkem gravitačního zákona.

Podle Newtonova gravitačního zákona je velikost gravitační síly mezi dvěma hmotnými body rovna

$$F = G \frac{mM}{r^2}. \quad (4.1)$$

Zde m a M jsou jejich hmotnosti, r je jejich vzdálenost a

$$G = 6.674 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2} \quad (4.2)$$

je *gravitační konstanta*.

V některých učebnicích se nesprávně píše, že F v (4.1) je velikost gravitační síly mezi dvěma tělesy. Přitom se čtenář nedozví, jak se přesně definuje jejich vzdálenost. Co je např. vzdálenost r pro homogenní hmotný prstenec a hmotný bod v jeho středu?

1. Kdyby vzdálenost r byla rovna poloměru prstence, správnou odpověď podle (4.1) nedostaneme. Celková výsledná síla i její velikost je totiž nulová.
2. Pro $F = 0$ podle (4.1) ale vychází $r = \infty$, což jistě nemá se skutečností nic společného.
3. Kdyby r byla vzdálenost těžišť obou těles, pak bychom dostali $F = \infty$, protože ve jmenovateli (4.1) se dělí $r = 0$. Opět se tak dostáváme do problémů.

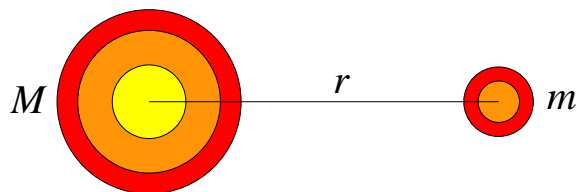
Vidíme tedy, že mechanické používání gravitačního zákona může vést k nepředpokládaným paradoxům (viz též poznámka 4.1 níže). Proto se v dalších matematických vztazích a modelech budeme často omezovat jen na idealizované hmotné body, které vlastně v reálném světě neexistují. Vztah (4.1) ale zůstane nezměněn, pokud místo hmotných bodů budeme uvažovat koule se speciálním rozložením hustoty.

Věta 4.1 (první Newtonova věta). *Je-li rozložení hustoty koule o hmotnosti M sféricky symetrické, pak koule působí na hmotný bod o hmotnosti m a ležící mimo vnitřek koule silou o velikosti (4.1), kde r je vzdálenost hmotného bodu od středu koule.*

Důkaz se opírá o specifický tvar gravitačního potenciálu hmoty rovnoměrně rozložené na kulové ploše. Výsledný vztah (4.1) se pak získá integrací. Pro podrobnosti viz [6], s. 149. Větu lze zřejmě zobecnit i na vzájemné působení dvou kulových těles se sféricky symetrickým rozložením hustoty hmoty (viz obr. 4.2). U skutečných těles o průměru nad 1000 km gravitace samočinně zařídí přibližně kulový tvar i sféricky symetrické rozložení hustoty. Tento proces se nazývá gravitační diferenciacce.

Poznámka 4.1. Tělesa, která nemají sféricky symetrické rozložení hustoty hmoty, ale obecně jejich těžištěm nahradit nelze.¹ Abychom se o tom přesvědčili, stačí

¹To se týká např. protáhlé planety Ida, kterou obíhá měsíček Dactyl.



Obr. 4.2. Ilustrace první Newtonovy věty pro dvě sféricky symetrická tělesa

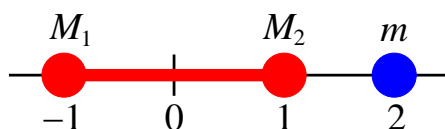
uvažovat, jak působí těleso ve tvaru činky o hmotnosti $M = M_1 + M_2$ na druhé těleso, jímž je homogenní koule o hmotnosti m . Hmotnost prostřední rovné části činky pro jednoduchost zanedbáme a položíme $M_1 = M_2 = m = 1$ kg. Na vodorovné ose na obr. 4.3 lze odečítat příslušné vzdálenosti v metrech. Pak velikost celkové síly mezi oběma tělesy je rovna

$$F = G \frac{mM_1}{3^2} + G \frac{mM_2}{1^2} = \frac{10G}{9}.$$

Kdybychom však soustředili hmotu činky do jejího těžiště v 0, pak by výsledná síla \bar{F} vyšla podstatně odlišná od F , tj.

$$\bar{F} = G \frac{m(M_1 + M_2)}{2^2} = \frac{G}{2} \quad \text{a} \quad 2\bar{F} < F.$$

Kvadratická nelinearita r^2 ve vztahu (4.1) tedy způsobila, že síla F je více než dvakrát větší než síla \bar{F} odpovídající hmotnosti prvního tělesa zkoncentrovaného do těžiště.



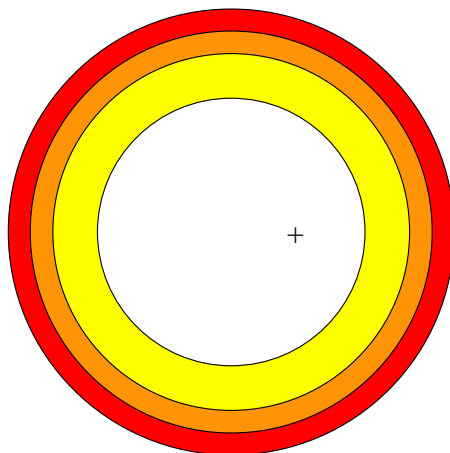
Obr. 4.3. Sílu mezi dvěma tělesy nelze obecně nahrazovat silou mezi hmotnými body umístěnými v jejich těžištích.

V [6], s. 150, je dokázáno další důležité tvrzení pro kulovou vrstvu (mezikouli), viz obr. 4.4.

Věta 4.2 (druhá Newtonova věta).² *Kulová vrstva se sféricky symetrickým rozložením hustoty nepůsobí žádnou silou na hmotný bod nacházející se uvnitř.*



²Angl. Shell Theorem.



Obr. 4.4. Ilustrace druhé Newtonovy věty v průřezu kulové vrstvy. Její silové působení na hmotný bod uvnitř dutiny označený + je nulové pro sféricky symetrické rozložení hustoty hmoty. Gravitační potenciál v dutině je totiž konstantní.

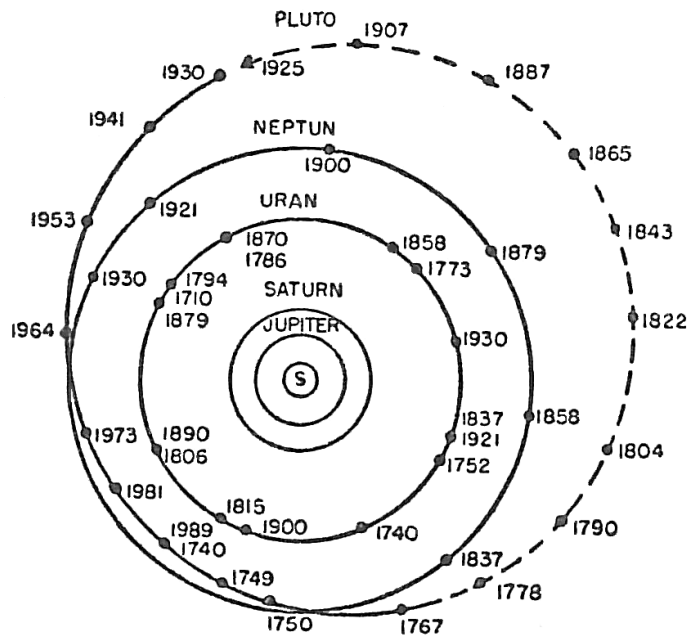
4.2. Nejdůležitější objevy a aplikace

V roce 1798 britský fyzik a chemik lord Henry Cavendish odhadl střední hustotu a hmotnost Země pomocí torzních vah a velkých olověných koulí [42]. Jeho metoda o sto let později vedla k hodnotě $G \approx 6.75 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}$. Proto se gravitační konstanta nazývá též *Newtonova–Cavendishova konstanta*. Cavendish se mj. proslavil též tím, že objevil vodík a složení vody.

Velkým triumfem Newtonova gravitačního zákona bylo objevení planety Neptun díky pozorovaným poruchám v dráze Uranu. Předpokládanou polohu Neptunu nejprve vypočítal anglický matematik a astronom John Couch Adams a nezávisle též francouzský astronom Urbain Jean Joseph Leverrier. V roce 1846 pak Neptun (viz obr. 4.5) objevil na obloze německý astronom Johann Gottfried Galle jen necelý stupeň od polohy vypočtené Leverrierem (podrobnosti viz [244]).

Pomocí (4.1) byla nalezena i některá další nebeská tělesa, např. americký optik Alvan G. Clark objevil v r. 1862 téměř neviditelného průvodce (tzv. Štěňátko) hvězdy Siria, což později vedlo k objevení superhustých objektů — bílých trpaslíků o hustotách řádově 10^7 až 10^{11} kg/m^3 (viz [110]). Hustoty řádově trilionů (10^{18}) kg/m^3 byly později zjištěny u neutronových hvězd.

Gravitační zákon, přesněji věta o viriálu, sehrál jistou roli i při postulování temné hmoty. V roce 1933 americký astrofyzik Fritz Zwicky zjistil, že v souhvězdí Vlasy Bereniky je kupa více než tisíce galaxií, které obíhají kolem středu kupy mnohem rychleji, než by mělo vyplývat z gravitačního zákona (přesněji z věty o viriálu — viz [270]). Předpověděl tak existenci záhadné temné hmoty ve vesmíru. K tomuto tématu se ještě dostaneme v kapitole 7 a 8.



Obr. 4.5. Polohy planet Uranu a Neptunu (převzato z [244])

Newtonův gravitační zákon nám umožňuje navrhovat a počítat trajektorie kosmických sond a získávat tak další unikátní data o vesmíru, předpovědět srážku planety či komety se Zemí, odhadnout, kolik bychom vážili na Marsu, atd. V této kapitole uvedeme některá jednoduchá a zajímavá použití Newtonova gravitačního zákona. Uvidíme, jak lze s jeho pomocí překvapivě určit některé zdánlivě nezjistitelné hodnoty fyzikálních veličin na neuvěřitelně velké vzdálenosti (např. hmotnost Marsu či střední hustotu Slunce). Gravitační zákon nám tak výrazně pomohl posunout hranice lidského poznání daleko dopředu zcela nečekaným směrem.



4.3. Velikost konstanty ve 3. Keplerově zákonu

Třetí Keplerův zákon ve své nejjednodušší podobě říká (viz oddíl 1.2), že třetí mocnina délky hlavní poloosy a eliptické dráhy planety ku druhé mocnině její oběžné doby T je konstantní, tj. $a^3/T^2 = C$. Odtud můžeme například vypočítat vzdálenosti všech planet od Slunce ze znalosti jejich oběžných dob, vzdálenosti Slunce–Země a oběžné doby Země. Skutečný význam konstanty C ale Kepler neznal. Také v řadě učebnic není uvedeno, jak můžeme tuto konstantu C vyjádřit a jakou má vlastně hodnotu. Přitom ji lze pro tělesa obíhající kolem Slunce snadno odvodit z (4.1),

např. pro kruhovou dráhu³ planety o poloměru $r = a$. Je-li m hmotnost planety a $M = M_{\odot}$ hmotnost Slunce, pak podle dalšího Newtonova zákona, zákona akce a reakce, je gravitační síla rovna dostředivé síle, tj.

$$G \frac{mM}{a^2} = \frac{mv^2}{a}, \quad (4.3)$$

kde v je oběžná rychlost planety. Dosadíme-li za $v = 2\pi a/T$ do (4.3), dostaneme jako důsledek 3. Keplerův zákon ve tvaru

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2} (= C). \quad (4.4)$$

Odtud lze získat další důležité informace, jak ještě uvidíme. Zde se mlčky předpokládá, že $m \ll M$. Jinak lze (zobecněný) 3. Keplerův zákon zapsat takto⁴

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{G(M + m)}{4\pi^2}. \quad (4.5)$$

Délka hlavní poloosy zemské dráhy byla postupně zpřesňována různými metodami, z nichž některé se opírají právě o 3. Keplerův zákon. Je prakticky rovna *astronomické jednotce* au, tj. střední vzdálenosti Země–Slunce,

$$1 \text{ au} = 149\,597\,870\,700 \text{ m} \approx 149.6 \cdot 10^6 \text{ km}. \quad (4.6)$$

Vztahem (4.6) je jednotka au propojena na základní jednotky soustavy SI. Astronomická jednotka je ale jen vedlejší jednotka. Vyjádříme-li hlavní poloosu dráhy planety a v astronomických jednotkách a T v rocích, pak lze 3. Keplerův zákon (4.4) pro oběžnice Slunce zapsat mnohem jednodušeji:

$$a^3 \cong T^2, \quad (4.7)$$

kde symbolem \cong označujeme jen číselnou rovnost, tj. nikoliv rozměrovou. Vynásobíme-li pravou stranu (4.7) konstantou $C = 1 \text{ au}^3/\text{yr}^2$, kde yr označuje rok, dostaneme i rovnost rozměrovou. Tento zápis má několik výhod, např. snadno můžeme vypočítat vzdálenosti všech planet od Slunce z pouhé znalosti jejich oběžných dob. Ilustrujme to na planetě Mars, jejíž oběžná doba kolem Slunce je $T = 1.881$ roku. Podle (4.7) je tedy $a = 1.881^{2/3} = 1.524$ (au).



³Odvození pro eliptickou dráhu je např. v článku [121].

⁴Dvě nestejně hmotná tělesa na stejném poloměru tak obíhají kolem Slunce různými rychlostmi, což neplatí z klasického 3. Keplerova zákona.

4.4. Hmotnost Slunce

Předně si povšimněme, že vztah (4.4) svazuje tři důležité fyzikální veličiny s rozměrem délky, hmotnosti a času udávané v základních jednotkách soustavy SI:

$$\text{m, kg, s.}$$

Pokud známe dvě z nich, můžeme dopočítat třetí. V tom spočívá krása 3. Keplerova zákona. Po dosazení za a z (4.6) do vztahu (4.4) okamžitě dostaneme hmotnost Slunce

$$M_{\odot} = \left(\frac{2\pi a}{T}\right)^2 \frac{a}{G} = 1.99 \cdot 10^{30} \text{ kg}, \quad (4.8)$$

kde $T = 31\,558\,149.54$ s je oběžná doba Země kolem Slunce (tzv. siderický rok).



4.5. Hmotnost Marsu

V roce 1877 americký astronom Asaph Hall objevil marsovský měsíček Phobos (nazývaný též Fobos), jehož oběžná doba je

$$P = 27\,554 \text{ s,}$$

tj. 0.3189 dne. Tato skutečnost umožnila výrazně zpřesnit naši znalost hmotnosti Marsu m . Pomocí úhlových měření lze odhadnout, že délka hlavní poloosy dráhy Phobosu je $r \approx 9.377 \cdot 10^6$ m. Podle (4.4) tedy platí

$$\frac{r^3}{P^2} = \frac{Gm}{4\pi^2} \quad (4.9)$$

a odtud již dostaneme, že

$$m = 6.42 \cdot 10^{23} \text{ kg.}$$

Hmotnost Marsu lze ale určit i bez znalosti gravitační konstanty G , pokud známe hmotnost Slunce. Ze vztahů (4.4) a (4.9) totiž plyne, že

$$m = \frac{r^3}{a^3} \frac{T^2}{P^2} M_{\odot},$$

kde $T = 59\,355\,072$ s (tj. 686.971 dne) je oběžná doba Marsu a $a = 227.94 \cdot 10^9$ m je délka hlavní poloosy jeho eliptické dráhy (jak lze rovněž zjistit pomocí (4.4)).

Podobným způsobem lze vypočítat hmotnosti všech vnějších planet a též Země. K upřesnění hmotnosti Venuše byla analogicky použita sonda Magellan, která ji obíhala, a pro Merkur podobně sonda Messenger.



4.6. Délka doby pádu do Slunce

Ze vztahu (4.8) pro kruhovou dráhu planety o poloměru a dostáváme její oběžnou rychlost

$$v = \frac{2\pi a}{T} = \sqrt{\frac{GM_{\odot}}{a}}. \quad (4.10)$$

Dosadíme-li za a vzdálenost Země–Slunce z (4.6) a za M_{\odot} hmotnost Slunce z (4.8), zjistíme, že Země obíhá Slunce rychlostí cca

$$v = 29.8 \text{ km/s}. \quad (4.11)$$

Předpokládejme na okamžik, že nás (nebo nějaký předmět) někdo na této dráze zabrzdí. Pak budeme vlastně volným pádem směřovat ke Slunci. Otázka je, jak dlouho bude tento pád trvat.

Kdyby Země obíhala v poloviční vzdálenosti od Slunce, pak by podle 3. Keplerova zákona (4.7) byla doba oběhu $0.5^{3/2} = \sqrt{2}/4$ roku. Pokud by však dráha Země byla tak protáhlou elipsou o délce poloosy 0.5 au, že by se v limitním případě rovnala úsečce Země–Slunce, pak by také obíhala $\sqrt{2}/4$ roku. Pád do Slunce by tedy trval $\sqrt{2}/8$ roku (tj. 64.6 dne).

Analogicky můžeme zjistit, že Neptun by do Slunce padal $\frac{1}{2}15^{3/2} \approx 29$ let nebo že Měsíc by spadl na Zemi za 4.83 dne, kdybychom je na jejich orbitách zastavili (viz [285]).



4.7. Velikost první, druhé a třetí kosmické rychlosti

Aby těleso obíhalo Zemi po kruhové dráze o poloměru cca $r = 6550$ km (tj. nad hustými vrstvami atmosféry, kdy může vykonat alespoň jeden oběh), je třeba mu udělit *první kosmickou rychlost* v_1 . Podobně jako v (4.10) zjistíme,⁵ že

$$v_1 = \sqrt{\frac{GM}{r}} = 7.9 \text{ km/s}, \quad (4.12)$$

kde

$$M = 5.9736 \cdot 10^{24} \text{ kg} \quad (4.13)$$

je hmotnost Země. Podle [15], s. 303, odpovídající orbitální rychlost na eliptické dráze s hlavní poloosou a je

$$v^2 = GM \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right), \quad (4.14)$$

kde r označuje okamžitou vzdálenost tělesa od středu Země, viz [15], s. 303.

⁵Rakety se obvykle vypouštějí z míst blízkých rovníku ve směru rotace Země, čímž se bezplatně získá počáteční rychlost až $40\,000 \text{ km} / (24 \cdot 3600 \text{ s}) = 0.46 \text{ km/s}$.

Aby těleso o hmotnosti $m \ll M$ ve vzdálenosti r od středu Země uniklo z jejího gravitačního pole, je nutné mu udělit alespoň *druhou kosmickou rychlost* v_{II} . Je-li potenciální i kinetická energie tělesa v nekonečnu rovna nule, pak ve vzdálenosti r od Země musí mít těleso součet potenciální a kinetické energie také roven nule, tj.

$$-G \frac{mM}{r} + \frac{1}{2}mv_{\text{II}}^2 = 0.$$

Odtud a z (4.12) pro druhou kosmickou rychlost dostaneme

$$v_{\text{II}} = \sqrt{\frac{2GM}{r}} = \sqrt{2}v_{\text{I}} = 11.2 \text{ km/s}, \quad (4.15)$$

kde opět $r = 6450 \text{ km}$. Pro těleso obíhající kolem Měsíce vychází druhá kosmická rychlost 2.3 km/s a kolem Slunce 617.3 km/s pro příslušné poloměry obou těles.

Třetí kosmická rychlost je úniková rychlost ze Sluneční soustavy ze vzdálenosti 1 au . Podobně jako v (4.15) dostaneme, že

$$v_{\text{III}} = \sqrt{2}v = 42.1 \text{ km/s},$$

kde v je dáno v (4.11). Budeme-li chtít udělit pozemskému tělesu rychlost v_{III} vzhledem ke Slunci, pak využijeme toho, že těleso má již rychlost (4.11). Zvětšit jeho rychlost o $v_{\text{III}} - v = 12.3 \text{ km/s}$ ale nestačí, protože se těleso ještě potřebuje vymanit z gravitačního pole Země, na což je nutná alespoň rychlost v_{II} . Aby těleso opustilo Sluneční soustavu, je třeba mu udělit ve směru pohybu Země přinejmenším rychlost $v_{\infty} = 16.6 \approx (11.2^2 + 12.3^2)^{1/2} \text{ km/s}$, tzv. *perigeální rychlost* [108].



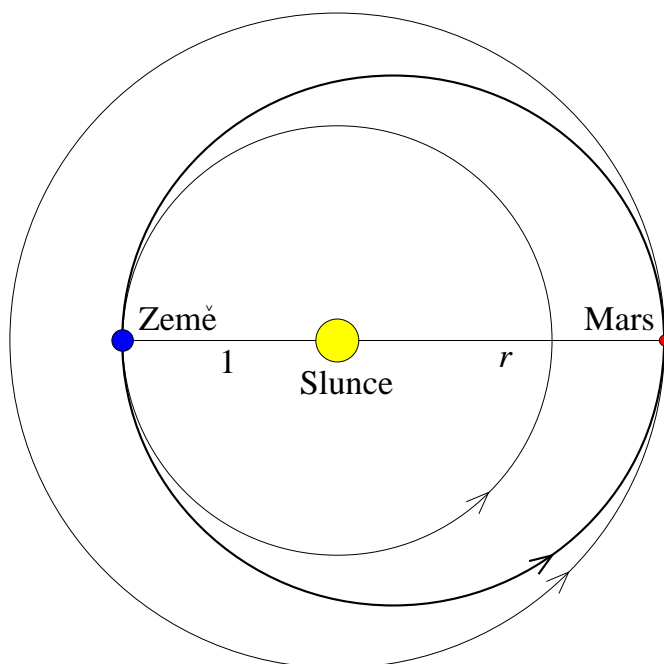
4.8. Výška letu geostacionárních družic

Geostacionární orbitu popsal slovinský fyzik Herman Potočnik již v roce 1928. Aby těleso obíhalo Zemi nad rovníkem a zůstávalo stále nad stejným místem zemského povrchu, je třeba, aby jeho oběžná doba byla stejná jako perioda rotace Země kolem své osy vzhledem ke hvězdám, tj. $T = 23 \text{ h } 56 \text{ min } 4 \text{ s} = 86\,164 \text{ s}$. Tuto myšlenku použil v roce 1945 spisovatel vědecko-fantastických románů Arthur C. Clarke k návrhu radiokomunikačních satelitů. Proto se geostacionární dráze občas říká *Clarkova orbita*. Podle 3. Keplerova zákona (4.4) je výška geostacionární družice nad rovníkem rovna

$$h = \sqrt[3]{\frac{GMT^2}{4\pi^2}} - R \approx 35\,786 \text{ km},$$

kde $R = 6\,378 \text{ km}$ je poloměr Země. Družice tedy obíhá ve výšce pětinasobku poloměru R nad zemským povrchem. Odtud je vidět 42.4 % povrchu Země.





Obr. 4.6. Ekonomická dráha sondy ze Země na Mars využívá skutečnosti, že Země se pohybuje kolem Slunce rychlostí (4.11). Sonda je třeba vypustit během tzv. startovacího okna, aby dosáhla dráhy Marsu v oblasti, kde se Mars bude nacházet za 0.7 roku.

4.9. Doba letu na Mars

Označme $r = 1.524$ a pro jednoduchost předpokládejme, že Země a Mars obíhají kolem Slunce po kruhových drahách o poloměrech 1 au a r au. Ekonomická dráha⁶ sondy ze Země k Marsu a zpět (tzv. Hohmannova přechodová dráha, elipsa či trajektorie) je nakreslena na obr. 4.6. Je v podstatě eliptická, protože po navedení na tuto dráhu sonda z úsporných důvodů vypne motory a po většinu letu ji Země ani Mars téměř neovlivňují, neboť dominuje vliv Slunce. Situace je ve skutečnosti mnohem složitější.⁷

Eliptická dráha sondy má délku hlavní poloosy $a = \frac{1}{2}(r+1)$ au (viz (1.1)) a Slunce je v jednom z ohnisek. Podle 3. Keplerova zákona (4.7) je doba potřebná k letu na Mars rovna

$$\frac{1}{2}T \cong \frac{1}{2} \left(\frac{r+1}{2} \right)^{3/2} \cong 0.7 \text{ yr},$$

což odpovídá 259 dnům.

⁶Některé sondy však tuto ekonomickou dráhu nepoužívají z časových důvodů. Například sonda Mariner 7 dosáhla Marsu za pouhých 128 dní.

⁷Dráhy planet nejsou kruhové a nejsou ani v jedné rovině. Sonda musí nejprve dosáhnout 2. kosmické rychlosti vzhledem k Zemi, aby se vymanila z její přitažlivosti. Občas se musí její dráha korigovat apod.

Vedlejší poloosa eliptické dráhy sondy má délku $b = \sqrt{r}$ au, jak okamžitě plyne z (1.2). Celková délka Hohmannovy trajektorie je tak podle (3.9) rovna 7.843 au. Poznamenejme ještě, že délková excentricita dráhy se rovná vzdálenosti jejího ohniska od středu, tj. $\varepsilon = \frac{1}{2}(r - 1)$ au, a numerická excentricita je tak rovna

$$e = \frac{r - 1}{r + 1} = 0.208.$$

K Plutu by se podobným způsobem letělo ze Země 46 roků. Proto byla pro sondu New Horizons vypuštěnou v roce 2006 zvolena jiná dráha, využívající přitažlivosti Jupitera (tzv. gravitační prak), která při počáteční rychlosti 16.26 km/s umožňuje dosáhnout Pluta za pouhých 9 roků od vypuštění.



4.10. Střední hustota Slunce

Ukažme si, jak lze pomocí úhlooměru zjistit střední hustotu Slunce. Abychom vyřešili tento zdánlivě absurdní problém, budeme pro jednoduchost předpokládat, že dráha Země kolem Slunce je kruhová. Podle Newtonova gravitačního zákona, druhého a třetího Newtonova pohybového zákona (zákona síly a zákona akce a reakce) pak dostaneme

$$G \frac{M_{\odot} m}{r^2} = \frac{mv^2}{r}, \quad (4.16)$$

kde M_{\odot} je hmotnost Slunce, m je hmotnost Země, r je jejich vzdálenost a v je rychlost Země. Snadno lze změřit,⁸ že úhlový průměr Slunce je zhruba $\delta = 32'$. Pak $R_{\odot} = r \sin \frac{1}{2}\delta$ je poloměr Slunce (viz obr. 4.7). Zřejmě (srov. (4.10))

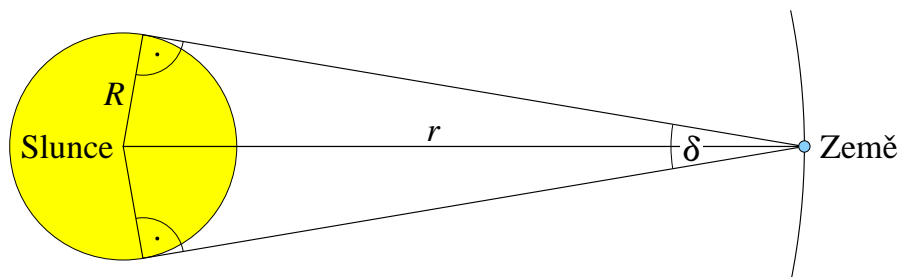
$$v = \frac{2\pi r}{T}, \quad (4.17)$$

kde $T = 31\,558\,149.54$ s (=365.25636 dne) je oběžná doba Země. Označíme-li $V = \frac{4}{3}\pi R_{\odot}^3$ objem Slunce a dosadíme-li za M_{\odot} ze vztahu (4.16), zjistíme pomocí (4.17), že střední hustota Slunce je

$$\rho = \frac{M_{\odot}}{V} = \frac{v^2 r}{GV} = \frac{(2\pi r)^2 \cdot r}{T^2 G \cdot \frac{4}{3}\pi (r \sin \frac{1}{2}\delta)^3} = \frac{3\pi}{T^2 G \sin^3 \frac{1}{2}\delta} = 1409 \text{ kg/m}^3, \quad (4.18)$$

tj. je jen o 40 % vyšší než hustota vody.

⁸K tomu je dobré mít sluneční filtr. Úhlový průměr Slunce můžeme také změřit pomocí dírkové komory, jak navrhoval Leonardo di ser Piero da Vinci.



Obr. 4.7. Střední hustotu Slunce lze určit z jeho úhlového průměru a oběžné doby Země (viz (4.18)).

Celkovou hmotnost Slunce můžeme pak vypočítat takto: ze známé střední vzdálenosti $r = 149.6 \cdot 10^9$ m a změřeného úhlu $\delta/2$ určíme poloměr Slunce $R_{\odot} = 696 \cdot 10^6$ m a objem Slunce $V = 1.413 \cdot 10^{27}$ m³. Ze vztahu (4.18) pak po dosazení obdržíme⁹

$$M_{\odot} = \rho V = 1.99 \cdot 10^{30} \text{ kg}$$

(srov. (4.8)).



4.11. Rychlost Halleyovy komety

Halleyova kometa je pojmenována po Edmondovi Halleyovi, který poprvé předpověděl její návrat. Její eliptická dráha je *retrogradní*, tj. obíhá kolem Slunce v opačném směru než planety. Ze 3. Keplerova zákona (4.4) a z oběžné doby $T = 75.7$ roku zjistíme, že hlavní poloosa má délku $a = 17.9$ au. Kometa se přibližuje ke Slunci na vzdálenost $r_2 = a - ae = a(1 - e) = 0.585$ au (viz obr. 1.4). Odtud dostáváme výstřednost $e = 0.9673$ její dráhy. Vzdálenost v afeliu je rovna $r_1 = a + ae = 35.21$ au, tj. kometa se vzdaluje až za dráhu Neptunu. Ze vztahu (4.14) použitého na Slunce plyne, že rychlost Halleyovy komety v afeliu, resp. periheliu je

$$v_1 = \left(\frac{GM_{\odot}(1 - e)}{a(1 + e)} \right)^{1/2} = 908 \text{ m/s, resp. } v_2 = \left(\frac{GM_{\odot}(1 + e)}{a(1 - e)} \right)^{1/2} = 54.6 \text{ km/s.}$$

Stejně výsledky dává i 2. Keplerův zákon (1.6).



⁹Současné udávané zpřesněné hodnoty jsou $M_{\odot} = 1.988\,547 \cdot 10^{30}$ kg a $R_{\odot} = 695\,508$ km.

4.12. Platnost gravitačního zákona mimo Sluneční soustavu

V roce 1780 William Frederick Herschel¹⁰ zjistil, že hvězda ξ UMa v souhvězdí Velké medvědice je vizuální dvojhvězdou. Dnes víme, že ξ UMa je alespoň čtyřnásobná hvězda. Je od nás vzdálena cca 27 světelných let. Její obě hlavní složky mají hmotnost srovnatelnou se Sluncem. Francouzský matematik a astronom Felix Savary dlouhodobým systematickým pozorováním objevil kolem roku 1827, že obě hlavní složky kolem sebe obíhají po eliptických drahách, které lze popsat pomocí Newtonova gravitačního zákona. Šlo tak vlastně o první potvrzení platnosti tohoto zákona mimo Sluneční soustavu. Později to vedlo i k přesvědčení, že veškeré fyzikální zákony platí v celém vesmíru stejně.

Shodou okolností je rovina oběžné dráhy obou hlavních složek téměř tečná k nebeské sféře [86]. Parametry skutečné eliptické dráhy se tak v projekci na nebeskou sféru téměř nezmění. V tomto případě Felix Savary tedy mohl určit celkovou hmotnost soustavy pomocí modifikovaného 3. Keplerova zákona (srov. (4.5) a (4.7)) takto:

$$M + m \cong \frac{\alpha^3}{\gamma^3 T^2} \cong 1.84 M_{\odot},$$

kde $T = 59.8$ roku je perioda oběhu, $\alpha = 2.53''$ je velikost hlavní poloosy relativní dráhy¹¹, $\gamma = 0.135''$ je tzv. roční paralaxa soustavy (viz kapitola 2 nebo [270]) vyjádřená také v obloukových vteřinách a součet $M + m$ pak vychází v hmotnostech Slunce (4.8).



4.13. Určení vzdálenosti exoplanet od jejich mateřských hvězd

Hvězda 51 Peg má hmotnost¹² $M = 1.05 M_{\odot}$. V roce 1995 byly v jejím spektru pozorovány nepatrné periodicky se opakující posuvy spektrálních čar způsobené Dopplerovým jevem, když planeta při svém oběhu neustále s hvězdou „cloumá“ (viz [294], s. 47). Tak byla objevena první *exoplaneta*. Doba jejího oběhu je $T = 4.231/365.256$ let. Protože je od nás ovšem vzdálena 45 bilionů kilometrů, nelze

¹⁰Slavný anglický astronom, objevitel mnoha komet, planety Uran, infračerveného (tepelného) záření aj. Odhadl též výkon Slunce s přesností na několik procent.

¹¹Dráha jedné složky vůči druhé, kterou považujeme za pevnou. Je to elipsa, v jejímž jednom ohnisku se nachází druhá složka.

¹²Jeden *parsek* (pc) je vzdálenost, z níž se jeví velká poloosa dráhy Země (1 au) pod úhlem $1''$, tj. $1 \text{ pc} = 3.086 \cdot 10^{16} \text{ m}$. Ze známé vzdálenosti hvězdy $d = 15.4 \text{ pc}$ a pozorované hvězdné velikosti $\mu = 5.49 \text{ mag}$ lze pomocí Pogsonova vztahu [270], s. 51, zjistit tzv. absolutní hvězdnou velikost $\bar{\mu} = \mu + 5 - 5 \log d = 4.55 \text{ mag}$ a odtud je možno odhadnout hmotnost hvězdy M . Pro srovnání uveďme, že absolutní hvězdná velikost Slunce je jen o trochu větší: 4.71 mag .

stanovit velikost poloosy její oběžné dráhy pomocí úhlových měření a standardních trigonometrických vztahů. Kombinací (4.4) a (4.7) však zjistíme, že

$$a \cong \sqrt[3]{1.05 T^2} \cong 0.052 \text{ au.}$$

Exoplaneta tedy obíhá svou mateřskou hvězdu mnohem blíže než Merkur Slunce. Jak odhadnout zdola její hmotnost se uvádí např. v [294].



4.14. Odhad hmotnosti supermasivní černé díry

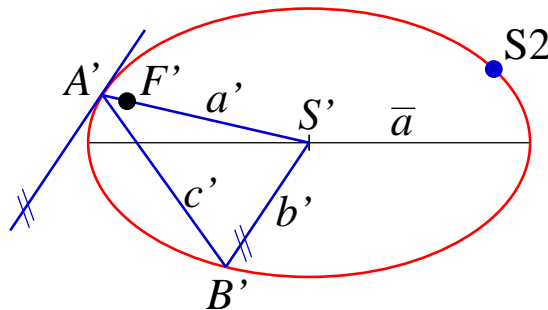
Ve středu naší Galaxie vzdáleném 26 tisíc světelných let se nachází obří černá díra Sgr A*. Hvězda S2 ji oběhne po eliptické dráze s hlavní poloosou a jednou za 15.56 roku (viz [247]). Pomocí úhlových měření se zjistilo, že pozorovaná dráha (tj. projekce skutečné dráhy na nebeskou sféru) má délku hlavní poloosy $\bar{a} = 107 \cdot 10^{12}$ m. Ze (4.4) a (4.8) pak okamžitě dostaneme zaručený dolní odhad hmotnosti uvažované černé díry

$$M_{\bullet} = \frac{4\pi^2 a^3}{GT^2} \geq \frac{4\pi^2 \bar{a}^3}{GT^2} = 3 \cdot 10^36 \text{ kg} = 1\,500\,000 M_{\odot},$$

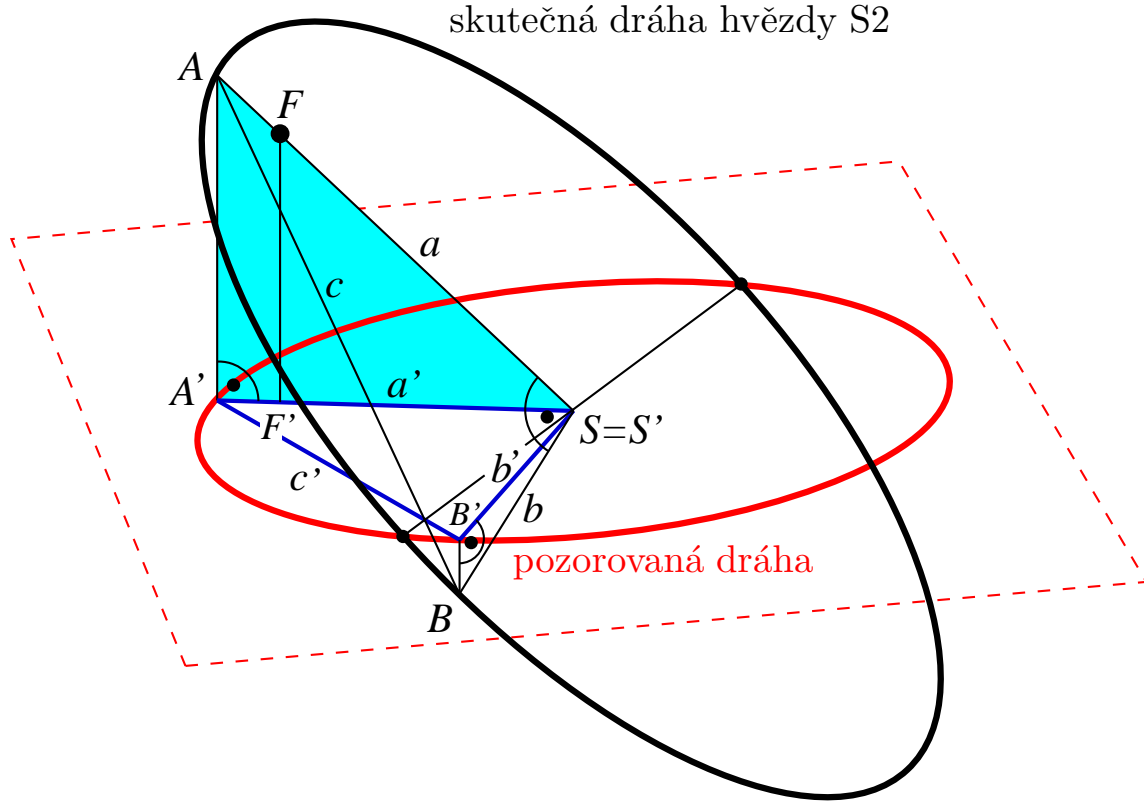
kde $T = 15.56$ roku $= 4.91 \cdot 10^8$ s.

Abychom tento odhad zpřesnili, ukažme si nyní, jak lze jednoznačně vypočítat velikost hlavní poloosy a z Pythagorovy věty a vzorce pro řešení kvadratické rovnice (viz [121]). Excentricitu e skutečné eliptické dráhy lze přímo určit z pozorované projektované eliptické dráhy (viz obr. 4.8).

Pro jednoduchost označme F' bod odpovídající silnému rentgenovému zdroji Sgr A*, jenž je průmětem ohniska F skutečné dráhy. Uvažujme polopřímku $S'F'$



Obr. 4.8. Projekce dráhy hvězdy S2 na nebeskou sféru. Excentricita její skutečné dráhy je rovna $e = |F'S'|/|A'S'|$, kde F' označuje pozorovanou polohu černé díry.



Obr. 4.9. Skutečná a pozorovaná dráha hvězdy S2. Úsečky o délkách a , b a $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ se promítají na úsečky o délkách a' , b' a c' . Průsečnice rovin ABS a $A'B'S'$ se nazývá *uzlová přímka*.

vycházející ze středu S' pozorované eliptické dráhy a necht' A' je průsečík polopřímky $S'F'$ s touto dráhou. Hlavní poloosa a obsahující ohnisko F se pak promítá na úsečku $A'S'$. Proto platí (viz obr. 4.9)

$$e = \frac{\varepsilon}{a} = \frac{|FS|}{|AS|} = \frac{|F'S'|}{|A'S'|},$$

kde zlomek na pravé straně umíme vyčíslit, $|\cdot|$ označuje délku úsečky a $\varepsilon = |FS|$. Pro situaci z obr. 4.8 je speciálně $e = 0.875$.

Nyní určíme projekci b' vedlejší poloosy b skutečné dráhy. Na pozorované eliptické dráze sestrojme bod B' tak, aby přímka $B'S'$ byla rovnoběžná s tečnou¹³ v bodě A' a úhel $A'S'B'$ nebyl tupý. Pak lze z Pythagorovy věty pro pravoúhlé trojúhelníky ABS , $AA'S$ a $BB'S$ z obr. 4.9 odvodit, že

$$a^2 + b^2 = c^2 = c'^2 + (\sqrt{a^2 - a'^2} + \sqrt{b^2 - b'^2})^2,$$

¹³Tečna v bodě A' je kolmá na normálu, která půlí úhel mezi oběma průvodiči. K tomu lze použít vztah (1.10).

kde $a' = |A'S'|$, $b' = |B'S'|$ a $c' = |A'B'|$. Odtud plyne, že

$$a'^2 + b'^2 - c'^2 = 2\sqrt{a^2 - a'^2}\sqrt{b^2 - b'^2}.$$

Umocněním této rovnice a dosazením $b^2 = (1 - e^2)a^2$ dostaneme kvadratickou rovnici¹⁴ o jedné neznámé a^2 ,

$$(1 - e^2)(a^2)^2 - [(1 - e^2)a'^2 + b'^2]a^2 + a'^2b'^2 - \frac{1}{4}(a'^2 + b'^2 - c'^2)^2 = 0.$$

Pro situaci z obr. 4.8 vychází, že $a' = 4$ ld, $b' = 2.5$ ld, $c' = 4$ ld, kde ld označuje světelný den (angl. light day). Jediné fyzikální řešení je

$$a = 5.45 \text{ ld} = 943.6 \text{ au} = 141.166 \cdot 10^{12} \text{ m}.$$

Druhé kladné řešení není relevantní, protože je menší než a' . Dosadíme-li a a T do 3. Keplerova zákona (4.4), pak pomocí (4.8) dostaneme

$$M_{\bullet} \approx 6.9 \cdot 10^{36} \text{ kg} = 3.47 \cdot 10^6 M_{\odot}.$$

Ukažme si ještě jinou metodu určení M_{\bullet} pomocí měření rychlostí hvězdy S2. Protože součet kinetické a potenciální energie se v Newtonově mechanice zachovává, platí

$$\frac{1}{2}v_1^2 - \frac{GM_{\bullet}}{r_1} = \frac{1}{2}v_2^2 - \frac{GM_{\bullet}}{r_2},$$

kde v_1 je rychlost v apocentru a v_2 v pericentru. Tudíž

$$v_2^2 - v_1^2 = 2GM_{\bullet} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right).$$

Odtud a ze zákona zachování momentů $r_1v_1 = r_2v_2$ (srov. (1.3)) již můžeme vyjádřit neznámou hmotnost M_{\bullet} :

$$M_{\bullet} = \frac{1}{2G}(v_2^2 - v_1^2) \frac{r_1r_2}{r_1 - r_2} = \frac{1}{2G}(v_2^2 - v_1^2) \frac{r_1^2v_1/v_2}{r_1(1 - v_1/v_2)} = \frac{1}{2G}r_1v_1(v_1 + v_2).$$

Dosadíme-li do tohoto vztahu r_1 z (1.7), dostaneme

$$M_{\bullet} = \frac{T}{2\pi G}(v_1v_2)^{3/2}. \quad (4.19)$$

¹⁴Pro zrcadlový obraz podle roviny $A'B'S'$ z obr. 4.9 platí stejná kvadratická rovnice. Správné znaménko inklinacího úhlu se dá našťěstí určit z Dopplerova jevu.

Vztah (1.4) nám umožňuje získat velikost rychlosti v_1 hvězdy S2 v apocentru z naměřené

$$v_2 = 7 \cdot 10^6 \text{ m/s} \quad (4.20)$$

v pericentru a excentricity $e = 0.875$. Dosadíme-li nyní tyto hodnoty a oběžnou dobu $T = 4.91 \cdot 10^8 \text{ s}$ hvězdy S2 do (4.19), dostaneme podle (4.8) přibližnou hodnotu hmotnosti centrální černé díry¹⁵

$$M_{\bullet} \approx 6.91 \cdot 10^{36} \text{ kg} = 3.47 \cdot 10^6 M_{\odot} .$$

Získaná hmotnost samozřejmě závisí na přesnosti určení výchozích dat T , v_2 a e . Po několika dalších obězích bude možno tyto parametry výrazně zpřesnit.

Ze vztahu (1.7) lze dále určit, že vzdálenost pericentra hvězdy S2 od Sgr A* je rovna asi trojnásobné vzdálenosti Neptuna od Slunce. Pro experimentální stanovení hodnoty v_1 nebyla v období 1994/95 k dispozici měření radiální složky rychlosti, proto se poměr v_1/v_2 uváděný v [247], s. 695, výrazně odlišuje od vztahu (1.4).



4.15. Fyzikální charakteristiky planet

Přestože Newtonův gravitační zákon popisuje chování planet na krátkých časových škálách poměrně dosti přesně, nesmíme zapomínat, že jde jen o matematický model. Ten popisuje fyzikální realitu pouze přibližně.

Podle Committee on Data for Science and Technology je gravitační konstanta v jednotkách SI rovna

$$G = 6.67428 \pm 0.00067 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}. \quad (4.21)$$

Nejistota v určení gravitační konstanty (4.2) je tedy značná (už ve čtvrté platné číslici). Je to vůbec nejhůře změřená fundamentální konstanta přírody. To má ale negativní dopad na většinu výpočtů dlouhodobých předpovědí v nebeské mechanice. Například hlavní poloosa eliptické dráhy nějakého tělesa je podle (4.4) rovna

$$a = \left(\frac{T^2 GM}{4\pi^2} \right)^{1/3}$$

a odhad její skutečné velikosti tak podstatně závisí na přesném určení G , resp. součinu GM , který většinou známe na více platných míst. Dobu oběhu lze obvykle změřit dosti přesně.

¹⁵Odpovídající Schwarzschildův poloměr $R_{\bullet} = 2GM_{\bullet}/c^2$ činí přibližně $10^{10} \text{ m} \approx 0.07 \text{ au}$.

Ze vztahů (4.1), (4.9) a (4.15) lze získat tabulku 4.1. Ze znalosti vzdálenosti i -té planety a jejího úhlového průměru určíme její poloměr r_i . Tíhové zrychlení g_i na jejím povrchu pak snadno vypočteme z gravitačního zákona (4.1) a druhého Newtonova zákona, tj. $mg_i = Gm_i m/r_i^2$ po vykrácení $m > 0$. Povšimněme si ještě posledního sloupce v tabulce 4.1. Kdyby měl Uran pevný povrch, tak bychom na něm vážili méně než na Zemi, i když je Uran 15krát hmotnější než Země.

Tabulka 4.1. Symbol i označuje pořadové číslo planety, m_i její hmotnost v kg, a_i je délka hlavní poloosy dráhy v metrech, T_i je oběžná doba v rocích, v_i je střední oběžná rychlost planety v km/s, v_{II} je úniková rychlost v km/s z povrchu (tloušťku atmosféry pro jednoduchost zanedbáváme), r_i je střední poloměr planety v km a g_i je gravitační zrychlení v m/s^2 na povrchu planety.

i	planeta	$m_i/10^{24}$	$a_i/10^9$	T_i	v_i	v_{II}	r_i	g_i
1	Merkur	0.33022	57.9	0.241	47.9	4.25	2440	3.697
2	Venuše	4.8676	108.2	0.615	35.0	10.36	6052	8.867
3	Země	5.97219	149.6	1	29.8	11.18	6378	9.795
4	Mars	0.64185	229.97	1.881	24.0	5.03	3390	3.726
5	Jupiter	1898.6	778.4	11.861	13.1	60.19	69911	25.91
6	Saturn	568.46	1427.0	29.457	9.6	36.09	58232	11.182
7	Uran	86.81	2869.6	87.011	6.8	21.37	25362	9.004
8	Neptun	102.43	4496.6	164.79	5.4	23.56	24624	11.268



5. Problém N těles

*Jestliže jsem viděl dále než ostatní,
bylo to proto, že jsem stál na ramenou obrů.*

ISAAC NEWTON

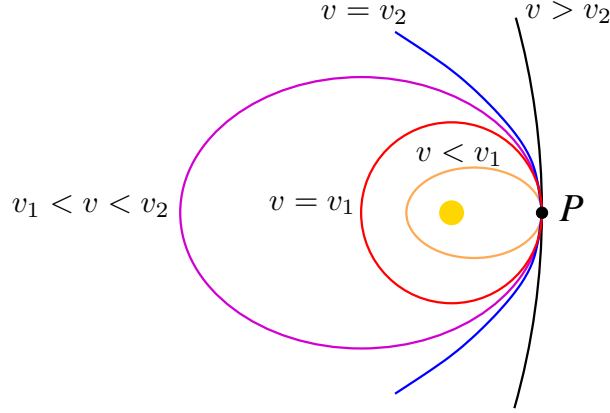
5.1. Úvod

V této kapitole se budeme zabývat problémem N těles. Hlavním úkolem bude stanovit rovnice pro dráhy N hmotných bodů, které se vzájemně ovlivňují jen podle Newtonova gravitačního zákona. Hned na počátku zdůrazníme, že v klasické Newtonově teorii gravitace závisí velikost sil, jimiž na sebe tělesa působí, jen na jejich okamžitých polohách a hmotnostech. Jinými slovy, předpokládáme nekonečnou rychlost šíření gravitační interakce, jež je ve skutečnosti jistě konečná. Tento předpoklad způsobuje tzv. *chybu modelu*. Newtonova teorie je na krátkých časových intervalech ve Sluneční soustavě velice přesná, a proto se výborně hodí např. k výpočtu trajektorií meziplanetárních sond či blízkozemních asteroidů. V těchto případech je chyba modelu skutečně velice malá. Newtonova teorie se však nehodí k dlouhodobým simulacím na časových škálách stovek milionů let, kdy se naakumuluje chyba modelu tak, že znehodnotí výsledné numerické řešení. Podrobněji o tom pojednáme v oddílu 5.4 a ve druhé polovině knížky.



5.2. Problém dvou těles

Pokud na sebe působí jen dvě tělesa, lze jejich dráhy určit analyticky, tj. vzorečkem. Obecné řešení ve tvaru kuželosečky je uvedeno např. v [6], s. 14. V předchozích kapitolách 3 a 4 jsme předpokládali, že jedno těleso má zanedbatelnou hmotnost vůči



Obr. 5.1. Všechny dráhy mají společné ohnisko a procházejí bodem P , v němž předpokládáme následující podmínky na rychlosti: pro $v < v_1$ je dráha tělesa eliptická, pro $v = v_1$ je dráha kruhová, pro $v_2 > v > v_1$ je dráha opět eliptická, pro $v = v_2$ je dráha parabolická a pro $v > v_2$ hyperbolická.

druhému. V tomto speciálním případě lze podobně jako ve (4.12), resp. (4.15) definovat *kruhovou rychlost*, resp. *únikovou rychlost* vztahy

$$v_1 = \sqrt{\frac{Gm}{r}}, \quad \text{resp.} \quad v_2 = \sqrt{\frac{2Gm}{r}},$$

kde G je gravitační konstanta, $m > 0$ je hmotnost centrálního tělesa a r poloměr kruhové dráhy. V závislosti na počátečních podmínkách (velikosti tangenciální rychlosti) v pericentru P dostáváme různé tvary trajektorií, jak je znázorněno na obr. 5.1.

Dále budeme předpokládat, že hmotnosti m_1 a m_2 obou uvažovaných těles jsou nenulové. Bez újmy na obecnosti můžeme dále požadovat, že těžiště soustavy je v klidu a v počátku souřadné soustavy. Potom v každém časovém okamžiku platí¹

$$m_1 r_1 = m_2 r_2,$$

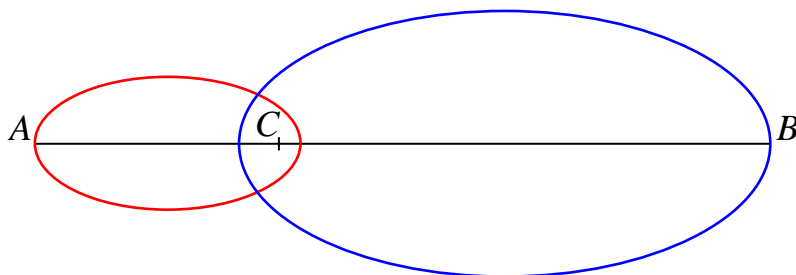
kde r_1 a r_2 jsou vzdálenosti těles od jejich společného těžiště. Odtud a z tabulky 4.1 můžeme například zjistit, že pro $m_1 = M_\odot$ (viz (4.8)) leží těžiště soustavy Slunce–Jupiter mimo Slunce, neboť vzdálenost

$$r_1 = \frac{m_2 r_2}{m_1} = \frac{1898.6 \cdot 10^{24} \cdot 778.4 \cdot 10^9}{1.99 \cdot 10^{30}} = 743 \cdot 10^6 \text{ (m)} \quad (5.1)$$

je větší než poloměr Slunce $R = 696 \cdot 10^6$ metrů. V tomto případě jsou dráhy obou těles v podstatě kruhové,² zanedbáme-li vliv dalších těles (v opačném případě viz obr. 13.1).

¹Tento vztah připomíná rovnováhu na dvojramenné páce.

²Výstřednost Jupiterovy dráhy je 0.048.



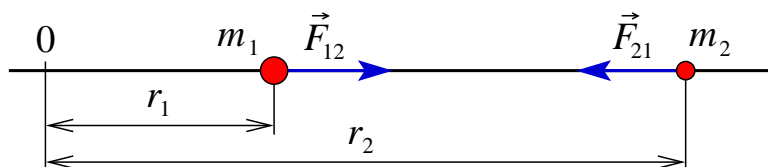
Obr. 5.2. Dvě hmotná tělesa A a B obíhající kolem společného těžiště C po eliptických drahách. Bod C je zároveň jedním z ohnisek každé elipsy. Poměr vzdáleností AC/BC zůstává konstantní.

Na obr. 5.2 je znázorněn obecnější případ trajektorií dvou nestejně hmotných těles obíhajících kolem společného těžiště C . Jejich eliptické dráhy mají vždy stejnou excentricitu. Skutečnost, že vzdálenosti r_i , $i = 1, 2$, závisí na čase t , budeme zapisovat takto: $r_i = r_i(t)$. Doba oběhu T splňuje zobecněný 3. Keplerův zákon (4.5)

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{G(m_1 + m_2)}{4\pi^2},$$

kde $a = r_1(t^*) + r_2(t^*)$ a t^* odpovídá okamžiku, kdy jsou obě tělesa od sebe nejvíce vzdálena (tj. nacházejí se v apocentrech svých drah [165], s. 118).

Než si ukážeme, jak lze odvodit diferenciální rovnice popisující pohyb tří těles, která na sebe vzájemně gravitačně působí, odvodíme jednoduchou diferenciální rovnici pro jednorozměrný případ z obr. 5.3.



Obr. 5.3. Jednorozměrný problém dvou těles

Nechť $r_1 < r_2$ jsou souřadnice dvou hmotných bodů o kladných hmotnostech $m_1 > 0$ a $m_2 > 0$. Jejich vzájemné působení vyvolá podle Newtonova gravitačního zákona

$$|\vec{F}_{12}| = |\vec{F}_{21}| = G \frac{m_1 m_2}{(r_2 - r_1)^2} \quad (5.2)$$

opačně orientované síly \vec{F}_{12} a \vec{F}_{21} , kde $|\cdot|$ je délka vektoru. Podle první Newtonovy věty 4.1 zůstanou tyto síly stejné, pokud hmotné body nahradíme koulemi se sféricky symetrickým rozložením hmoty.

Předpokládejme, že na tělesa nepůsobí žádné jiné síly než síly gravitační \vec{F}_{12} a \vec{F}_{21} . Jak známo, rychlost i -tého tělesa je $\dot{r}_i = \dot{r}_i(t)$, kde tečka označuje časovou derivaci. Jeho zrychlení v čase t je pak $\ddot{r}_i(t)$. Podle druhého Newtonova pohybového zákona je působící síla přímo úměrná zrychlení a platí

$$|\vec{F}_{12}| = m_1 \ddot{r}_1(t), \quad |\vec{F}_{21}| = -m_2 \ddot{r}_2(t). \quad (5.3)$$

Pro stručnost nebudeme závislost r_i na čase t v dalším textu většinou vyznačovat. Z (5.2) a (5.3) dostaneme

$$\ddot{r}_1 = G \frac{m_2}{(r_2 - r_1)^2}, \quad -\ddot{r}_2 = G \frac{m_1}{(r_2 - r_1)^2}.$$

Označíme-li $r = r_2 - r_1$, pak sečtením obou předchozích rovnic dostaneme pro neznámou funkci $r = r(t)$ vztah

$$\ddot{r} = -G \frac{m_1 + m_2}{r^2}. \quad (5.4)$$

Dvojím derivováním podle času t se snadno přesvědčíme, že tuto diferenciální rovnici 2. řádu splňuje například funkce definovaná vztahem

$$r(t) = c(\tau - t)^{2/3} \quad \text{pro } t < \tau,$$

kde $c = (\frac{9}{2}G(m_1 + m_2))^{1/3}$ je konstanta a τ je okamžik kolize. Vidíme, že absolutní hodnota rychlosti $|\dot{r}(t)| = \frac{2}{3}c(\tau - t)^{-1/3}$ konverguje k ∞ , když t se blíží k τ zleva. Newtonova teorie gravitace tedy připouští nadsvětelné rychlosti.

Existují ale i jiná řešení rovnice (5.4). Aby řešení existovalo lokálně jediné, stačí předepsat hodnoty r a \dot{r} v nějakém časovém okamžiku (např. pro $t = 0$).



5.3. Problém tří těles

Odvodit nějaký vzorec popisující dráhy tří těles se nám podaří jen v několika málo speciálních případech (viz např. [173]). Taková řešení našli např. d'Alembert, Euler, Hamilton, Heinrich, Jacobi, Kepler, Lagrange, Laplace, Nechvíle, Petr (viz [127], [173]). Úloha tří těles je totiž popsána soustavou 18 nelineárních diferenciálních rovnic prvního řádu pro tři složky polohy a tři složky rychlosti každého ze tří těles. Isaac Newton kdysi o této úloze prohlásil:

An exact solution exceeds, if I am not mistaken, the force of any human mind.
(Přesné řešení problému tří těles přesahuje sílu jakékoliv lidské mysli, pokud se nemýlím.)

Často se proto vyšetřuje jen tzv. omezený problém tří těles (viz [5]). Pokud má kupříkladu jedno z těles nulovou nebo zanedbatelnou hmotnost, problém se značně zjednoduší (např. družice v soustavě Slunce–Země–družice). Již v roce 1918 Karel Petr odvodil [206] jen jednu diferenciální rovnici 2. řádu pro úhlovou rychlost dvou těžších těles, která obíhají po eliptických drahách kolem společného těžiště. Odtud pak lze dopočítat trajektorie všech tří těles.³

Pokud jsou dvě hmotná tělesa ze tří relativně blízko sebe (např. Země a Měsíc v soustavě Slunce–Země–Měsíc), problém tří těles se často redukuje na mnohem jednodušší dva problémy dvou těles, kdy se Země a Měsíc nahradí společným těžištěm. Jde však vždy jen o aproximaci (srov. obr. 4.3). Speciálním případům problému tří těles je věnována kapitola 8 v monografii [5] (viz též [173]).

Henri Poincaré [212] však dokázal, že pro problém tří těles obecně neexistuje analytické řešení ve tvaru nějakého vzorečku. Proto se hledá jeho přibližné řešení většinou pomocí numerických metod.

Podívejme se nyní, jak se odvodí obecné rovnice pro trajektorie tří těles, která se vzájemně gravitačně ovlivňují. Pro jednoduchost se omezíme jen na dvojrozměrný případ (trojrozměrný případ by se vyšetřoval zcela analogicky). Síla tedy bude nyní vektor o dvou složkách. Uvažujme tři tělesa o hmotnostech m_1 , m_2 a m_3 . Jejich polohu v souřadnicovém systému (x, y) bude charakterizovat průvodič $\vec{r}_i = \vec{r}_i(t)$, $i \in \{1, 2, 3\}$, který se nazývá *rádiusvektor* (viz obr. 5.4). Položme

$$\vec{r}_{ij} = \vec{r}_j - \vec{r}_i, \quad i, j \in \{1, 2, 3\}, \quad i \neq j, \quad (5.5)$$

a nechť $r_{ij} = |\vec{r}_{ij}|$ značí délku vektoru \vec{r}_{ij} . Velikost síly, například mezi prvním a druhým tělesem, je (podobně jako v (5.2))

$$|\vec{F}_{12}| = G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}.$$

Síla \vec{F}_{12} působí ve směru jednotkového vektoru \vec{r}_{12}/r_{12} , a tak

$$\vec{F}_{12} = G \frac{m_1 m_2 \vec{r}_{12}}{r_{12}^3}.$$

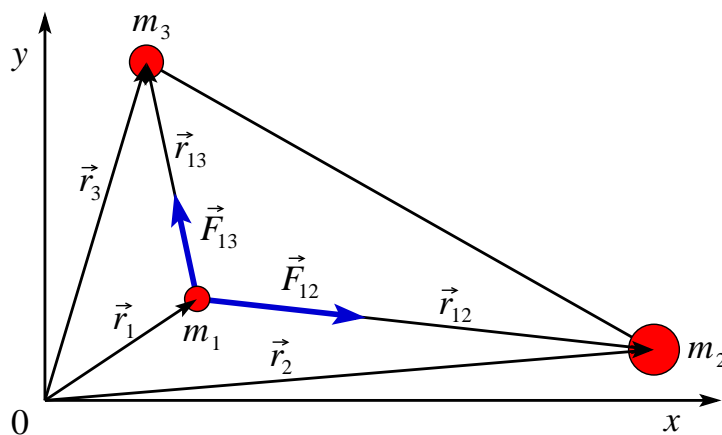
Celková síla, která působí na první těleso, je tedy

$$\vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} = G m_1 \left(\frac{m_2 \vec{r}_{12}}{r_{12}^3} + \frac{m_3 \vec{r}_{13}}{r_{13}^3} \right)$$

a podle zákona síly je rovna $m_1 \ddot{\vec{r}}_1$. Pro zrychlení prvního tělesa tak dostaneme rovnici

$$\ddot{\vec{r}}_1 = G \left(\frac{m_2 \vec{r}_{12}}{r_{12}^3} + \frac{m_3 \vec{r}_{13}}{r_{13}^3} \right).$$

³Na Petrovy výsledky navázal Vincent Nechvíle, pozdější nositel významné francouzské Lalandeovy ceny.



Obr. 5.4. Dvourozměrný problém tří těles

Pro všechna tři tělesa získáme podobně soustavu tří vektorových diferenciálních rovnic pro neznámé \vec{r}_1 , \vec{r}_2 a \vec{r}_3 ,

$$\ddot{\vec{r}}_i = G \left(\frac{m_j \vec{r}_{ij}}{r_{ij}^3} + \frac{m_k \vec{r}_{ik}}{r_{ik}^3} \right) \quad (5.6)$$

pro všechna i, j, k taková, že $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ a $j < k$. Tyto rovnice jsou vzájemně provázány, jak plyne ze vztahu (5.5). Protože \vec{r}_i jsou vektory o dvou složkách, v (5.6) vlastně vystupuje 6 neznámých funkcí času. Soustava (5.6) ale nemá jednoznačné řešení. Proto v čase $t = 0$ zadáme ještě počáteční polohy \vec{p}_i všech tří těles a jejich rychlosti \vec{v}_i . Jinými slovy, přidáváme *počáteční podmínky*

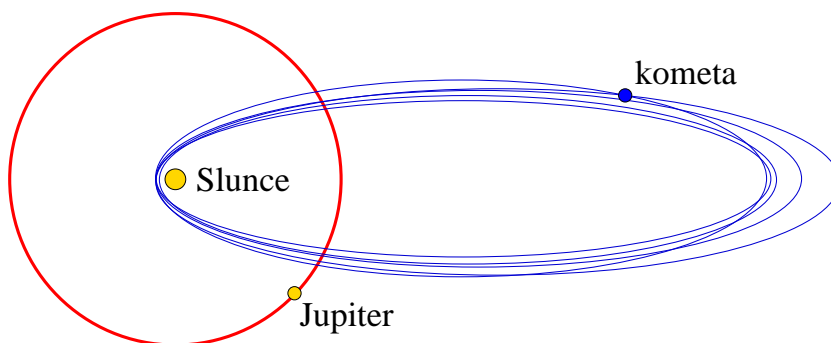
$$\vec{r}_i(0) = \vec{p}_i, \quad \dot{\vec{r}}_i(0) = \vec{v}_i \quad \text{pro } i = 1, 2, 3, \quad (5.7)$$

které samozřejmě mají podstatný vliv na výsledný pohyb těles.

Z teorie diferenciálních rovnic je známo, že řešení problému (5.6)–(5.7) existuje jednoznačně na tak dlouhém intervalu, kde jsou všechny tři vzdálenosti r_{ij} pro $i < j$ nenulové, tj. tělesa vzájemně nekolidují. Pravděpodobnost, že se dva či více hmotných bodů srazí na pevném časovém intervalu je však rovna nule, i když tento případ může teoreticky nastat. V reálném světě sice dochází k řadě kolizí, ale nesmíme zapomínat, že v klasickém problému více těles se uvažují jen hmotné body, zatímco skutečná tělesa mají vždy kladný rozměr.

Existuje velice bohatá literatura o numerickém řešení soustavy obyčejných diferenciálních rovnic, viz např. [221], [280]. Numerickým řešením problému (5.6)–(5.7) můžeme např. snadno simulovat, jaký vliv má Jupiter na dráhy komet (srov. [122] a obr. 5.5).

Uveďme si jiný typický příklad, který nelze řešit analyticky, a je tedy třeba hledat řešení numerické (detaily viz [122]). Země obíhá kolem Slunce rychlostí 29.8 km/s



Obr. 5.5. Vliv Jupitera na dráhu komety

(viz (4.11)). Kdybychom chtěli vyslat sondu přímo ke Slunci, pak bychom ji museli vyslat opačným směrem také rychlostí 29.8 km/s a sonda by pak padala volným pádem do Slunce. Protože je kinetická energie přímo úměrná čtverci rychlosti, je energeticky mnohem méně náročné vyslat sondu vhodným směrem nejprve k Jupiteru. Na to totiž stačí druhá kosmická rychlost 11.2 km/s (viz (4.15)). Silné gravitační pole Jupitera pak sondu nasměruje ke Slunci,⁴ viz obr. 5.6. Tomuto manévru se někdy říká *gravitační ping-pong*.⁵



5.4. Problém N těles

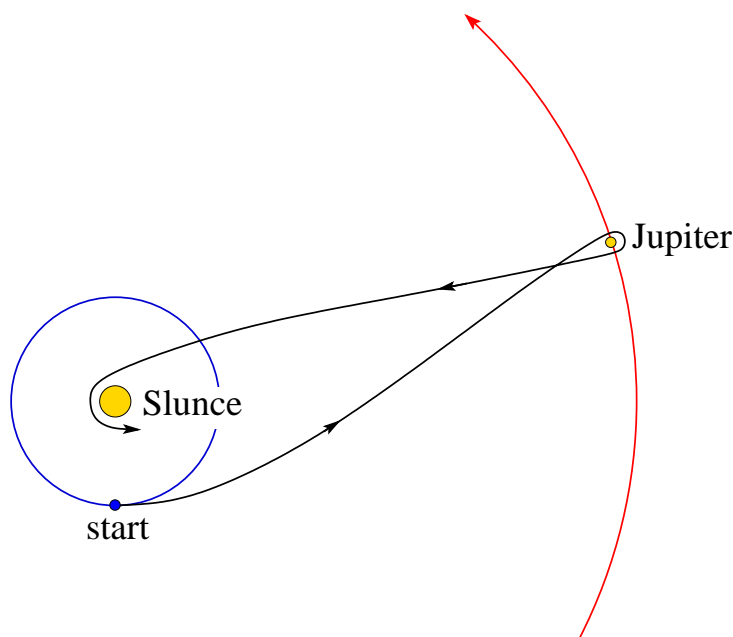
Pro více těles lze zcela analogicky jako v předchozím oddílu odvodit ze zákona síly a gravitačního zákona soustavu diferenciálních rovnic popisujících jejich trajektorie [122]. Uvažujme tedy N těles o hmotnostech $m_i \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, N$, která na sebe vzájemně gravitačně působí. Označme pro jednoduchost $r_i = \vec{r}_i$, tj. šipku budeme dále vynechávat. Vektorové trajektorie r_i uvažovaných těles jsou popsány soustavou nelineárních diferenciálních rovnic

$$\ddot{r}_i = G \sum_{j \neq i}^N \frac{m_j (r_j - r_i)}{|r_j - r_i|^3} \quad (5.8)$$

pro $i = 1, \dots, N$ s danými počátečními podmínkami na polohu $r_i(0)$ a rychlost $\dot{r}_i(0)$ všech N těles. Zde $|\cdot|$ opět označuje délku vektoru.

⁴Podobný tvar dráhy měla Luna 3, která vyfotografovala odvrácenou stranu Měsíce již v roce 1959. Obdobnou návratovou dráhu využila i posádka Apolla 13 při havárii v roce 1970.

⁵Myšlenka urychlování družic gravitačním polem planet vznikla kolem roku 1960 při numerických simulacích problému více těles. Jejím autorem je americký matematik Michael Andrew Minovitch.



Obr. 5.6. Ekonomická dráha sondy vyslané ze Země ke Slunci

Tato úloha má obrovské množství konkrétních aplikací. Jako příklad složitějšího gravitačního ping-pongu si připomeňme cestu sondy Voyager 2 k Jupiteru, Saturnu, Uranu a Neptunu, když byly tyto planety na stejné straně od Slunce. Přibližnou dráhu sondy navrhl v roce 1965 Gary Arnold Flandro. Skutečná trajektorie se pak získala numerickým řešením soustavy (5.8). Každá planeta svým gravitačním polem sondu značně urychlovala⁵ a také měnila její směr.⁶ Sonda vlastně padala do jámy jejího gravitačního potenciálu. Někdy hovoříme o tzv. *gravitačním praku*. Rychlost sondy po těsném průletu kolem planety klesá pomaleji, protože dráha planety je zakřivená. Vyšší kinetickou energii získává sonda na úkor celkové energie planety.

Pomocí soustavy (5.8) se někdy také simuluje evoluce galaxií nebo dokonce galaktických kup (viz např. (7.2) a oddíl 7.3). Galaxie se přitom vzájemně pohybují obrovskými rychlostmi dosahujícími až několika procent rychlosti světla. Příslušné relativistické jevy ale soustava (5.8) nepopisuje, ani neumožňuje zahrnout působení slapů (viz obr. 5.7), rotaci galaxií, konečnou rychlost šíření gravitační interakce apod. Jde tedy opět jen o přibližný model.

Soustava (5.8) nesplňuje z matematické analýzy známé Carathéodoryho postačující podmínky pro existenci řešení, protože pravá strana soustavy (5.8) není spojitá. Přesto řešení lokálně existuje, pokud tělesa nekolidují. Soustava (5.8) má také ce-

⁵Změna směru je velmi energeticky náročná. Jde vlastně také o urychlování. Sonda letící rychlostí v potřebuje ke změně směru o 60° stejnou energii jako k dosažení rychlosti v . Přitom je třeba sondu otočit o 120° a udělit jí rychlost o velikosti v .



Obr. 5.7. Kolize dvou galaxií nazývaných Tykadla nebo též Antény. Za každou z nich je zřetelný „slapový ocas“ znázorňující jejich původní téměř eliptické keplerovské dráhy. V důsledku slapových sil obě galaxie časem splynou. Tento proces nelze řešit jako klasický problém dvou těles.

lou řadu nerealistických řešení. Například v práci [237] se uvažuje 5 těles, která se všechna v konečném čase dostanou do nekonečna pro vhodné počáteční podmínky. V tomto případě je chyba modelu nekonečná. Newtonova teorie gravitace tedy popisuje fyzikálně zcela absurdní situace. V článku [118] se zase uvádí řešení, kdy tři stejně hmotná tělesa obíhají po trajektorii ve tvaru osmičky, což zatím nebylo ve vesmíru pozorováno.



5.5. Celková chyba aproximace

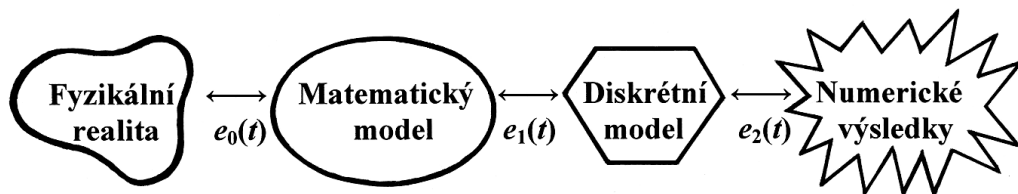
Jak již bylo řečeno, H. Poincaré věděl, že řešení soustavy (5.8) lze analyticky napsat jen v několika speciálních případech, a dokázal, že ho obecně nelze explicitně vyjádřit nějakým vzorcem. Proto se hledá řešení přibližné. Spojitý matematický model se aproximuje diskrétním (někdy též nazývaným diskretizovaným) konečněrozměrným modelem, jehož řešení se opírá o numerické algoritmy (např. metodu Rungeovu–Kuttovu, symplektickou metodu, mnohokrokové metody) a který lze implementovat na počítači.

Při numerické simulaci vývoje Sluneční soustavy na miliardy let⁷ dopředu či dozadu se někteří badatelé příliš nestarají o velikost chyby, které se přitom dopouštějí. Podívejme se proto, jaká nebezpečí na ně číhají, a do jaké míry lze věřit tomu,

⁷Takové simulace připomínají výpočet počasí na měsíce dopředu.

co ve skutečnosti vypočítají bez znalosti teorie numerického řešení diferenciálních rovnic [281].

Na obr. 5.8 je obecné schéma aproximace nějaké fyzikální reality na počítači, kde se vždy dopouštíme tří základních chyb: chyby modelu $e_0 = e_0(t)$, diskretizační chyby $e_1 = e_1(t)$ a zaokrouhlovacích chyb $e_2 = e_2(t)$. Snažíme se je udělat současně co nejmenší. Pokud by jedna z nich byla velká, pak i celková chyba $e = e_0 + e_1 + e_2$ bude velká. Více velkých chyb se obecně neruší. Navíc nemá velký smysl se snažit udělat např. diskretizační chybu e_1 velice malou, když ostatní chyby budou velké. Chyba e_1 se obvykle skládá z mnoha dalších chyb: chyby numerické metody (numerické integrace), různých interpolačních, aproximačních a extrapolacních chyb apod. K otestování velikosti skutečných numerických chyb e_1 a e_2 pro daný počítačový program je vhodné porovnat přesné analytické řešení nějakého speciálního problému N těles s jeho numerickým řešením.



Obr. 5.8. Chyba modelu $e_0(t)$ je rozdíl mezi fyzikální realitou a jejím matematickým popisem. Diskrétní model se liší od matematického modelu o diskretizační chybu $e_1(t)$. Konečně v $e_2(t)$ jsou zahrnuty zaokrouhlovací chyby (ev. iterační chyba).

Pokud se alespoň dvě tělesa k sobě těsně přiblíží v čase t (tj. $r_i(t) \approx r_j(t)$ pro $i \neq j$), ve jmenovateli na pravé straně (5.8) se odečítají dva skoro stejně velké vektory. Při numerickém řešení tohoto problému vznikají neustále nejen diskretizační chyby, ale i nezanedbatelné zaokrouhlovací chyby. Proto je v průběhu výpočtu třeba pořád sledovat, zda se od sebe neodečítají dvě skoro stejně velká čísla. Příklady uvedené v [135] by měly být dostatečným varováním. O katastrofální ztrátě přesnosti v důsledku zaokrouhlovacích chyb e_2 se lze dočíst např. v [154] či [282].

Pro $N \geq 3$ soustava (5.8) není *stabilní vůči trvale působícím poruchám*, tj. malé perturbace pravé strany způsobují velké změny v řešení na dlouhém časovém intervalu [281], s.150. Soustava (5.8) také není *stabilní vůči počátečním podmínkám*, tj. nepatrná změna počátečních podmínek časem vyvolá velkou změnu řešení. Z tohoto důvodu je korektní numerický výpočet mimořádně obtížný. Například planetka č. 99942 Apophis o průměru 270 m se přiblíží k Zemi v pátek 13. dubna 2029 na vzdálenost pouhých 30 000 km od zemského povrchu. Zatím ale nelze spolehlivě odhadnout nejmenší vzdálenost Apophisu při jeho dalším přiblížení k Zemi v roce 2036. Celková chyba numerických metod pro řešení soustavy (5.8) obvykle roste exponenciálně s časem [280]. Proto je také nutno korigovat i několikrát dráhy sond během letu k planetám.

K tomu, abychom zjistili, že diskretizační chyba je malá, se obvykle numerické řešení srovnává s řešením s poloviční délkou integračního kroku (viz [221], s. 455), o němž se předpokládá, že je „přesné“. Abychom zjistili vliv zaokrouhlovacích chyb, porovnává se řešení soustavy (5.8) ve dvojnásobné osmibytové aritmetice s řešením v rozšířené desetibytové aritmetice, i když ani tato heuristická metoda nemusí stačit [135].

Přesné řešení soustavy (5.8) je ryze deterministické. Trvale působící poruchy způsobené diskretizačními a zaokrouhlovacími chybami nám však ustavičně znehodnocují numerické řešení a postupně vedou k jeho stále větší chaotičnosti. Abychom se přesvědčili, že vliv těchto trvale působících poruch je ještě malý, používá se integrace vpřed a pak vzad, což nám díky jednoznačnosti spojitého řešení soustavy (5.8) dovoluje stanovit, jak daleko jsme se vzdálili od původních počátečních podmínek.

Označme $f = f(r)$ pravou stranu soustavy (5.8), kde $r = (r_1, \dots, r_N)$. Následující věta nám umožňuje místo zpětné integrace se záporným integračním krokem použít též integraci dopřednou na takovém intervalu $[0, T]$, kde tělesa nekolidují. V tomto případě startujeme z již vypočtené polohy $r(T)$ a jen změníme znaménko u rychlostí $(\dot{r}_1(T), \dots, \dot{r}_N(T))$.

Věta 5.1. *Nechť vektorová funkce $r = r(t)$ je jediné řešení soustavy*

$$\ddot{r} = f(r) \quad (5.9)$$

na intervalu $[0, T]$ s danými počátečními podmínkami

$$r(0) = r_0 \quad \text{a} \quad \dot{r}(0) = v_0. \quad (5.10)$$

Pak funkce $s = s(t)$ definovaná vztahem

$$s(t) = r(T - t) \quad (5.11)$$

řeší tutéž soustavu (5.9) s počátečními podmínkami $s(0) = r(T)$ a $\dot{s}(0) = -\dot{r}(T)$ a platí

$$s(T) = r_0 \quad \text{a} \quad \dot{s}(T) = -v_0. \quad (5.12)$$

D ů k a z . Podle (5.11) a (5.9) máme

$$\ddot{s}(t) = (-\dot{r}(T - t))' = \ddot{r}(T - t) = f(r(T - t)) = f(s(t)).$$

Vidíme tedy, že s splňuje stejnou soustavu rovnic (5.9) jako r . Pro koncové podmínky podle (5.11) a (5.10) platí vztahy (5.12),

$$s(T) = r(0) = r_0 \quad \text{a} \quad \dot{s}(T) = -\dot{r}(T - T) = -\dot{r}(0) = -v_0. \quad \square$$

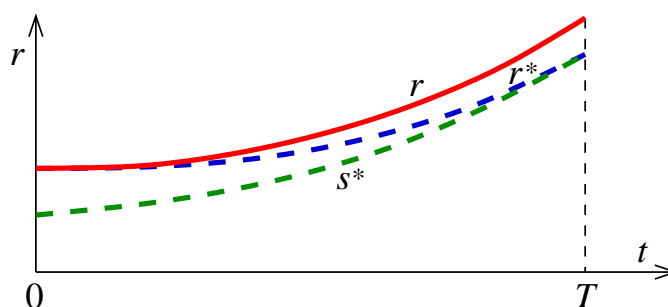
Věta se používá zejména na dlouhé časové intervaly takto. Označme r^* , resp. s^* numerické řešení soustavy (5.9) s počátečními podmínkami (5.10), resp.

$$s(0) = r^*(T) \quad \text{a} \quad \dot{s}(0) = -\dot{r}^*(T).$$

Pokud $\delta > 0$ je zadaná tolerance a

$$|s^*(T) - r_0| + |\dot{s}^*(T) + v_0| \gg \delta,$$

pak ani obecně nemůže platit $|r(T) - r^*(T)| + |\dot{r}(T) - \dot{r}^*(T)| < \delta$, kde r je přesné řešení, tj. numerická chyba původního problému (5.9)–(5.10) je většinou také velká, jak je schematicky znázorněno na obr. 5.9.



Obr. 5.9. Použití věty 5.1 k odhadu chyby při numerickém řešení problému N těles. Symbolem r je označeno přesné řešení, r^* numerické řešení a s^* je kontrolní zpětné řešení.

Zásadním nedostatkem při matematickém modelování je, že se často ztotožňuje navrhovaný model s realitou. Například rychlost gravitační interakce je konečná, a proto soustava rovnic (5.8) nepopisuje realitu naprosto přesně. Při numerických simulacích se chyba modelu e_0 neustále akumuluje, zatímco zaokrouhlovací chyby se statisticky částečně ruší. Chyba modelu v sobě zahrnuje např. chybu v určení různých fyzikálních či geometrických údajů, počátečních nebo koncových podmínek na polohy a rychlosti apod. Navíc žádný fyzikální proces není striktně deterministický, zatímco řešení soustavy (5.8) deterministické je.

Jak již bylo řečeno, Newtonova teorie předpokládá nekonečnou rychlost šíření gravitačního působení. Proto bychom měli uvažovat souřadnice planet (či jiných těles) tam, kde se planeta právě nachází, a nikoliv tam, kde ji právě pozorujeme. Například světlo z Jupitera k nám letí v průměru 45 minut a za tu dobu se podle (4.10) posune Jupiter přibližně o 35 000 km. Merkur se zase při svém nejbližším přiblížení k Zemi posune o více než 3 své průměry, než jeho odražené světlo doputuje na Zemi. Vzniklá odchylka činí přes půl úhlové minuty! Podobně se posune Neptun o jeden svůj průměr. Tyto drobné chyby modelu se ale v průběhu výpočtu neustále hromadí, což na dlouhých časových intervalech může působit problémy. Proto pokud provádíme

numerické simulace na miliony nebo dokonce miliardy let dopředu (či nazpět), pak nemá příliš smysl z nich dělat nějaké závažné závěry, jak se občas stává. Numerické výsledky totiž záleží nejenom na chybě použité numerické metody, zaokrouhlovacích chybách, použitém počítači, ale i na programovacím jazyku či na způsobu naprogramování.

Velké chyby modelu se rovněž dopouštíme, když aplikujeme problém N těles na simulaci vývoje galaxií v zakřiveném prostoročasu. Přitom se často stává, že hlavní důraz je kladen na estetický dojem a nikoliv na odhad chyby modelu či diskretizační chyby. Gravitace se ale v galaktických měřítkách projevuje zcela jinak než ve Sluneční soustavě. Kdybychom např. sestavili zmenšený model spirální galaxie o průměru 10 au, kde by hvězdy byly nahrazeny asteriody, pak by takový objekt nerotoval jako galaxie pro žádné počáteční podmínky. Proto bychom neměli přeceňovat numerické simulace a vykládat si je způsobem, který se nám hodí (viz [141]).

Na závěr ještě poznamenejme, že vůbec není jasné, jak definovat skutečné těžiště soustavy dvou či více těles o nestejných hmotnostech, když rychlost gravitační interakce nebyla zatím změřena.



6. Zatmění a aberace světla

*Číslo jsou jediná
univerzální řeč ve vesmíru.*

NATHANAEL WEST

6.1. Význam zatmění při poznávání vesmíru

Sledováním zatmění Slunce, Měsíce a dalších těles lze získat řadu důležitých údajů. Již antičtí myslitelé při pozorování stínu Země během měsíčních zatmění poznali, že je Země kulatá a že se volně vznáší v prostoru. Z tvaru zemského stínu (viz obr. 2.3) pak odhadli, že Země je třikrát větší než Měsíc.

Pomocí starých záznamů babylónských astronomů o slunečních a měsíčních zatměních můžeme nyní zpětně vypočítat nepravidelnosti v rotaci Země a rychlost jejího zpomalování (viz oddíl 2.7). Záznamy o zatměních rovněž umožnily upřesnit několik kalendářů starověkých civilizací, což nám nyní dovoluje na den přesně zjistit data některých významných událostí.

Zatmění slunečního kotouče Venuše zase pomohlo zpřesnit vzdálenost Země–Slunce (viz oddíl 2.6, obr. 6.1 a [251]). Michail V. Lomonosov při něm v roce 1761 objevil prosvětlenou atmosféru Venuše.

V roce 1911 Albert Einstein při svém pražském pobytu odvodil, že se dráha světla hvězd v okolí Slunce zakřivuje v důsledku gravitace. Tento efekt obecné teorie relativity byl poprvé vyfotografován při úplném slunečním zatmění roku 1919. Světlo hvězd se odchýlilo od svého původního směru o necelé dvě úhlové vteřiny, jak bylo zjištěno porovnáním s nočními fotografiemi téže části oblohy. Celý experiment je popsán v [85].

Úplná zatmění Slunce nabízejí jedinečnou možnost pozorování slunečních protuberancí, sluneční chromosféry a koróny, která je klíčem k pochopení mechanismu dějů odehrávajících se uvnitř naší nejbližší hvězdy — Slunce. V roce 1983 byl při úplném zatmění Slunce objeven prachový prstenec obíhající Slunce v jeho těsné blízkosti téměř v rovině ekliptiky.

Měsíc na své pouti po obloze také občas zastíní některý neviditelný zdroj rádiových vln, které při zákrytu odstíní, a po něm se vlny zase objeví. Polohu zdroje lze pak snadno zpřesnit jako jeden z průsečíků dvou kružnic představujících obvod Měsíce na počátku a při ukončení zákrytu. Tento trik se užíval zejména v době, kdy přímá detekce poloh radiových zdrojů nebyla přesná.

Nepatrná zatmění vzdálených hvězd exoplanetami a jejich exoměsíci umožňují pomocí Keplerových zákonů určit hmotnosti mateřských hvězd i další parametry těchto soustav (viz [294]). Lze také studovat spektra atmosfér exoplanet a v nich odhalovat biogenní prvky (H, C, N, O, P) a molekuly (např. CH_4) a pátrat tak po stopách mimozemského života.



Obr. 6.1. Třetí kontakt Venuše při přechodu přes sluneční disk dne 6. června 2012 (foto Jozef Leško)



6.2. Krátce z historie pozorování zatmění

Ze starověku se traduje historka o neblahém osudu dvou čínských císařských hvězdářů Si a Che. Ti se roku 2137 př.n.l. opili a zanedbali tak své povinnosti v průběhu úplného slunečního zatmění. Měli totiž střílet šípy na obludu požírající Slunce. Císařův rozkaz byl jednoznačný: poprava. Tato událost ovšem není doložena žádnou písemností, protože v té době ještě Čína neznala písmo (to vzniklo až po roce 2000 př.n.l.).

Nejstarší text s obrázkem zatmění je na kosti nalezené v Anyang v čínské provincii Henan [160]. Podle [79], s. 82, se jeho původ datuje kolem roku 1300 př. n. l. V [254] je seznam 36 zatmění Slunce mezi roky 720–495 př. n. l. zaznamenaných v klasické čínské knize *Čchun-čchiou* (Jara a podzimy).

Další ověřený popis zatmění Slunce z období kolem roku 750 př. n. l. je zaznamenán klínovým písmem na hliněné destičce z Mezopotámie uložené v Britském muzeu v Londýně (viz [261]). V Evropě poprvé předpověděl zatmění Slunce roku 585 př. n. l. řecký myslitel Thales z Milétu (cca 620–555 př. n. l.). Učinil tak patrně na základě znalosti periodicity zatmění (viz [265]). V článku [239] jsou uvedeny doslovné překlady záznamů zatmění na hliněných destičkách muslimských astronomů z let 829–1019.



6.3. Vznik a periodicitata zatmění

Kdyby Měsíc obíhal Zemi v rovině ekliptiky, pozorovali bychom zatmění Měsíce při každém úplňku a zatmění Slunce při každém novu. Sklon dráhy Měsíce k ekliptice je ale 5.2° , přičemž průsečíky jeho dráhy s ekliptikou se nazývají *uzly*. Proto k zatmění Slunce někde na Zemi může dojít tehdy a jen tehdy, když je Slunce vzdáleno od uzlu nejvýše o 10° v rovině ekliptiky a zároveň je Měsíc v novu. Podobně nastávají zatmění Měsíce.

Protože se Země pohybuje kolem Slunce po eliptické dráze s malou excentricitou $e = 0.0167$, mění se úhlový průměr Slunce od 0.52° (v létě) do 0.54° (v zimě). Rovněž úhlový průměr Měsíce se v důsledku jeho eliptické dráhy s excentricitou $e = 0.0554$ mění v rozmezí 0.49° až 0.56° (viz [51]). Zcela náhodou jsou tyto úhly téměř stejné jako pro Slunce (viz obr. 6.2). Jestliže jsou postupně středy Slunce, Měsíce a Země přibližně v jedné přímce (viz oddíl 6.5), vidíme z některých míst na Zemi zatmění Slunce. Je-li navíc úhlový průměr Měsíce menší než úhlový průměr Slunce, nastává prstencové zatmění. V opačném případě nastává zatmění úplné.

Jestliže Země leží na úsečce Slunce–Měsíc nebo v její blízkosti, dochází k zatmění Měsíce. To je vidět z celé neosvětlené polokoule Země, zatímco úplné zatmění Slunce jen z úzkého pásu na zemském povrchu. Celá teorie vzniku zatmění je podrobně popsána např. v [23].

Již staří Babylóňané si povšimli, že zatmění vykazují jistou periodičnost. Jejich znalost pak umožňovala v minulosti předpovídat nejen zatmění Měsíce, ale i Slunce (viz [260], s. 133). Abychom objasnili, čím je to způsobeno, uveďme nejprve dvě definice.

Drakonický měsíc = 27.21222 dne je doba od průchodu Měsíce uzlem k následujícímu průchodu týměž uzlem.

Synodický měsíc = 29.53059 dne je doba od jedné fáze Měsíce k téže fázi následující.¹

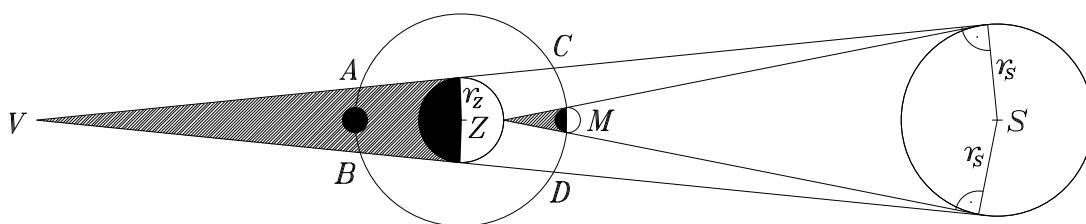
Nyní se snadno můžeme přesvědčit, že

$$242 \text{ drakonických měsíců} \approx 223 \text{ synodickým měsícům (= perioda cyklu)}. \quad (6.1)$$

Je to vlastně podobné nejmenšímu společnému násobku [158], kde se místo celých čísel uvažují čísla racionální. Od 6. stol. př. n. l. Chaldejci nazývali tuto periodu zatmění *saros*. Její délka je 18 let 9 až 11 dní 7 hodin a 43 minuty². To, že počet dní je buď 9, 10, anebo 11, je dáno tím, že perioda saros může zahrnovat 3 až 5 přestupných let. Během této doby nastane 40 zatmění Slunce (14 prstencových, 12 úplných a 14 částečných) a 26 zatmění Měsíce (17 úplných a 9 částečných). Předchozí čísla je nutno chápat jen orientačně, protože se s časem mění. Navíc úplná zatmění Slunce mohou za mnoho milionů let vymizet, neboť se střední vzdálenost Měsíce od Země neustále zvětšuje (i když jen rychlostí 38 mm za rok). Na druhé straně roste střední vzdálenost Země od Slunce, jak uvidíme v kapitole 13. Poznamenejme ještě, že zatmění Měsíce mají stejnou délku periody jako zatmění Slunce.

Rozdíl pravé a levé strany ve vztahu (6.1) je jen 0.03567 dne. Proto se každé úplné zatmění po několika periodách stane částečným a později už vůbec nenastane, neboť je nahrazeno nějakým novým zatměním. To je důvod, proč se číslují tyto periody. Jejich číslování zavedl G. van den Bergh roku 1955. Například pro zatmění Slunce (viz [82]):

saros 130 byl 26. února 1998 a bude opět 9. března 2016,
saros 135 byl 22. srpna 1998 a bude opět 1. září 2016,
saros 140 byl 16. února 1999 a bude opět 26. února 2017,
saros 145 byl 11. srpna 1999 a bude opět 21. srpna 2017.



Obr. 6.2. Stíny Země a Měsíce



¹Synodický měsíc odpovídá periodicitě v rozestavení Země, Slunce a Měsíce v průmětu do ekliptiky. Není to tedy periodičita vzhledem ke hvězdám.

²Za 7 hodin a 43 minuty se Země otočí téměř o 120° na západ. Proto po třech periodách sarosu dochází k zatmění Slunce téměř ve stejné místě.

6.4. Proč jsou zatmění Měsíce méně častá než zatmění Slunce

Odpověď na tuto otázku podává obr. 6.2. Země osvětlená Sluncem za sebou vrhá kuželový stín, který je dlouhý zhruba $d = 1\,356\,000$ kilometrů. Pokud se do něj dostane Měsíc, nastane jeho zatmění. Označíme-li V vrchol stínu Země, S střed Slunce a Z střed Země, můžeme hodnotu $d = |VZ|$ snadno zjistit z podobnosti pravoúhlých trojúhelníků (srov. obr. 6.2). Platí totiž, že

$$\frac{r_Z}{r_S} = \frac{|VZ|}{|VS|} = \frac{d}{d + R_Z},$$

kde $r_Z = 6378$ km, $r_S = 695\,990$ km a $R_Z = 1.496 \cdot 10^8$ km jsou po řadě střední hodnoty poloměru Země, poloměru Slunce a vzdálenosti Země od Slunce.

Střední vzdálenost Měsíce od Země je přibližně $R_M = 384\,402$ km (tj. délka úsečky AZ na obr. 6.2). Jak již bylo řečeno, k zatmění může dojít jen tehdy, je-li Měsíc v blízkosti ekliptiky. Jestliže se navíc nachází na oblouku \widehat{AB} (viz obr. 6.2), nastává zatmění Měsíce, a jestliže je na oblouku \widehat{CD} , nastává někde na Zemi zatmění Slunce.

Povšimněme si ale, že oblouk \widehat{AB} je mnohem kratší než oblouk \widehat{CD} . Oproti nákresu na obr. 6.2 je skutečný úhel při vrcholu V velmi malý (asi 0.5°), a proto poměr jejich délek je v prvním přiblížení roven poměru délek úseček AB a CD . Tedy

$$\frac{|AB|}{|CD|} = \frac{|AV|}{|CV|} \approx \frac{d - R_M}{d + R_M} \approx 0.56.$$

Vidíme, že tento poměr zhruba odpovídá poměru (26 měsíčních zatmění)/(40 slunečních zatmění) $= 0.65$ během periody saros (viz oddíl 6.3).

Slunečních zatmění je tedy více než měsíčních. K zatmění Měsíce může dojít až třikrát v jednom roce, ale v některých letech nemusí nastat vůbec. Naproti tomu každoročně na Zemi můžeme spatřit 2 až 5 zatmění Slunce různého typu. Průměrně připadají dvě úplná zatmění na dobu tří let. Rozměry pásu (šíře max. 270 km, délka tisíce až desetitisíce km) stínu Měsíce na povrchu Země však neumožňují masové pozorování úplného zatmění Slunce. Pro jedno konkrétní místo na Zemi tak dojde k úplnému zatmění Slunce zhruba jednou za 360 let.

Doba trvání zatmění je závislá především na vzdálenosti pozorovatele od středové čáry pásu. Částečné zatmění Slunce může trvat až dvě a půl hodiny, zatímco u úplného zatmění se čas počítá na minuty (na ose obvykle 1 až 4 minuty, maximálně však 7.6 minuty). Měsíční stín zasahuje Zemi nejvýše 6 hodin a rychlost jeho pohybu (vždy od západu k východu) je 600–1000 m/s.

Zajímavý úkaz nastal 3. listopadu 2013 v Africe, kde se prstencové zatmění Slunce změnilo na úplné.



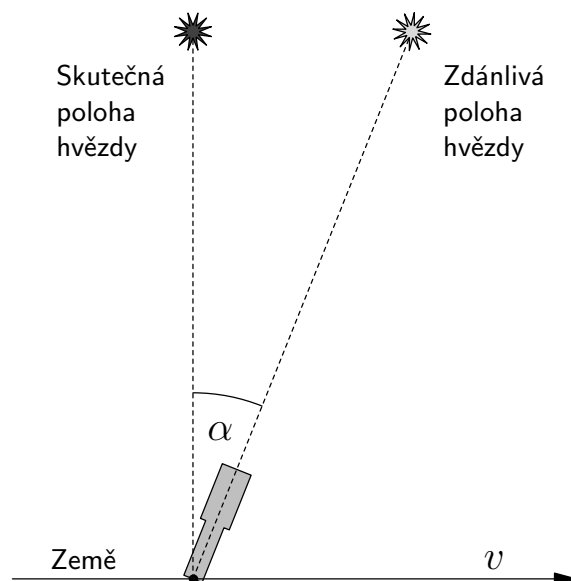
6.5. Co způsobuje aberace světla při úplném zatmění Slunce

V tomto oddílu ukážeme, že při úplném zatmění Slunce nejsou paradoxně Země, Měsíc a Slunce v jedné přímce, jak by se mohlo zdát. Je to důsledkem málo zřetelného jevu, který se nazývá světelná aberace (viz oddíl 2.9).

Země obíhá Slunce rychlostí $v \approx 30$ km/s. Hvězdy pozorované kolmo ke směru okamžitého pohybu Země se zdají být vychýleny o aberační úhel α . Abychom dostali sledovanou hvězdu doprostřed zorného pole dalekohledu, je třeba dalekohled mírně vychýlit právě o aberační úhel α (viz obr. 6.3). Aberace světla je důsledkem konečné rychlosti šíření elektromagnetických vln. Aberační úhel α je poměrně malý, a tak je v obloukové míře téměř roven své tangentě. Můžeme proto psát (viz (2.9))

$$\alpha = \frac{v}{c} = \frac{30}{300\,000} = 0.0001.$$

Aberační úhel je tedy roven $\alpha = 0.0001$ rad $\approx 20''$.

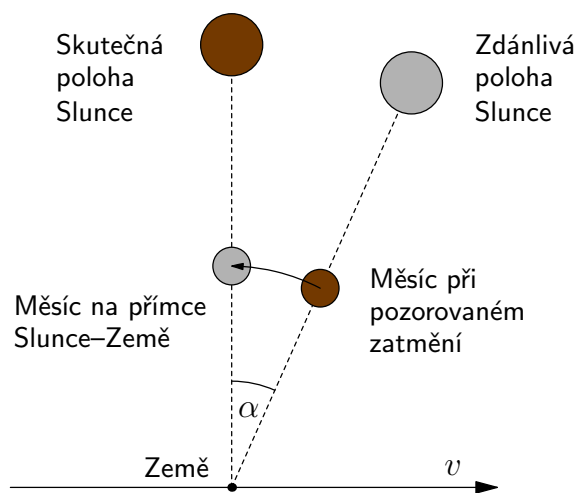


Obr. 6.3. Při pohybu pozorovatele vůči zdroji dochází ke světelné aberaci α . Dalekohled je třeba vychýlit o úhel α , který je ve skutečnosti mnohonásobně menší, než je znázorněno na obrázku.

Položme si nyní otázku, kdy vlastně nastává zatmění Slunce. Jev světelné aberace má totiž některé zcela nečekané důsledky. Všeobecně se soudí, že při úplném zatmění Slunce jsou Země, Měsíc a Slunce v jedné přímce. Vzhledem k aberaci světla to ale není tak úplně pravda. Všechna tři tělesa budou v přímce až 40 sekund po středu zatmění, což je málo známá skutečnost. K pochopení tohoto překvapivého jevu si

stačí uvědomit několik základních faktů. Předně se Měsíc každý den posune podél ekliptiky vzhledem ke Slunci přibližně o $12^\circ (= 360^\circ/30)$ směrem na východ, tj. o půl stupně za hodinu a o $30''$ za minutu. K posunu o aberační úhel $\alpha = 20''$ potřebuje tedy Měsíc 40 sekund. Správně bychom měli vzít v úvahu i vlastní světelnou aberaci Měsíce, ale rychlost Měsíce kolem Země je přibližně jen 1 km/s, což je ve srovnání s rychlostí Země v kolem Slunce téměř zanedbatelné. Světelná aberace Měsíce činí pouhých

$$\alpha' = 0.7''. \quad (6.2)$$



Obr. 6.4. Při úplném zatmění Slunce nejsou Země, Měsíc a Slunce v jedné přímce. Tento paradox je způsoben aberací světla.

Pro lepší představu je celá situace znázorněna na obr. 6.4. V okamžiku středu úplného zatmění Slunce je nutno čekat zhruba 40 sekund, než se Země, Měsíc a Slunce dostanou do jedné přímky. V tom případě ovšem už může být po úplném zatmění, pokud bude trvat např. jen jednu minutu (viz oddíl 6.4). Díky aberaci, která je způsobena konečnou rychlostí světla, tedy vidíme jev, který ve skutečnosti probíhá jinak.



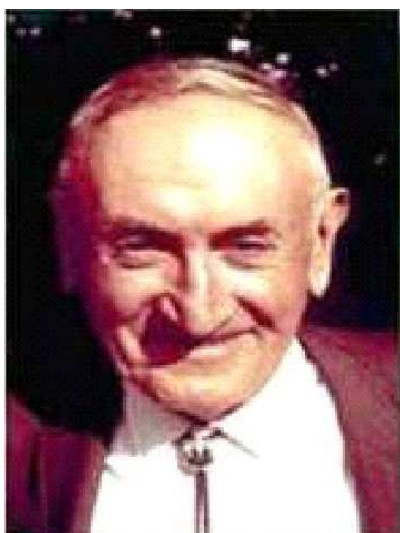
7. Jak Zwicky předpověděl existenci temné hmoty

*Nikdy neztotožňujme
matematický model
s fyzikální realitou.*

Základní fyzikální poučka

7.1. Fritz Zwicky

V této kapitole se podrobně podíváme, jak Fritz Zwicky předpověděl existenci temné hmoty. V roce 1933 publikoval průlomový článek [298], který později zcela pozměnil vývoj astronomie a kosmologie na mnoho desetiletí. Pomocí věty o viriálu zjistil, že k vysvětlení rychlých pohybů zhruba 800 galaxií v obří galaktické kupě Abell 1656 v souhvězdí Vlasy Bereniky (*Coma Berenices*) je třeba předpokládat existenci



Obr. 7.1. Fritz Zwicky (1898–1974)

400krát větší hmotnosti nesvítící hmoty než svítící hmoty, aby tato kupa držela gravitačně pohromadě. V roce 1936 došel nezávisle k podobnému závěru i Sinclair Smith [257], s. 27, při zkoumání nejbližší galaktické kupy v souhvězdí Panny, která je od nás vzdálena 15 až 22 Mpc. Podle dnešních odhadů (viz např. [193] a [195]) by však mělo být nesvítící hmoty zhruba jen o řád více než hmoty svítící.

Termín *temná hmota* (něm. die dunkle Materie) použil Fritz Zwicky ve zmíněném článku [298] na straně 125. Temná hmota (skrytá látka) by svými gravitačními účinky měla rozpínání vesmíru brzdit. V roce 1975 však bylo předpověděno zrychlující se rozpínání vesmíru (viz [80], [273]), které pak bylo koncem 20. století potvrzeno i experimentálně [222]. Proto fyzikové zavedli ještě termín *temná (skrytá) energie*, která naopak rozpínání vesmíru urychluje a působí tak proti gravitaci (viz rozsáhlý přehled literatury v [218]).

Fritz Zwicky se narodil 14. února 1898 v bulharské Varně. Jeho matka Františka roz. Vrčková byla Češka a otec Švýcar. Mladý Fritz v letech 1916–1925 vystudoval matematiku a experimentální fyziku na ETH v Curychu. Pak emigroval do USA. Pracoval na observatořích na Mt. Wilsonu a na Mt. Palomaru a též na California Institute of Technology v Pasadeně, kde získal v r. 1942 profesuru v oboru astronomie.

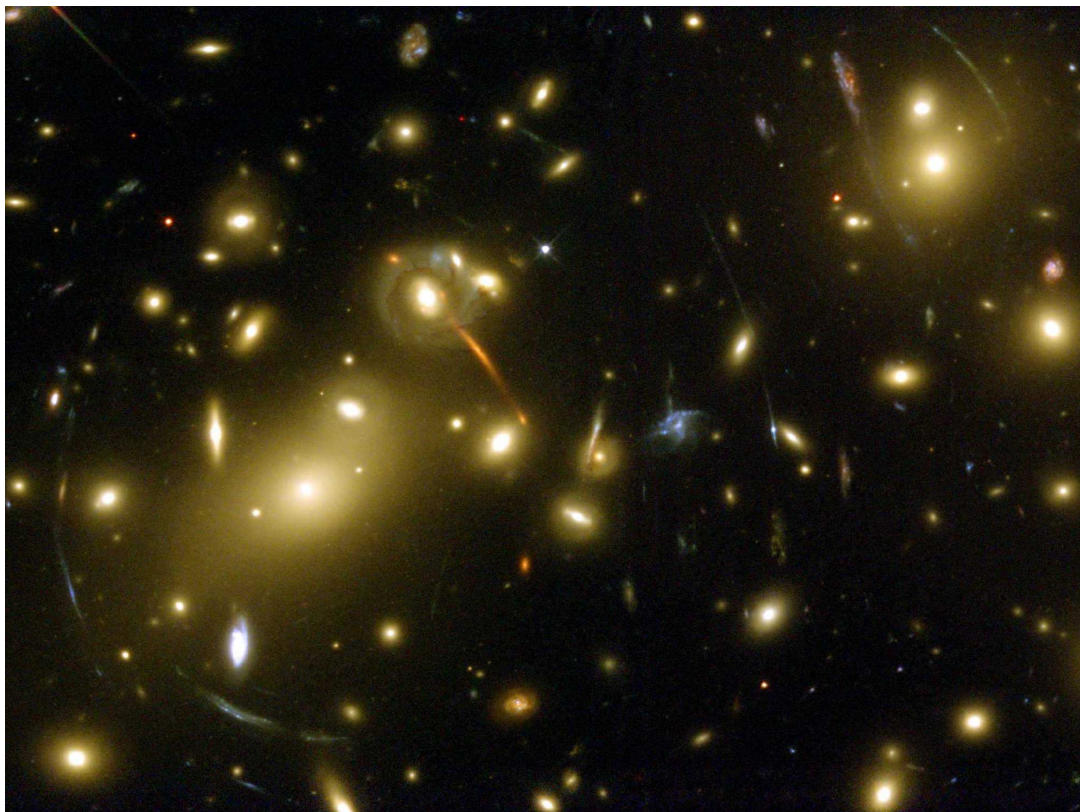
V roce 1934 Zwicky společně s Walterem Baadem (1893–1960) předpověděli existenci neutronových hvězd¹ jako pozůstatků exploze supernov a vyslovili hypotézu, že tento proces by mohl být zdrojem kosmického záření (viz [9] a [195], s. 57). Později je napadlo, že by supernovy mohly být slibnými kandidáty pro měření vesmírné expanze, protože jsou pozorovatelné i z nejvzdálenějších hlubin vesmíru. Jejich myšlenka pak byla použita laureáty Nobelovy ceny za fyziku za rok 2011 k odhalení zrychlené expanze vesmíru (viz [204], [222], [203]). V článku [300], s. 237, Zwicky představil novou metodu gravitačního čočkování mezilehlou galaxií. Uvědomil si totiž, že pravděpodobnost zákrytu dvou galaxií je mnohem větší než pravděpodobnost zákrytu dvou hvězd (viz [268]). Dokonce uvažoval i o gravitačních čočkách tvořených galaktickými kupami (srov. obr. 7.2).

V roce 1929 astronomové Edwin P. Hubble a Milton L. Humason objevili rozpínání vesmíru.² Zwicky na sebe v téže době upozornil článkem [297]. V něm červený (dříve nazývaný rudý) kosmologický³ posuv světla galaxií vysvětluje jinak než rozpínajícím se vesmírem. Předložil svou vlastní teorii tzv. unaveného světla. Domníval se, že červený posuv je způsoben ztrátou energie fotonů, které část své hybnosti předávají látce, kterou pronikají. Fritz Zwicky měl pravdu jen částečně. Foton přicházející z hvězdy skutečně může předat část své hybnosti nějakému atomu, přitom

¹Již v roce 1932 se Lev Landau v článku [163], s. 288, krátce zmiňuje o hvězdách, které by mohly mít hustotu atomového jádra. V současnosti se odhaduje, že vnitřek neutronových hvězd se skládá z chladného kvarkového-gluonového plazmatu a že jejich průměrná hustota je až 3krát vyšší než hustota samotného neutronu.

²Podrobný chronologický popis tohoto objevu je popsán v monografii [193].

³Slovo kosmologický budeme pro jednoduchost dále často vynechávat.



Obr. 7.2. Deformaci prostoročasu galaktickou kupou A2218 odhaluje gravitační čočkování, které předpověděl Fritz Zwicky (foto NASA).

ale zpravidla změni směr, takže jej nezaregistrujeme. Mezigalaktické prostředí má v průměru tak malou hustotu (řádově jen několik protonů na m^3 , kde $m_{\text{proton}} \approx 1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$), že většina nepozměněných fotonů dorazí do našich detektorů bez problémů, o čemž svědčí ostré spektrální čáry. Později si Zwicky svůj omyl uvědomil a napsal další článek [299] o tom, jak lze interpretovat proměnlivou šíři spektrálních čar z rotujících galaxií. Červený posuv spektrálních čar hrál významnou roli i při Zwickyově předpovědi existence temné hmoty.



7.2. Věta o viriálu

Zwickyův objev temné hmoty je založen na větě o viriálu, která slouží k přibližnému odhadu kinetické energie stabilizovaných vázaných systémů. Tuto větu se nejprve pokusíme zformulovat. V trojrozměrném eukleidovském prostoru \mathbb{E}^3 uvažujme soustavu N hmotných bodů o hmotnostech m_1, \dots, m_N , které na sebe vzájemně

gravitačně působí a nejsou ovlivňovány žádnými jinými silami. Jedná se tedy o standardní problém N těles z kapitoly 5. Označme jejich polohové vektory r_1, \dots, r_N (šipku nad r_i budeme opět pro jednoduchost vynechávat), tj. pro každý časový okamžik t je $r_i(t) \in \mathbb{E}^3$ bod trajektorie i -tého hmotného bodu. Pak kinetická a potenciální energie této soustavy jsou dány vztahy

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{r}_i \cdot \dot{r}_i, \quad V = - \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \frac{G m_i m_j}{|r_j - r_i|}, \quad (7.1)$$

kde $\dot{r}_i = dr_i/dt$ označuje časovou derivaci, $G = 6.674 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ je gravitační konstanta, $|\cdot|$ délka vektoru v \mathbb{E}^3 a \cdot je skalární součin v \mathbb{E}^3 . Obyčejný součin v \mathbb{E}^1 budeme v této a následující kapitole značit \times . Závislost T, V, r_i, \dots na čase t nebudeme pro jednoduchost vyznačovat.

Ze zákona akce a reakce, z gravitačního Newtonova zákona a zákona síly, tj. $F_i = m_i \ddot{r}_i$, dostáváme pro zrychlení i -tého tělesa diferenciální rovnici (5.8),

$$\ddot{r}_i = \sum_{j \neq i}^N \frac{G m_j (r_j - r_i)}{|r_j - r_i|^3}. \quad (7.2)$$

Odtud a z (7.1) plyne, že

$$\begin{aligned} V &= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \sum_{j \neq i}^N \frac{G m_j (r_j - r_i) \cdot (r_j - r_i)}{|r_j - r_i|^3} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \sum_{j \neq i}^N \frac{G m_j (r_j - r_i) \cdot r_i}{|r_j - r_i|^3} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \sum_{j \neq i}^N \frac{G m_j (r_i - r_j) \cdot r_j}{|r_i - r_j|^3} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \ddot{r}_i \cdot r_i + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N m_j \ddot{r}_j \cdot r_j = \sum_{i=1}^N F_i \cdot r_i, \end{aligned} \quad (7.3)$$

kde v poslední dvojité sumě na konci druhého řádku a též v (7.2) jsme přeznačili i a j .

Označíme-li stopu tenzoru momentu setrvačnosti $I = \sum_i m_i r_i \cdot r_i$ (Zwicky v [300], s. 228, ji nazývá *polar moment of inertia*), pak z (7.1) a (7.3) plyne, že

$$\ddot{I} = 2 \sum_{i=1}^N m_i (\dot{r}_i \cdot \dot{r}_i + \ddot{r}_i \cdot r_i) = 4T + 2V. \quad (7.4)$$

Pro ustálené mnohačasticové systémy je hodnota I v čase téměř konstantní. Rovněž celková kinetická energie T a celková potenciální energie V jsou téměř neměnné.

Jedna z verzí věty o viriálu pro hmotné body působící na sebe gravitačně tvrdí, že pokud $\ddot{I} = 0$, pak

$$V = -2T. \quad (7.5)$$

Za předpokladu, že se celková mechanická energie $E = T + V$ soustavy nemění (srov. [139] a [140]), platí pro gravitačně stabilizované systémy podle (7.5) navíc

$$E = \frac{1}{2}V. \quad (7.6)$$

Co je gravitačně stabilizovaný systém, se ale definuje velice obtížně. Kdybychom např. uvažovali jen dvě tělesa, která kolem sebe obíhají po protáhlých eliptických drahách (srov. obr. 5.2), tak rovnost (7.6) neplatí, protože na její levé straně je konstanta, zatímco pravá strana osciluje. Proto je třeba volit $N \gg 1$ a místo E , T a V uvažovat jen zprůměrované hodnoty přes dlouhé časové intervaly.

Věta o viriálu tedy není matematická věta s přesně formulovanými předpoklady, ale jen jakési tvrzení ověřované zejména experimentálně. Byla známa již na počátku 19. století a z této doby pochází i název *viriál* pro potenciální energii $V = \sum_i F_i \cdot r_i$ (viz (7.3) a [270], s. 263). V roce 1870 Rudolf Clausius odvodil **větu o viriálu** (srov. (7.1), (7.3) a (7.5)) za předpokladu $E < 0$ ve tvaru

$$\left\langle \sum_{i=1}^N m_i v_i^2 \right\rangle + \left\langle \sum_{i=1}^N F_i \cdot r_i \right\rangle = 0,$$

kde lomené závorky vyjadřují střední hodnoty výrazů uvnitř za velmi dlouhou dobu a $v_i = |\dot{r}_i|$.

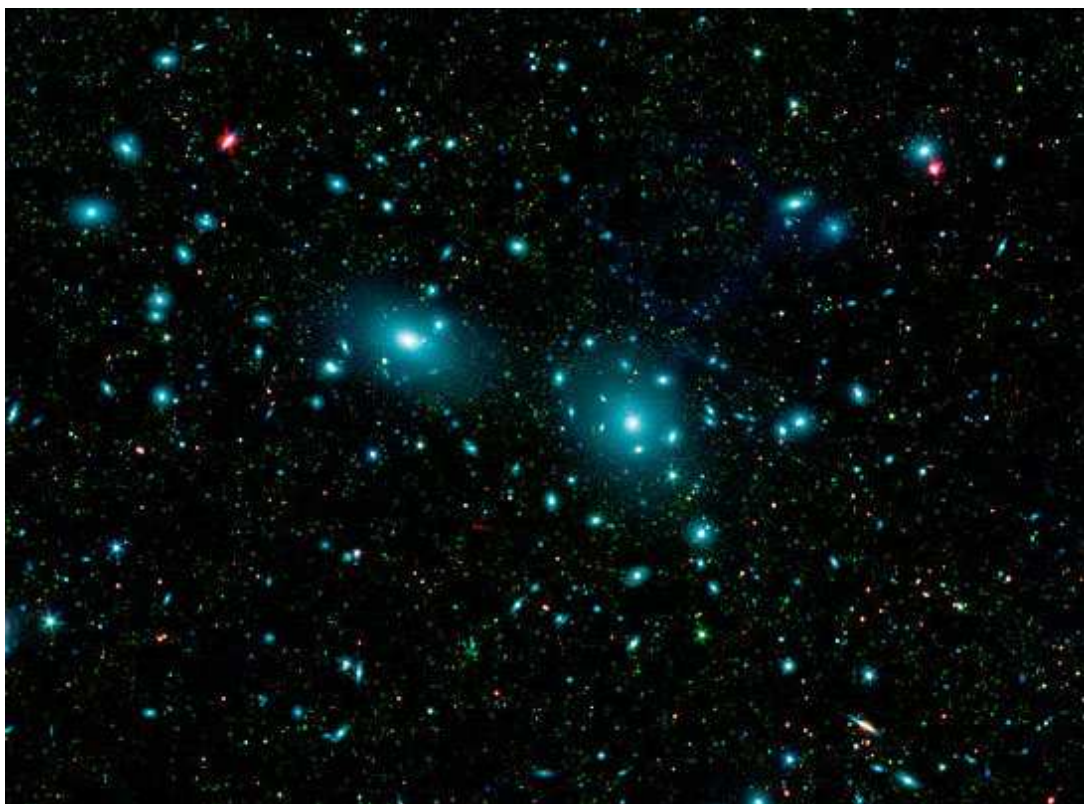


7.3. Jak Zwicky použil větu o viriálu na kupu A1656

Kolem roku 1915 Vesto Merlin Slipher [256] objevil, že spektra většiny galaxií vykazují záhadný červený posuv. Také Fritz Zwicky se později zabýval tímto problémem. Bylo mu divné, proč mají posuvy spektrálních čar jednotlivých galaxií z kupy A1656 (viz obr. 7.3) tak velké rozptyly od vystředovaného červeného posuvu celé kupy. V pozorované oblasti je rozptyl rychlostí dokonce tak velký, že asi 15 galaxií vykazuje modrý posuv,⁴ přestože se celá kupa od nás vzdaluje rychlostí vyšší než 2 % rychlosti světla díky expanzi dané současnou hodnotou Hubbleovy konstanty [210]

$$H_0 \approx 68 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}. \quad (7.7)$$

⁴Tyto galaxie pozorované jen v projekci se k nám přibližují rychlostmi dosahujícími až 350 km/s. Podle levé části histogramu z obr. 8.4 z další kapitoly však do kupy A1656 v současnosti pravděpodobně nepatří, i když v dávné minulosti tomu tak mohlo být.



Obr. 7.3. Obří galaktická kupa Abell 1656 v souhvězdí Vlasy Bereniky. V centrální části se nalézají dvě gigantické eliptické galaxie NGC 4889 a NGC 4874, které pohltní jakoukoliv galaxii, která se jim zkrříží cestu. Hovoříme o galaktickém kanibalizmu. (Foto NASA)

Jinými slovy, objekt ve vzdálenosti jednoho miliónu parseků se od nás bude v průměru vzdalovat rychlostí 68 km/s. Rychlost rozpínání vesmíru ale závisí na čase, jak ještě uvidíme v kapitole 8 (obr. 8.7). Určit současnou hodnotu Hubbleovy konstanty H_0 není snadné, protože se vždy díváme do minulosti. V našem blízkém okolí je měření H_0 zkresleno lokálními pohyby galaxií. Z rychlostí ve vzdáleném vesmíru je zase obtížné spolehlivě extrapolovat současnou hodnotu H_0 .

Galaktické kupy představují obrovské kosmické laboratoře pro testování teorie gravitace. V práci [298] Zwicky zjistil, že některé galaxie obíhají kolem středu kupy A1656 mnohem rychleji, než odpovídá větě o viriálu. Celkovou hmotnost kupy aproximoval následovně. Předpokládal, že kupa obsahuje $N = 800$ galaxií. Z naměřených svítivostí dále vydedukoval, že každá galaxie má v průměru miliardu hvězd. Odtud pak získal odhad (viz [298], s. 124)

$$\mathcal{M} = 800 \times 10^9 \times M_{\odot} = 1.6 \times 10^{42} \text{ kg}, \quad (7.8)$$

kde $M_{\odot} = 2 \times 10^{30}$ kg je hmotnost Slunce. Z věty o viriálu však odvodil, že kupa by

měla mít 400krát větší hmotnost než \mathcal{M} (viz jeho článek [298], s. 125, z roku 1933). O čtyři roky později pak publikoval jemnější analýzu [300], kde podobný faktor snížil na 150 (srov. (7.8) a (7.17)). Aby tento paradox vysvětlil, předpokládal, že existuje obrovské množství jakési temné hmoty, která ke svítivosti nepřispívá, zato má gravitační účinky.

Podívejme se nyní podrobněji na Zwickyovu metodu pro určování hmotností galaktických kup pomocí věty o viriálu. Přitom se co nejvíce budeme držet jeho původního značení z článků [298] a [300].

Celkovou hledanou hmotnost vyšetřované galaktické kupy označme

$$M = \sum_{i=1}^N m_i, \quad (7.9)$$

kde m_i je hmotnost i -té galaxie, a nechť \bar{v}_i je na čase nezávislá průměrná heliocentrická rychlost i -té galaxie.⁵ Potom se těžiště kupy od nás vzdaluje průměrnou rychlostí

$$\bar{v} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \bar{v}_i. \quad (7.10)$$

Zwicky pak úhrnnou kinetickou energii galaxií v těžišťovém systému kupy aproximoval veličinou

$$\bar{T} = \frac{1}{2} M \bar{v}^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \bar{v}^2 := \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\bar{v} - \bar{v}_i)^2, \quad (7.11)$$

kde střední kvadratická rychlost \bar{v} všech galaxií vzhledem k těžišti kupy je definována poslední rovností v (7.11).

K odhadu potenciální energie kupy Zwicky předpokládal, že galaxie jsou rozloženy zcela rovnoměrně uvnitř koule o poloměru R . Tomu odpovídá konstantní hustota

$$\rho = \frac{3M}{4\pi R^3}.$$

Sílu, která působí na galaxii o hmotnosti m_i , jejíž poloha je dána rádiusvektorem r_i , lze tedy pomocí první a druhé Newtonovy věty z oddílu 4.1 aproximovat vztahem

$$F_i \approx -\frac{4\pi |r_i|^3 \rho m_i r_i}{3|r_i|^3} = -\frac{GM m_i r_i}{R^3},$$

⁵Kupa A1656 se shodou okolností nalézá v těsné blízkosti severního galaktického pólu. Proto je \bar{v}_i prakticky rovna rychlosti vzdalování i -té galaxie od Mléčné dráhy, přestože je oběžná rychlost Slunce $v_\odot = 230$ km/s kolem galaktického centra dosti vysoká.

uvážíme-li, že $M \approx M - m_i$. Odpovídající potenciální energie i -té galaxie potom je

$$V_i = F_i \cdot r_i \approx -\frac{GMm_i|r_i|^2}{R^3}. \quad (7.12)$$

Zwicky následně spočítal, jaká je střední kvadratická hodnota vzdálenosti \bar{r} od středu kupy pro typickou galaxii [300], s. 230,

$$\bar{r}^2 = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i |r_i|^2 \approx \frac{3}{4\pi R^3 \rho} \int_0^R r^2 \times 4\pi r^2 \rho dr = \frac{3R^2}{5}, \quad (7.13)$$

kde hustota kupy ρ je podle předpokladu konstantní. Z (7.3), (7.12), (7.9) a (7.13) pak plyne, že

$$V = \sum_{i=1}^N F_i \cdot r_i \approx -\frac{GM}{R^3} \sum_{i=1}^N m_i |r_i|^2 \approx -\frac{GM\bar{r}^2}{R^3} \sum_{i=1}^N m_i = -\frac{3GM^2}{5R}.$$

Odtud, z věty o viriálu (7.5) a odhadu (7.11) potom Zwicky získal přibližný vztah

$$M = \frac{5R\bar{v}^2}{3G} \quad (7.14)$$

pro hledanou celkovou hmotnost kupy (viz [298], s. 124, a též [300], s. 230). Budeme jí říkat *virialová hmotnost*.

K určení poloměru R použil následující údaje. Kupu A1656 pozoroval na nebeské sféře pod úhlem $\beta = 1.7^\circ$ (Měsíc má pro srovnání 0.5°). E. Hubble s M. Humasonem tehdy odhadli vzdálenost kupy na 13.8 Mpc. Protože $1 \text{ pc} = 3.086 \times 10^{16} \text{ m}$, máme

$$R = 13.8 \times 10^6 \times 3.086 \times 10^{16} \times \sin \frac{1}{2}\beta = 6.318 \times 10^{21} \text{ (m)}, \quad (7.15)$$

tj. poloměr kupy je $R \approx 0.2 \text{ Mpc}$.

Radiální rychlosti⁶ jednotlivých galaxií lze dobře stanovit pomocí Dopplerova jevu. Podle dat, která byla tehdy k dispozici, Zwicky zjistil, že jejich červené posuvy mají značný rozptyl od střední hodnoty celé kupy, i když podle [241], s. 14, či [195], s. 57, uvažoval jen 8 největších galaxií. Odtud vypočítal čtverec průměrné radiální rychlosti $\bar{v}_{\text{radial}}^2 = 5 \times 10^{11} \text{ m}^2\text{s}^{-2}$ vzhledem k těžišti kupy. V důsledku předpokládané izotropie rychlostí a sférické symetrie kupy pro průměrnou hodnotu rychlosti \bar{v} dostal

$$\bar{v}^2 = 3\bar{v}_{\text{radial}}^2 = 1.5 \times 10^{12} \text{ (m/s)}^2 \quad \text{a} \quad \bar{v} = 1.22 \times 10^6 \text{ m/s}. \quad (7.16)$$

⁶Roční variace radiálních rychlostí způsobené oběhem Země kolem Slunce rychlostí (2.7) činí jen $\pm 26 \text{ km/s}$, protože sklon ekliptiky ke galaktické rovině je 62° .

První rovnost v (7.16) plyne z Pythagorovy věty, jestliže vektor rychlosti vyjádříme pomocí tří vzájemně kolmých složek. Dosazením (7.15) a (7.16) do (7.14) obdržíme viriálovou hmotnost

$$M = 2.367 \times 10^{44} \text{ kg}, \quad (7.17)$$

což je cca 150krát větší hodnota než v (7.8). Tento Zwickyův objev byl po desetiletí zcela ignorován. Když porovnával naměřenou luminozitu celé kupy s její teoretickou hodnotou, dostal podobný faktor 500/3 (viz [300], s. 232).

Zwicky v [300] navrhl ještě další dvě metody pro zjišťování temné hmoty. První z nich je pomocí gravitačního čočkování mezilehlou galaxií (srov. obr. 7.2). Druhá jeho metoda se opírá o statistické vyhodnocení luminozity jednotlivých typů galaxií. V úvodu článku [300] se Zwicky zabývá i rotačními křivkami galaxií, což je další nástroj k zjišťování účinků temné hmoty (viz kapitola 9).



8. Problém chybějící hmoty

*Záhadná temná hmota
je jen chyba modelu.*

AUTOR

8.1. Rozbor Zwickyovy metody

Fritz Zwicky se podílel na mnoha zásadních objevech, jak víme z předchozí kapitoly. Například v práci [298] z roku 1933 odvodil vztah (viz (7.14))

$$M = \frac{5R\bar{v}^2}{3G} \quad (8.1)$$

pro viriálovou hmotnost galaktické kupy A1656, kde R je její poloměr a \bar{v} je střední kvadratická rychlost galaxií vzhledem k těžišti kupy. Zwickyův přístup k postulování existence temné hmoty pomocí vztahu (8.1) si však zasluhuje podrobnější rozbor.

Nejprve si připomeňme hlavní trik Zwickyovy metody z oddílu 7.3. Pomocí věty o viriálu $V = -2T$ (viz (7.5)) lze dát do souvislosti celkovou potenciální a kinetickou energii kupy, tj.

$$V \approx -\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R}, \quad T \approx \bar{T} = \frac{1}{2} M \bar{v}^2$$

(viz (7.11)–(7.14)). Všimněme si, že M vystupuje v potenciální energii v kvadrátu, zatímco v kinetické energii v první mocnině. To nám pak umožňuje vyjádřit viriálovou hmotnost M pomocí vztahu (8.1), kde bychom měli správně psát \approx místo rovnítka $=$. Můžeme však na základě tak jednoduchého vzorečku, jakým je (8.1), spolehlivě tvrdit, že v galaktické kupě A1656 je obrovské množství nějaké temné hmoty neznámého složení?

F. Zwicky musel učinit celou řadu zjednodušujících předpokladů, aby mohl odhadnout celkovou hmotnost kupy A1656. V tomto oddílu poukážeme na to, co všechno

je třeba vzít v úvahu, abychom mohli spolehlivě tvrdit, že temná hmota skutečně existuje.

1. Podle současných měření rychlostí a známého Hubbleova vztahu, který uvedeme níže (viz (8.13)), není vzdálenost vyšetřované kupy galaxií 13.8 Mpc (viz (7.15)), ale je kolem 100 Mpc. To je skoro o řád dále. Z naměřeného úhlového průměru kupy $\beta = 1.7^\circ$ a známé vzdálenosti $d = 100$ Mpc dostaneme mnohem větší poloměr,

$$R = d \sin \frac{\beta}{2} = 1.48 \text{ Mpc} = 4.58 \times 10^{22} \text{ m}, \quad (8.2)$$

než v (7.15), a tedy ještě větší hmotnost než (7.17). Ze vztahů (8.1), (7.16) a (8.2) dává věta o viriálu hmotnost

$$M = 1.71 \times 10^{45} \text{ kg},$$

což je dokonce 1000krát více než v (7.8). Abychom si udělali názornou představu o poloměru R kupy A1656, uveďme, že vzdálenost středů naší Galaxie a nejbližší velké galaxie M31 v Andromedě je přibližně 0.778 Mpc (srov. s (8.2)).

2. Úhlový průměr $\beta = 1.7^\circ$ z (8.2) je patrně o trochu větší. Podle některých zdrojů se kupa A1656 nalézá v oblasti $2.7^\circ \times 2.5^\circ$ s nejasně určenou hranicí. Jiné zdroje ale uvádějí menší hodnoty.

3. Zwicky v (7.8) předpokládá, že galaxie mají v průměru hmotnosti miliardkrát větší, než je hmotnost Slunce. Tyto údaje jsou na druhé straně dosti podhodnocené. Značnou část světla hvězd totiž blokuje mezihvězdný prach. Pro srovnání konstatujme, že naše Galaxie má přes 400 miliard hvězd a její celková hmotnost činí $M_G \approx 10^{12} M_\odot$ (viz [165], s. 127), což je dokonce více než celková hmotnost \mathcal{M} všech 800 galaxií v (7.8) podle Zwickyho. Mléčná dráha však patří spíše k těm větším galaxiím. Z těchto důvodů se většina fyziků v současnosti domnívá, že temné hmoty je přinejmenším o řád více než svítící baryonové látky — tj. zejména protonů a neutronů.¹ Přitom temná hmota nezáří v žádném oboru elektromagnetického spektra.

Zwicky udělal celou řadu dalších aproximací, které mají podstatný vliv na výslednou vypočtenou hmotnost:

4. Odhad celkového počtu galaxií $N = 800$ (viz (7.8)) je rovněž mírně podceněný, i když Zwicky v [300], s. 244, připouští i možnost $N \geq 1500$. V současnosti známe v kupě A1656 přes tisíc galaxií. V 1 Mpc³ je tak v průměru přes 70 galaxií. Navíc Zwicky před 80 lety jen těžko mohl z osmnáctipalcového dalekohledu na Mt. Palomaru² spatřit tzv. trpasličí galaxie, které také zčásti přispívají k celkové

¹K baryonové látce astronomové počítají všechny částice, které jsou zahrnuty ve standardním modelu elementárních částic a interakcí (elektrony, neutrina apod.), a též degenerovanou baryonovou hmotu ukrytou v černých dírách [108].

²Slavný pětmetrový palomarský dalekohled byl zprovozněn až v r. 1949.

hmotnosti kupy. Například v bezprostředním okolí naší Galaxie jich bylo poměrně nedávno nalezeno cca deset.

5. Vztah (7.9) nám neumožňuje uvažovat mezigalaktickou hmotu. V centrální oblasti kupy je hustota mezigalaktické hmoty mnohem větší než vně kupy. Je zde více prachu, plynu, plazmatu či osamělých hvězd, které byly v důsledku probíhajících gravitačních kolizí vymrštěny z galaxií ven. Z analýzy rentgenového záření také víme, že mezigalaktické prostředí kupy obsahuje alespoň 5krát větší množství nesvítící baryonové hmoty než svítící hmoty v galaxiích (viz [2], [20], [93]).

6. Zwicky uvažoval zcela rovnoměrné rozložení galaxií uvnitř kupy kulového tvaru, viz [300], s.229. Centrální oblasti kupy A1656 jsou však podstatně hustší než oblasti při okraji (viz obr. 8.6) a větší galaxie jsou obecně blíže středu, podobně jako je tomu u rozložení hvězd v kulových hvězdokupách. Jinými slovy, galaktická kupa vykazuje vyšší vzrůst hustoty směrem ke středu, než by odpovídalo rovnoměrnému rozložení. Z tohoto důvodu je koeficient $\frac{5}{3}$ z (8.1) dosti nadhodnocený, jak ještě uvidíme v oddílu 8.3. Kupu navíc vidíme jen v projekci, může být eventuálně zploštělá do tvaru elipsoidu či lívance. Navíc Zwicky ve svém výpočtu uvažoval pouze ty nejjasnější galaxie.

7. Kinetická energie \bar{T} vzhledem k těžišti kupy (7.11) není stanovena v souladu s předpoklady věty o viriálu, protože střední rychlost přes dlouhé časové intervaly \bar{v}_i , se aproximuje současnou hodnotou rychlosti $v_i = v_i(t) = |\dot{r}_i(t)|$ pro dané $i \in \{1, \dots, N\}$. Dnes sice známe mnohem přesněji hodnoty heliocentrických³ radiálních rychlostí jednotlivých galaxií, ale stanovit jejich střední hodnoty přes dlouhé časové intervaly nelze. Podle dat uvedených v [1], [18] a [44] pro galaxie, které patří do kupy A1656, dostaneme radiální složky rychlostí (viz obr. 8.1) a odtud

$$\bar{v} \approx 1.686 \times 10^6 \text{ m/s}, \quad (8.3)$$

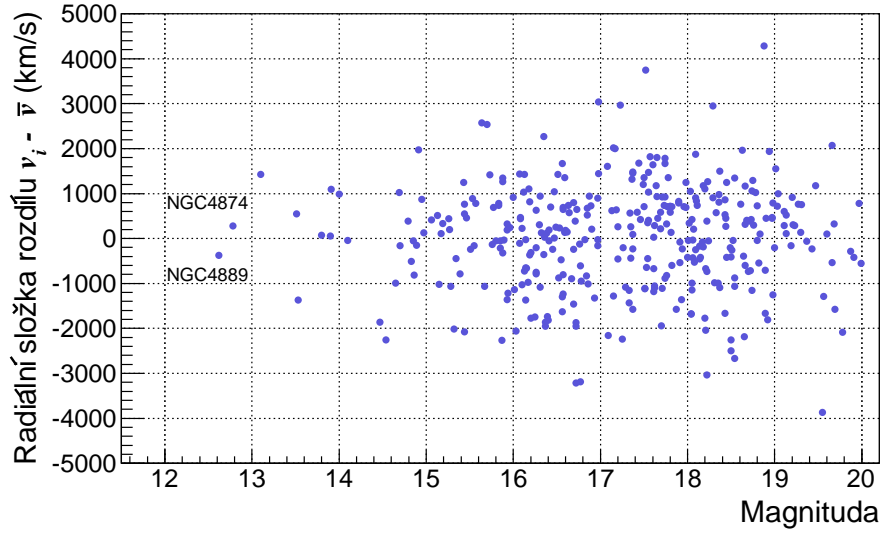
což je dokonce více než hodnota \bar{v} v (7.16) odvozená Zwickyem.

Rovněž potenciální energie v (7.12) není určena přesně v důsledku aproximace $M \approx M - m_i$.

8. Zwicky předpokládal izotropní rozložení rychlostí. Jejich průměrnou hodnotu aproximoval pomocí radiálních rychlostí a vztahu (7.16). Přitom mírná anizotropie v rozdělení radiálních rychlostí je dobře patrná z odchylky histogramu od Gaussovy křivky na obr. 8.5. Naměřené hodnoty radiálních rychlostí⁴ jsou na obr. 8.1.

³Rozumí se vzhledem ke Slunci.

⁴Hvězdy v okolí Slunce obíhají střed Galaxie rychlostmi kolem 230 km/s. Občas se ale v Galaxii objeví hvězda letící rychlostí přes 1000 km/s. Předpokládá se, že dochází k jejich vystřelování z kulových hvězdokup, eventuálně z okolí černých děr. K tomu stačí, aby se dvojhvězda dostatečně přiblížila k jinému masivnímu objektu, který gravitačně zachytí většinou těžší složku na eliptickou dráhu a lehčí složku naopak odmrští po hyperbolické dráze. K podobným kolizím galaxií dochází i v kupě A1656.



Obr. 8.1. Závislost radiální složky rozdílu rychlostí $v_i - \bar{v}$ galaxií kupy A1656 na magnitudě, kde $v_i = v_i(t)$ odpovídá současnosti.

9. K velkým rychlostem galaxií může přispívat i temná energie. Nemáme žádný důvod předpokládat, že by se nějakým způsobem vyhýbala kupě A1656, která je součástí rozpínající se „kosmické pavučiny“. Navíc je rychlost ve vztahu (8.1) v kvadrátu! Jinými slovy, hodnověrná znalost radiálních rychlostí je velice podstatná pro výpočet celkové hmotnosti.

10. Zwicky se omezil na případ, že všechny galaxie mají stejnou hmotnost nezávislou na čase [300], s. 231. Galaxie si však neustále vyměňují hmotu s mezigalaktickým prostředím a jejich pozorované magnitudy⁵ se liší o 8 řádů, tj. rozdíl v hmotnostech je více než 3 řády.

Uveďme ještě některé další skutečnosti, které je třeba vzít v úvahu pro důkladnou analýzu chyby.

11. Zwicky předpokládal, že systém A1656 je v rovnováze a že věta o viriálu platí přesně. Za dobu existence kupy však mohla typická galaxie oběhnout její střed jen několikrát rychlostí \bar{v} z (8.3), protože jeden oběh trvá odhadem

$$2\pi\bar{r}/\bar{v} = 4.11 \times 10^9 \text{ let}, \quad (8.4)$$

kde $\bar{r} = \sqrt{3}R/\sqrt{5}$ je střední vzdálenost ze (7.13) a R je dáno v (8.2). I když jsou \bar{r} a \bar{v} mírně nadhodnocené vůči průměrným hodnotám, jen těžko můžeme hovořit o ustáleném (relaxovaném) systému. Nabízí se tedy otázka, zda je vůbec mechanické použití věty o viriálu obhajitelné.

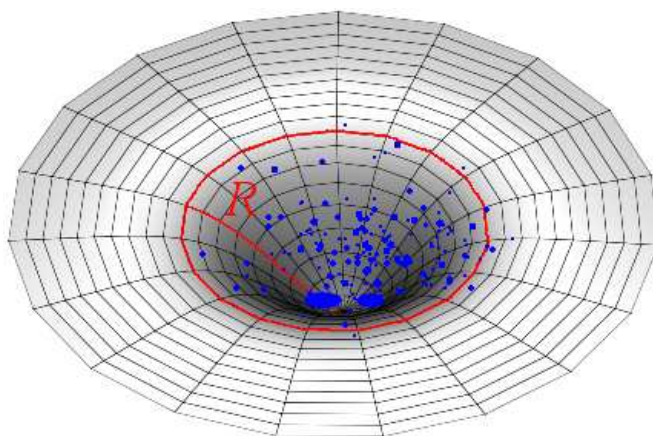
⁵Čím je slabší zdroj, tím je vyšší jeho magnituda. Rozdíl jedné magnitudy odpovídá poměru $100^{1/5} : 1 = 2.512 : 1$ hustoty světelných toků.

12. Zwicky použil Newtonovu mechaniku s nekonečnou rychlostí šíření gravitační interakce, zatímco skutečná rychlost šíření je zřejmě konečná. V kupě, která má průměr deset milionů světelných let, efekty gravitační aberace jistě nejsou zanedbatelné [140], protože podle obr. 8.5 se některé galaxie v kupě pohybují vzhledem k jejímu těžišti rychlostmi většími, než je 1 % rychlosti světla. Tedy i dlouhodobě působící drobné relativistické efekty ovlivňují vývoj systému. Máme dobře vyzkoušeno, jak funguje Newtonova mechanika na krátkých časových škálách a nízkých rychlostech ve Sluneční soustavě. Uvažovaná kupa má však podle (8.2) průměr cca $3 \text{ Mpc} > 6 \times 10^{11} \text{ au}$, kde $1 \text{ au} \approx 150 \times 10^9 \text{ m}$ je střední vzdálenost Země od Slunce. Není tudíž jasné, zda jsme vůbec oprávněni uplatňovat Newtonovy zákony na systémy o tolik řádů větší. To je podobné, jako kdybychom aplikovali zákony kvantové mechaniky (kvantování energie elektronů obíhajících jádro atomu, tunelový jev, disperze elektronů na štěrbině apod.) na objekty o velikosti desítek metrů.

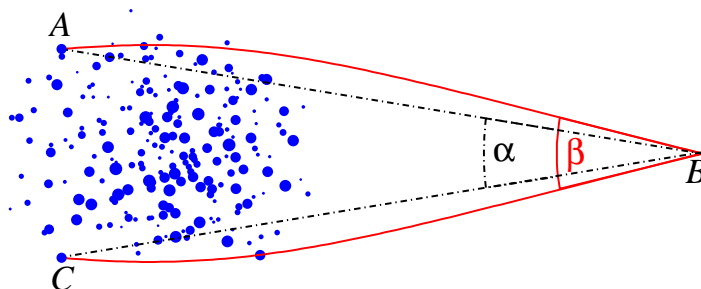
13. Zwicky nahradil galaxie o průměru až 10^{10} au hmotnými body. Taková aproximace ovšem znemožňuje uvažovat momenty hybnosti rotujících galaxií, které jistě přispívají k celkovému momentu hybnosti. Také nelze zahrnout vliv slapů, které podstatně ovlivňují celkovou dynamiku. Například „izolovaná“ soustava dvou galaxií obíhajících blízko kolem sebe není stabilní, protože galaxie časem splynou právě v důsledku slapového tření (srov. obr. 5.7), zatímco klasický problém dvou těles má periodické řešení na nekonečně dlouhém časovém intervalu (viz obr. 5.2).

Zwicky se navíc omezil jen na případ, že N je konstantní. Jenomže občas některé galaxie splynou nebo se roztrhají v důsledku nejrůznějších kolizí v dosti přehuštěném prostoru (viz obr. 7.3).

14. Prostorčas zakřivený více než tisícem galaxií (viz obr. 8.2) o celkové hmotnosti řádově 10^{45} kg Zwicky nahradil eukleidovským prostorem \mathbb{E}^3 . Deformaci pro-



Obr. 8.2. Deformace prostoročasu galaktickou kupou o poloměru R . Obvod kružnice o poloměru R je menší než $2\pi R$.



Obr. 8.3. Schematické znázornění ohybu světelných paprsků gravitačním polem galaktické kupy. Pozorovaný úhel $\beta = \sphericalangle ABC$ je větší než úhel $\alpha = \sphericalangle ABC$.

storu obsahujícího kupu galaxií (srov. obr. 7.2 a 8.3) dokazuje gravitační čočkování, které zvětšuje⁶ pozorované úhlové vzdálenosti galaxií od středu kupy, a tím i R ve vztazích (8.1), (7.15) a (8.2). Index lomu gravitační čočky reprezentované galaktickou kupou však není konstantní jako u běžné skleněné čočky, ale roste směrem ke středu, v důsledku čehož vnímáme úhlové vzdálenosti mezi galaxiemi větší. Nadto objem koule v takto deformovaném prostoru není $4\pi R^3/3$ (srov. např. (7.13) a obr. 8.2), ale je menší, jak plyne z Bishopovy-Gromovovy nerovnosti [114], s. 183 (viz též [187], s. 1099). Také povrch koule integrovaný v (7.13) je v zakřiveném prostoru menší než $4\pi r^2$.

Zakřivení prostoročasu vyvolává i další drobné efekty, které podrobněji analyzujeme v oddílu 8.3. Například celkový červený posuv způsobuje nejen expanze vesmíru, ale částečně i červený gravitační posuv. Fotony musí překonat nejen potenciálovou jámu příslušné hvězdy,⁷ ale i mnohem hlubší jámy jednotlivých galaxií a též potenciálovou jámu celé kupy (vztah pro změnu frekvence fotonů v poli centrální síly je uveden v [268], s. 261).

15. Další zdroje nejistot jsou ve vstupních datech. Dostupné prameny uvádějí vzdálenost středu kupy od 99 Mpc do 103 Mpc. Podle [18] je rektascenze středu kupy $\alpha = 12^{\text{h}} 57.3^{\text{m}}$ a deklinace $\delta = 28^{\circ} 14.4'$. Jiné prameny uvádějí poněkud odlišné údaje, např. podle [226] je $\alpha = 13^{\text{h}} 00^{\text{m}} 00.7^{\text{s}}$ a $\delta = 27^{\circ} 56' 51''$. Není totiž zřejmé, jak vůbec definovat střed kupy, když ji vidíme jen v projekci s nepřesně danou hranicí, a navíc ani neznáme rychlost šíření gravitační interakce nutnou k určení „středu“.

Velké množství drobných chyb nejružnějšího původu může podstatně zkreslit vypočtenou hmotnost M . Zwicky si byl dobře vědom, že se dopustil celé řady apro-

⁶Podobně, když se díváte do kulového akvária, rybičky se jeví větší, než ve skutečnosti jsou. V tomto případě tedy není třeba uvažovat mezilehlou galaxii, jak to Zwicky navrhoval, protože samotná kupa A1656 zdánlivě zvětšuje své vlastní objekty, viz obr. 8.3.

⁷Červený gravitační posuv fotonů z neutronových hvězd odpovídá svou velikostí kosmologickému posuvu až $z \approx 0.4$. Pro obyčejné hvězdy je však nepatrný.

ximací, které uvádíme např. v bodech **2, 4, 6, 11, 15** (viz [300], s. 230, 231, 233, 242, 244). Neuvažoval však některé další důležité skutečnosti uvedené např. v bodech **9, 12, 13, 14**.



8.2. Analýza současných dat

Galaktická kupa Abell 1656 se nachází na počátku vlákna galaxií (s anglickým názvem Sloan Great Wall) dlouhého více než miliardu světelných let. Kupa má poměrně dobře změřené červené posuvy a magnitudy většiny svých galaxií. Poblíž středu se nalézají dvě obří (angl. supergiant) eliptické galaxie NGC 4889 a NGC 4874, které jsou cca 10krát větší než Mléčná dráha a výrazně ovlivňují celkovou dynamiku kupy (viz obr. 7.3). Jejich magnitudy jsou po řadě 12.62 a 12.78. Uprostřed galaxie NGC 4889 se nachází největší známá černá díra o hmotnosti $10^{10} M_{\odot}$. Galaxie NGC 4874 zase obsahuje rekordní počet 30 000 kulových hvězdokup (naše Galaxie jich má jen kolem 150). V kupě Abell 1656 je desítka dalších galaxií, které jsou větší než Mléčná dráha.

Zwicky v [298] a [300] bohužel neuvádí žádná konkrétní data o rychlostech či magnitudách jednotlivých galaxií z kupy A1656 a neuvádí ani rychlost těžiště \bar{v} . Omezuje se jen na hodnoty R a \bar{v} ze (7.15) a (7.16).

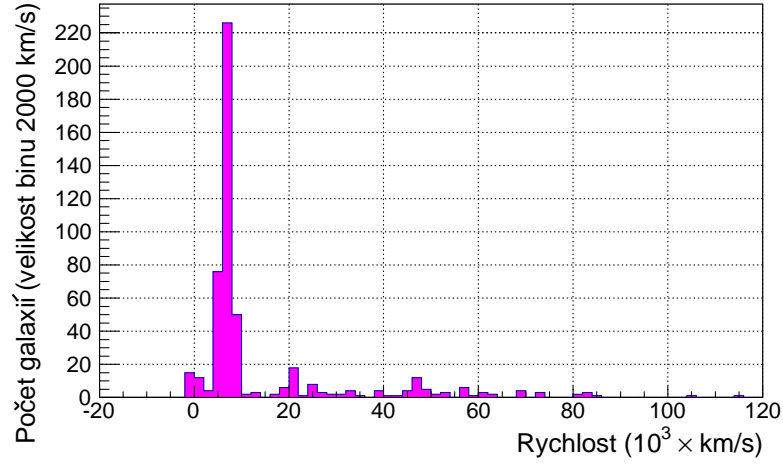
Podívejme se proto nyní, co by Zwicky svojí metodou dostal pro současná data. K aktualizaci jeho výpočtu využijeme údaje zveřejněné v [1], [18] a [44], které se částečně překrývají. Některé zde uváděné galaxie do kupy A1656 evidentně nepatří, i když se ve sledovaném výseku oblohy nacházejí. Například je zde asi 50 galaxií, jejichž radiální rychlosti přesahují 40 000 km/s. Jedna galaxie (viz obr. 8.4 vpravo) se dokonce od nás vzdaluje rychlostí 114 990 km/s, což je více než třetina rychlosti světla! Podle relativistického vztahu

$$z = \sqrt{\frac{c+v}{c-v}} - 1$$

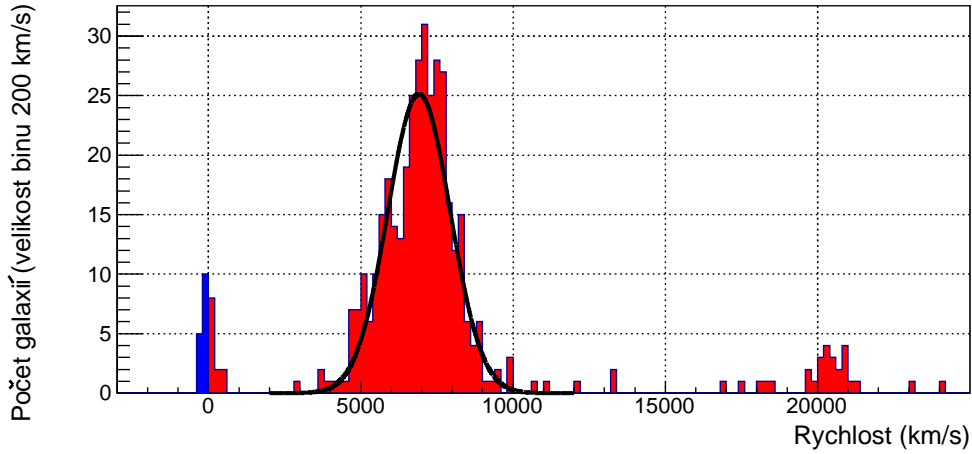
uvedeného v [108], s. 348, je její červený posuv $z \approx 0.5$. Dále podotkněme, že vzdálenost odpovídající poloměru kupy (8.2) by galaxie pohybující se rychlostí 40 000 km/s urazila za necelých 50 milionů let. Galaxie nacházející se v pravé části histogramu na obr. 8.4 se tedy v kupě nemohou nalézat.

Nerovnoměrné rozložení rychlostí vzhledem k těžišti kupy je dobře patrné z histogramů na obr. 8.4 a 8.5. Všimněme si ještě, že galaxie vykazující modrý a malý červený posuv tvoří samostatnou skupinu na obr. 8.5 vlevo.⁸ Proto jsme se při výpočtu (8.3) (a též (8.5) dále) omezili jen na rychlosti z intervalu 2 000 až 12 000 km/s.

⁸Tato menší kupa vlastně působí jako slabá předsádková spojná čočka.



Obr. 8.4. Histogram radiálních rychlostí galaxií s magnitudou nepřesahující 20, které se v projekci zobrazují do té části nebeské sféry, kde se kupa A1656 nachází.



Obr. 8.5. Detail histogramu z obr. 8.4 pro radiální rychlosti menší než 25 000 km/s. Galaxie s modrým posuvem jsou vlevo. Plná čára představuje proložení uvažovaných dat Gaussovou křivkou.

Protože kupa má relativně malý úhlový průměr, mají všechny její galaxie přibližně stejnou vzdálenost od Země. Budeme proto předpokládat, že hmotnost každé galaxie je přímo úměrná jejímu pozorovanému světelnému toku. Označme I hustotu světelného toku nějaké dané referenční galaxie o hmotnosti m a magnitudě μ . Pak hustota toku I_i uvažované i -té galaxie o hmotnosti m_i a změřené magnitudě μ_i splňuje Pogsonovu rovnici (viz [108], s. 370 a [199], s. 22)

$$\mu - \mu_i = 2.5 \log_{10} \frac{I_i}{I},$$

což po vydělení 2.5 a odlogaritmování dává

$$10^{0.4(\mu-\mu_i)} = \frac{I_i}{I} = \frac{m_i}{m}.$$

Odtud plyne, že $m_i = m \cdot 10^{0.4\mu} 10^{-0.4\mu_i}$. Proto lze pro jednoduchost předpokládat, že hmotnosti m_i jsou podle Pogsonova vztahu úměrné $10^{-0.4\mu_i}$. Tento trik nám umožňuje vypočítat průměrnou radiální rychlost \bar{v} definovanou vztahem (7.10) (resp. \bar{v} z (7.11) a (8.3)), aniž bychom znali konkrétní hodnoty m_i . Stačí nám znát jen magnitudy jednotlivých galaxií. Proto lze průměrnou rychlost vzdalování celé kupy vyjádřit vztahem

$$\bar{v} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \bar{v}_i \approx \frac{\sum_i 10^{-0.4\mu_i} \bar{v}_i}{\sum_i 10^{-0.4\mu_i}},$$

kde sčítáme jen přes 352 nejjasnějších galaxií se známými magnitudami nepřesahujícími 20. Přesto se velikosti sčítanců liší o mnoho řádů. Aby zaokrouhlovací chyby neznehodnotily výslednou přesnost, je třeba v sumách sčítat od nejmenších členů počínaje (viz [135], [154]). Tak po dosažení naměřených magnitud a rychlostí dostáváme

$$\bar{v} \approx 6877 \text{ km/s.} \quad (8.5)$$

Podle (8.1), (8.2) a (8.3) tak vychází celková viriálová hmotnost kupy⁹

$$M = 3.25 \times 10^{45} \text{ kg.} \quad (8.6)$$

Pro srovnání (viz též (7.8)) uveďme dolní odhad baryonové hmotnosti kupy založený opět na Pogsonově vztahu a změřených svítivostech jednotlivých galaxií

$$\mathcal{M} > C \sum_{i=1}^N 10^{-0.4\mu_i} = 3.3 \times 10^{44} \text{ kg,}$$

kde $C = m 10^{0.4\mu}$ je škálovací konstanta a $\mu = 12.78 \text{ mag}$ je referenční magnituda srovnávací galaxie NGC 4874, která je podle [301] desetkrát hmotnější než naše Galaxie. Tedy

$$m = 10M_G = 10^{13} M_\odot = 2 \times 10^{43} \text{ kg,} \quad (8.7)$$

kde celková hmotnost naší Galaxie $M_G = 10^{12} M_\odot$ je uvedena v astronomických tabulkách [165], s. 127. Vidíme, že hmotnost M určená z věty o viriálu je o řád větší než dolní odhad hmotnosti \mathcal{M} . Nicméně vzniká otázka, kolik činí celková hmotnost cca tisíce nezapočítaných menších galaxií, mezigalaktické nesvítící baryonové

⁹Odtud a z (8.2) dostaneme průměrnou hustotu kupy $\rho = 8 \times 10^{-24} \text{ kg/m}^3$, což je podstatně více, než činí současná průměrná hustota vesmíru $\approx 10^{-27} \text{ kg/m}^3$. Pro srovnání uveďme, že v [25] se hustota temné hmoty v naší Galaxii odhaduje na $0.008 M_\odot \text{pc}^{-3} = 5.444 \times 10^{-22} \text{ kg/m}^3$. Podle [188] je však tato hustota přinejmenším o řád menší.

hmoty apod. Například studiem rentgenového záření se zjistilo, že mezigalaktické prostředí v kupě obsahuje až pětkrát více baryonové hmoty, než je ve hvězdách celé kupy (viz [20], [93], [283]). V mezigalaktickém prostředí byl též detekován obrovský slapový ocas hvězd o celkové hmotnosti rovné 20 % hmotnosti galaxie NGC 4874, viz [76], s. 551. Podle [278] se v mezigalaktickém prostoru kupy nalézají 30–50 % hvězd z celkového počtu všech hvězd kupy. Všechny tyto argumenty přispívají k vyšší hodnotě \mathcal{M} a pomáhají vysvětlit vyšší pozorované rychlosti galaxií.

Pokud tvrdíme, že temná hmota existuje, měli bychom nejprve umět spolehlivě odhadnout všechny chyby, kterých jsme se dopustili v bodech **1–15** z oddílu 8.1. Zejména chyby popsané v **9** a **11–15** mohou být dosti velké.



8.3. Snížení odhadu viriálové hmotnosti kupy A1656

Pokusme se nyní podrobněji odhadnout rozmanité chyby v určení viriálové hmotnosti (8.1) způsobené některými jevy z oddílu 8.1.

Nerovnoměrnost rozložení hmoty. Ukážeme, že koeficient $\frac{5}{3}$ v (8.1) by měl být menší. Z obr. 8.6 je patrné, že rozložení galaxií v galaktické kupě A1656 zdaleka není rovnoměrné, jak Zwicky uvažoval. Předpokládejme, že rozložení hustoty $\rho = \rho(r)$ je sféricky symetrické v kouli o poloměru R (viz (8.2)). Pak celkovou hmotnost kupy lze vyjádřit integrálem

$$M = \int_0^R \rho(r) 4\pi r^2 dr. \quad (8.8)$$

Zwicky předpokládal, že ρ nezávisí na r . Dále budeme proto uvažovat obecnější rozložení hustoty, které je bližší pozorovanému hmotnostnímu profilu,

$$\rho(r) = a(R^b - r^b), \quad 0 \leq r \leq R, \quad (8.9)$$

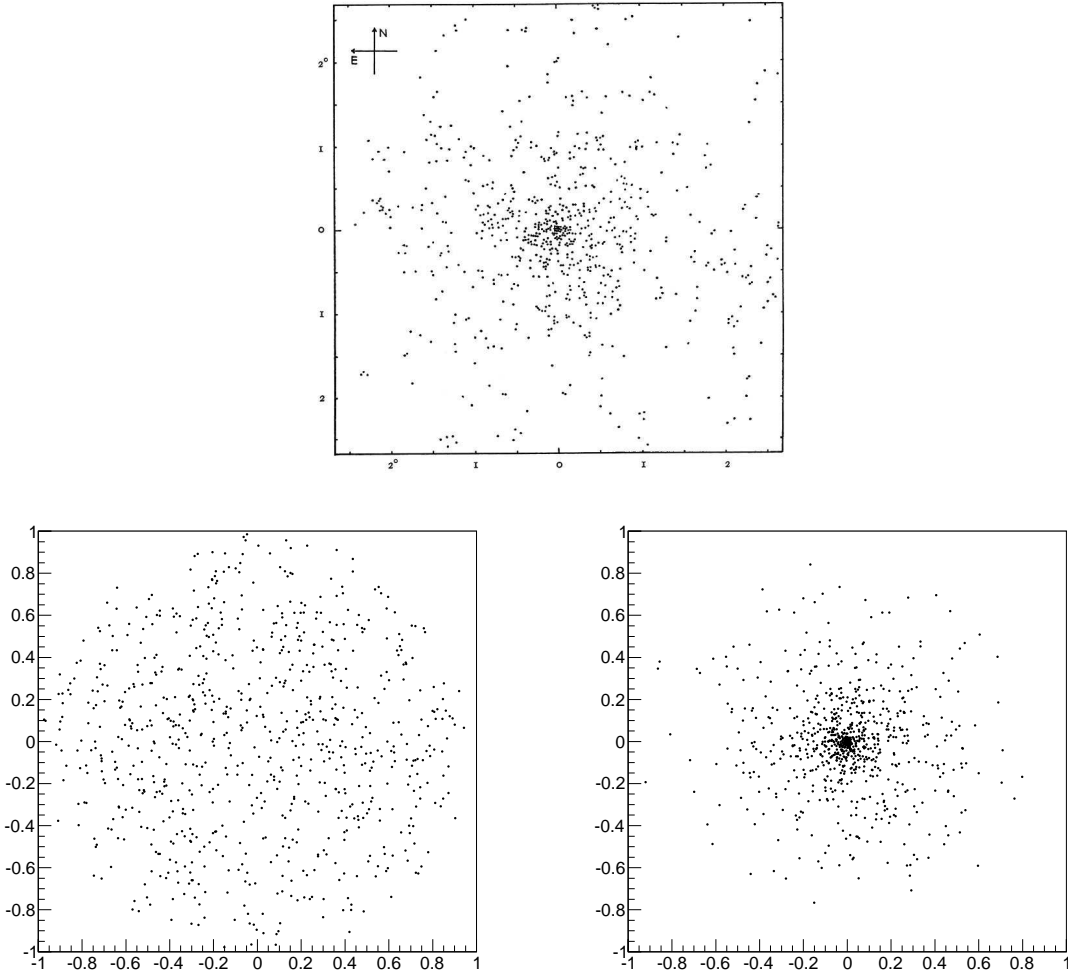
kde $b > 0$ a parametr

$$a = \frac{3(b+3)M}{4\pi b R^{b+3}} \quad (8.10)$$

je zvolen tak, aby byla splněna podmínka (8.8), tj.

$$\int_0^R a(R^b - r^b) 4\pi r^2 dr = 4\pi a \left(\frac{R^{b+3}}{3} - \frac{R^{b+3}}{b+3} \right) = \frac{4\pi a b R^{b+3}}{3(b+3)} = M.$$

Nyní se pokusíme modifikovat rovnici (7.12) odvozenou pro konstantní hustotu na případ sféricky symetrického rozložení hustoty ρ . Pro sílu F_i působící na galaxii



Obr. 8.6. Horní obrázek ukazuje rozložení galaxií v kupě A1656 z původního Zwickyova článku [300], s. 227. Levý dolní obrázek ilustruje náhodně generovaný stejný počet galaxií reprezentovaných body, které jsou rovnoměrně rozloženy uvnitř trojrozměrné koule a jsou promítnuty do roviny. Pravý dolní obrázek ukazuje rozložení (8.9) pro $b = 1$ v projekci do roviny, které je podobné skutečnému rozložení z horního obrázku.

o hmotnosti m_i , která je dána polohovým vektorem r_i , dostaneme podle první a druhé Newtonovy věty z oddílu 4.1 a (8.9)

$$\begin{aligned}
 F_i &= -\frac{Gm_i r_i \int_0^{|r_i|} 4\pi\rho(r)r^2 dr}{|r_i|^3} = -\frac{4\pi Gm_i r_i}{|r_i|^3} \left(\frac{R^b |r_i|^3}{3} - \frac{|r_i|^{b+3}}{b+3} \right) \\
 &= -4\pi Gm_i r_i \left(\frac{R^b}{3} - \frac{|r_i|^b}{b+3} \right).
 \end{aligned}$$

Tudíž celková potenciální energie je

$$V = \sum_{i=1}^N F_i \cdot r_i = -4\pi G a \sum_{i=1}^N m_i \left(\frac{R^b |r_i|^2}{3} - \frac{|r_i|^{b+2}}{b+3} \right). \quad (8.11)$$

Dále potřebujeme vyčíslit střední hodnotu (srov. (7.13)) mocniny r^e pro $e = 2$ a $e = b + 2$. Pomocí (8.8) a (8.9) dostaneme

$$\begin{aligned} \langle r^e \rangle &= \frac{\int_0^R r^e \rho(r) 4\pi r^2 dr}{\int_0^R \rho(r) 4\pi r^2 dr} = \frac{4\pi a}{M} \int_0^R (R^b - r^b) r^{e+2} dr \\ &= \frac{4\pi a}{M} \left(\frac{R^{b+e+3}}{e+3} - \frac{R^{b+e+3}}{b+e+3} \right) = \frac{4\pi a b R^{b+e+3}}{M(b+e+3)(e+3)}. \end{aligned}$$

Z této rovnosti pro exponenty $e = 2$ a $e = b + 2$ a vztahů (8.11), $M = \sum_i m_i$ a (8.10) zjistíme, že

$$\begin{aligned} V &\approx -4\pi G a \left(\frac{R^b 4\pi a b R^{b+5}}{3M 5(b+5)} - \frac{4\pi a b R^{2b+5}}{M(b+3)(b+5)(2b+5)} \right) \sum_{i=1}^N m_i \\ &= -(4\pi a)^2 G R^{2b+5} \left(\frac{b}{15(b+5)} - \frac{b}{(b+3)(b+5)(2b+5)} \right) \\ &= - \left(4\pi \frac{3(b+3)M}{4\pi b R^{b+3}} \right)^2 G R^{2b+5} \frac{b^2(2b+11)}{15(b+3)(b+5)(2b+5)} \\ &= - \frac{3GM^2 (b+3)(2b+11)}{5R (b+5)(2b+5)}. \end{aligned}$$

Odtud, z věty o viriálu (7.5) a (7.11) obdržíme nový vztah pro sníženou viriálovou hmotnost

$$M = \frac{5R\bar{v}^2}{3G} \frac{(b+5)(2b+5)}{(b+3)(2b+11)}, \quad (8.12)$$

což pro $b \rightarrow \infty$ dává původní Zwickyův odhad (8.1). Nejlepší odhad parametru b hustoty rozložení z horního obr. 8.6 je blízký hodnotě $b \approx 1$. Odpovídající koeficient $\frac{35}{26}$ z (8.12) je jen 80 % zlomku $\frac{5}{3}$ z (8.1). Protože však jsou těžší galaxie blíže středu (viz obr. 7.3 a 8.1), vztah (8.1) může přeceňovat celkovou viriálovou hmotnost až o 20–25 %.

Relativistické efekty vysokých rychlostí. Pomocí Hubbleova vztahu

$$v = H_0 d \quad (8.13)$$

užitého pro $v = \bar{v}$ a hodnot uvedených v (7.7) a (8.5) se odhaduje, že galaktická kupa A1656 je od nás vzdálena $d \approx 100$ Mpc. Přitom se předpokládá, že odpovídající červený posuv lineárně vzrůstá se vzdáleností d , tj.

$$z = \frac{H_0}{c}d = 0.023, \quad (8.14)$$

kde $c = 299\,792\,458$ m/s je rychlost světla ve vakuu.¹⁰ Výše uvedená vzdálenost d je ale trochu přeceněna, protože je třeba vzít v úvahu relativistické efekty způsobené velkou rychlostí vzdalování kupy (8.5). Klasický vztah pro nárůst vlnové délky λ elektromagnetického záření

$$z = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{v}{c},$$

kde λ_0 je změřená vlnová délka, je-li zdroj záření vůči pozorovateli v klidu, je třeba zaměnit relativistickým vztahem [108]

$$\lambda = \lambda_0 \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}}.$$

Odtud pro $z = 0.023$ dostáváme

$$v = c \frac{z(z+2)}{z^2 + 2z + 2} = 6820 \text{ km/s},$$

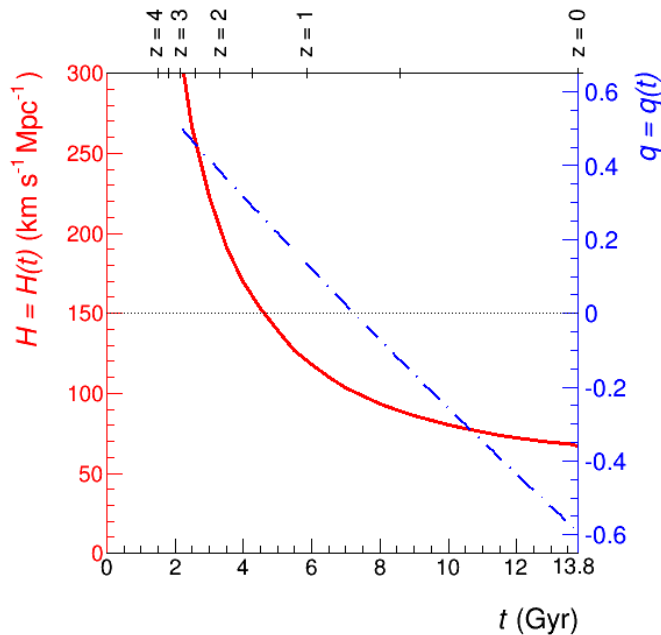
což je téměř o 1 % menší rychlost než (8.5). Vzdálenost d je podle (8.13) tedy zhruba o 1 % menší, a proto je i poloměr R z (8.1) menší o 1 %.

Gravitační červený posuv. Vzdálenost d je rovněž přeceněna v důsledku gravitačního červeného posuvu galaktické kupy, který by měl být odečten od celkového naměřeného červeného posuvu. Součin cz se pro malá z (tj. $z \ll 1$) občas též nazývá *červený posuv* a udává se v km/s. Podle [37], s. 10, je celkový gravitační posuv dvou obřích centrálních galaxií kolem 61 km/s, což je cca 1 % rychlosti (8.5). I když jsou červené posuvy galaxií v okrajových oblastech kupy A1656 jen 20 km/s, opět to vede ke snížení skutečné vzdálenosti kupy od nás. Proto je menší i poloměr (8.2), rychlost (8.3) i celková viriálová hmotnost (8.1). Podobné hodnoty gravitačních červených posuvů se uvádějí v [27], [106] a [292].

Gravitační čočkování. Ohyb světelných paprsků způsobený silným gravitačním polem galaktické kupy A1656 lze odhadnout pomocí (8.2), (8.6) a známého vztahu pro úhel ohybu (viz např. [91], s. 34; [231] a [262])

$$\phi = \frac{4GM}{c^2 R} \approx 2 \times 10^{-4} \text{ rad} \approx 0.7',$$

¹⁰V době, kdy světlo opustilo galaktickou kupu, byl vesmír $(z+1)$ krát menší. Určovat vzdálenosti v rozpínajícím se vesmíru je tedy velice obtížné a navíc nejednoznačné. V kosmologii se proto definuje celá řada různých vzdáleností (angl. angular, comoving, light-year, luminosity, Minkowski, parallax, proper motion, redshift, ... distance), viz např. [3], [208], [287].



Obr. 8.7. Průběh Hubbleova parametru $H = H(t)$ je vyznačen plnou čarou podle dat z [208]. Čerchovaně je znázorněn průběh deceleračního parametru $q = -1 - \dot{H}/H^2$, který byl odvozen pomocí numerického derivování funkce $H = H(t)$. Na spodní horizontální ose je čas v miliardách let od Velkého třesku a na horní ose je odpovídající červený posuv z .

kde $\phi = (\beta - \alpha)/2$, srov. obr. 8.3. Tato hodnota představuje asi 1 % z 1° , který zhruba odpovídá úhlovému poloměru $\beta/2$ uvažované kupy (srov. (8.2)). Tudíž R v (8.1) by opět mělo být asi o 1 % menší.

Klesající Hubbleův parametr. Rychlost rozpínání vesmíru je charakterizována Hubbleovým parametrem $H = H(t)$, který podstatně závisí na celkové hustotě hmoty a temné energie. Definujeme si jej v (10.3). Hodnoty tohoto parametru klesají s časem, jak je patrné z obr. 8.7. Podle [208] je jeho hodnota pro červený posuv $z = 0.023$ o více než 1 % větší než současná hodnota H_0 . Vzdálenost d v (8.14) je z tohoto důvodu opět přeceněna.

Příspěvek od temné energie. Myšlenkou, že by se vesmír mohl rozpínat nejen globálně, ale i lokálně, se poprvé zabýval McVittie v článku [179] z roku 1933. Lokální expanze na škálách Sluneční soustavy (viz např. [53], [54], [137], [139], [296]) má rychlost srovnatelnou s Hubbleovou konstantou, která charakterizuje globální expanzi celého vesmíru, jak ještě uvidíme ve druhé části knížky. Rovněž galaxie a dokonce i větší struktury se také pozvolna rozpínají, viz [144], [156], [217]. Podle (7.7) je hodnota Hubbleovy konstanty přepočtená na poloměr kupy (8.2) rovna $RH_0 \approx 10^5$ m/s, což je více než 5 % rychlosti (8.5). Zvýší se nám tak střední kvadratická rych-

lost \bar{v} , ve srovnání s rychlostí, jakou bychom dostali, kdyby temná energie na kupu nepůsobila. To může být další z důvodů, proč Zwicky pozoroval příliš velké rychlosti v kupě A1656. Protože je rychlost \bar{v} v (8.12) v kvadrátu, může příspěvek od temné energie zdánlivě navýšit skutečnou hodnotu M až o 10 % (viz tabulka 8.1).

Tabulka 8.1. Některé jevy a jejich odpovídající procentuální vliv, jenž snižuje viriálovou hmotnost M , pozorovaný poloměr R galaktické kupy A1656 a střední kvadratickou rychlost galaxií \bar{v} .

	Jev	M	R	\bar{v}
1	Nerovnoměrnost rozložení hmoty	20–25	0	0
2	Relativistické efekty vysokých rychlostí	3	1	1
3	Gravitační červený posuv	3	1	1
4	Gravitační čočkování	1	1	0
5	Klesající Hubbleův parametr	3	1	1
6	Příspěvek od temné energie	10	0	5

Snížení střední kvadratické rychlosti. Existuje ještě jeden kvadraticky nelineární jev, který má nezanedbatelný vliv na odhad výsledné hmotnosti [146]. V předchozím textu jsme ukázali, že střední rychlosti vzdalování \bar{v} a \bar{v}_i byly přeceněny o několik procent. Kdyby to bylo např. o 8 %, pak čtverec \bar{v}^2 definovaný v (7.11) by byl přeceněný přibližně o $100(1 - 0.92^2) = 15$ %. To opět podstatně redukuje odhadovanou hmotnost (8.6) oproti viriálové hmotnosti (8.1) či (8.12).

Všech 7 výše analyzovaných nezávislých jevů podstatně snižuje celkovou viriálovou hmotnost (8.1). Odhadovaná hmotnost ve vztahu (8.6) tak může být poloviční nebo ještě menší.



8.4. Jakou hmotnost má temná hmota v centru kupy A1656

Podle [104] rozložení temné hmoty v kupě zhruba kopíruje rozložení galaxií. Na závěr proto uveďme ještě příklad ilustrující, zda je vůbec nutné postulovat existenci temné mezigalaktické hmoty v centrální oblasti kupy A1656.

Pro jednoduchost předpokládejme, že obě obří eliptické galaxie NGC 4889 a NGC 4874 (viz obr. 7.3) mají stejnou hmotnost m definovanou v (8.7) a že obíhají kolem sebe rychlostí v po kružnici se středem O a poloměrem r . Pokud by jedna z těchto galaxií měla menší hmotnost, tak by obíhala větší rychlostí po delší dráze, a tím by zachycovala více menších galaxií než druhá obří galaxie. Tímto mechanismem se hmotnosti obou galaxií vyrovnávají.

Protože gravitační potenciál uvnitř homogenní kulové vrstvy je konstantní (viz druhá Newtonova věta 4.2), vnější galaxie ani případná temná hmota vně koule se středem O a poloměrem r nemají na tento pohyb příliš velký vliv. Z Newtonova gravitačního zákona a vztahu pro dostředivou sílu pak dostaneme

$$\frac{Gm^2}{4r^2} = \frac{mv^2}{r}. \quad (8.15)$$

Vzdálenost obou galaxií na nebeské sféře je $8.15'$. Tento tento úhel odpovídá projektované vzdálenosti 7.32×10^{21} m, pokud je střed kupy od nás vzdálen 100 Mpc. Pro poloměr dráhy r tedy platí

$$r \geq 3.66 \times 10^{21} \text{ m}. \quad (8.16)$$

Podle dat¹¹ z roku 2005 (viz [1], s. 19) jsou naměřené radiální rychlosti obou galaxií 6472 km/s a 7189 km/s. Přitom jejich průměr $\tilde{v} = 6830.5$ km/s velice dobře koresponduje s průměrnou rychlostí vzdalování celé kupy (8.5). Pro radiální rychlost v_{radial} vzhledem k \tilde{v} podle (8.7), (8.15) a (8.16) vychází

$$\begin{aligned} 3.585 \times 10^5 &= \frac{7\,189\,000 - 6\,472\,000}{2} = v_{\text{radial}} \leq v = \sqrt{\frac{Gm}{4r}} \\ &\leq \sqrt{\frac{6.673 \times 10^{-11} \times 2 \times 10^{43}}{4 \times 3.66 \times 10^{21}}} = 3.02 \times 10^5 \text{ (m/s)}. \end{aligned} \quad (8.17)$$

Porovnáme-li levou a pravou stranu, dostaneme mírný nesoulad. Tento zjednodušený příklad tedy naznačuje, že Newtonova mechanika nepopisuje realitu zcela věrně nebo jsou špatně odhadnuty hmotnosti či radiální rychlosti obou eliptických galaxií nebo je třeba předpokládat existenci nějaké nesvítící hmoty mezi galaxiemi, i když se nezdá, že by jí mělo být 10krát více než hmoty svítící. Kdybychom např. zahrnuli vliv malých galaxií a obrovského množství osamělých hvězd [278], které jsou uvnitř koule se středem O a poloměrem r , dostali bychom pravou stranu (8.17) podstatně větší. Také dolní odhad v (8.16) je menší, protože kupa zvětšuje úhlové vzdálenosti v důsledku gravitačního čočkování. To je další důvod pro to, že by pravá strana v (8.17) měla být ve skutečnosti větší.

Podle druhé Newtonovy věty 4.2 má na rychlost obou obřích centrálních galaxií vliv zejména hmota nacházející se v kouli o poloměru r . Jak jsme již zmínili, uvnitř galaktických kup je však alespoň 5krát více baryonové hmoty ve formě horkého plynu emitujícího rentgenové záření než baryonové hmoty obsažené v galaxiích (viz [2], [20], [283]). Zwickyův paradox pozorovaných velkých rychlostí tak pomine, neboť může mít zcela přirozené vysvětlení. Potřebujeme vůbec postulovat existenci temné hmoty, která by se v okolí galaxií koncentrovala?



¹¹Podle starších dat [18] z roku 1995 jsou radiální rychlosti obou galaxií 6505 km/s a 7108 km/s, což dává na levé straně (8.17) menší hodnotu 3.015×10^5 m/s.

9. Ploché rotační křivky spirálních galaxií

*Výhodou matematiky je skutečnost,
že se můžete sami přesvědčit,
zda máte pravdu či se mýlíte.*

NORMAN MACRAE

9.1. Vera Rubinová

Vera Rubinová roz. Cooperová zasvětila celou svoji vědeckou kariéru prosazování revolučních myšlenek, jež významně ovlivnily rozvoj soudobé astronomie. Její otec pocházel z Litvy a matka z Moldavska. Ve své diplomové práci na Cornellově univerzitě se zabývala zásadní otázkou, zda by vesmír mohl rotovat jako celek.¹ Školitelem



Obr. 9.1. Vera Rubinová roz. Cooperová (*1928), foto Robert Rubin

¹Na vlastní teorii rotujícího vesmíru pracoval i Kurt Gödel [73]. Pro libovolnou lichou dimenzi n lze sféru S^n rotovat kolem středu tak, že všechny body mají stejnou rychlost (lze ji totiž „učesat“). Nejedná se tedy o rotaci kolem osy.

její doktorské dizertace byl George Gamow, který na toto téma publikoval článek [69]. Rubinová byla první ženou, která používala přístroje na kalifornské observatoři Mt. Palomar. Její životní dráha je podrobně popsána např. v [195].

Koncem sedmdesátých let minulého století V. Rubinová zjistila, že spirální galaxie nemají dostatek hmoty k vysvětlení své rychlé rotace. Nevěřila však, že by vesmír měl obsahovat nějakou dokonale průhlednou ale temnou hmotu, i když jí to měření naznačovala. Sama o této záhadě prohlásila [28]:

If I could have my pick, I would like to learn that Newton's laws must be modified in order to correctly describe gravitational interaction at large distances. That's more appealing than a universe filled with a new kind of sub-nuclear particle.

Největším objevem Very Rubinové byla skutečnost, že spirální galaxie mají „ploché“ rotační křivky (viz [234]). Na základě toho pak v 70. letech minulého století rozpracovala vlastní teorii rotačních křivek galaxií. Z vysokých oběžných rychlostí hvězd usoudila, že by galaxie měly obsahovat mnohem více nesvítící látky než svítící, aby vůbec držely gravitačně pohromadě — viz její přehledový článek [233] o temné hmotě.



9.2. Spirální galaxie nerotují podle Keplerových zákonů

Podívejme se nyní podrobněji na hypotézu Very Rubinové. Uvažujme testovací částici o hmotnosti m (typicky se bude jednat o hvězdu) a necht' $M \gg m$ je hmotnost dalšího hmotného bodu generujícího pole centrální síly. Předpokládejme, že testovací částice obíhá kolem středu po kruhové orbitě o poloměru r rychlostí v . Pak z Newtonova gravitačního zákona a vztahu pro dostředivou sílu Rubinová [232] snadno odvodila, že

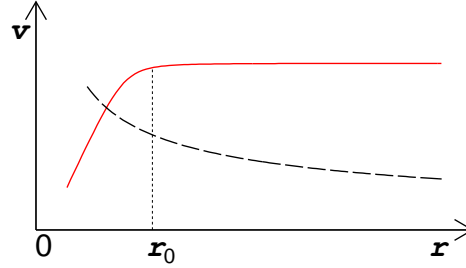
$$G \frac{Mm}{r^2} = \frac{mv^2}{r}, \quad \text{tj.} \quad v = \sqrt{\frac{GM}{r}}. \quad (9.1)$$

Rychlost v částice na kruhové orbitě je tedy úměrná $r^{-1/2}$. Takové dráhy se nazývají *keplerovské* (viz obr. 9.2).

Vera Rubinová uvádí (viz [234], s. 491), že

rotační křivky galaxií jsou ploché a neklesají „keplerovsky“, jak by měly.

Pro vysvětlení tohoto paradoxu je ale důležité si uvědomit, že spirální galaxie nemají pole centrální síly kromě blízkého okolí středu, kde např. v naší Galaxii hvězdy S1, S2, ... obíhají centrální černou díru podle Keplerových zákonů rychlostmi až 7000 km/s, srov. (4.20). Hmotnost této díry je zhruba 3.5 milionů hmotností Slunce, což je méně než jedno promile celkové hmotnosti galaxie (srov. (9.5)). Ve Sluneční soustavě je naopak 99.85 % hmotnosti soustředěno ve Slunci. Planety se



Obr. 9.2. Čárkovaně je znázorněn pokles rychlostí keplerovských drah v závislosti na vzdálenosti r od středu spirální galaxie. Plná čára ukazuje idealizovanou rotační křivku, jejíž tvar objevila Vera Rubinová.

gravitačně téměř neovlivňují a jejich pohyb je určován především centrální silou Slunce. Naproti tomu dráhy hvězd v galaktickém disku jsou podstatně ovlivňovány zejména sousedními hvězdami, protože centrální výduť obsahuje jen cca 10 % všech hvězd Galaxie.

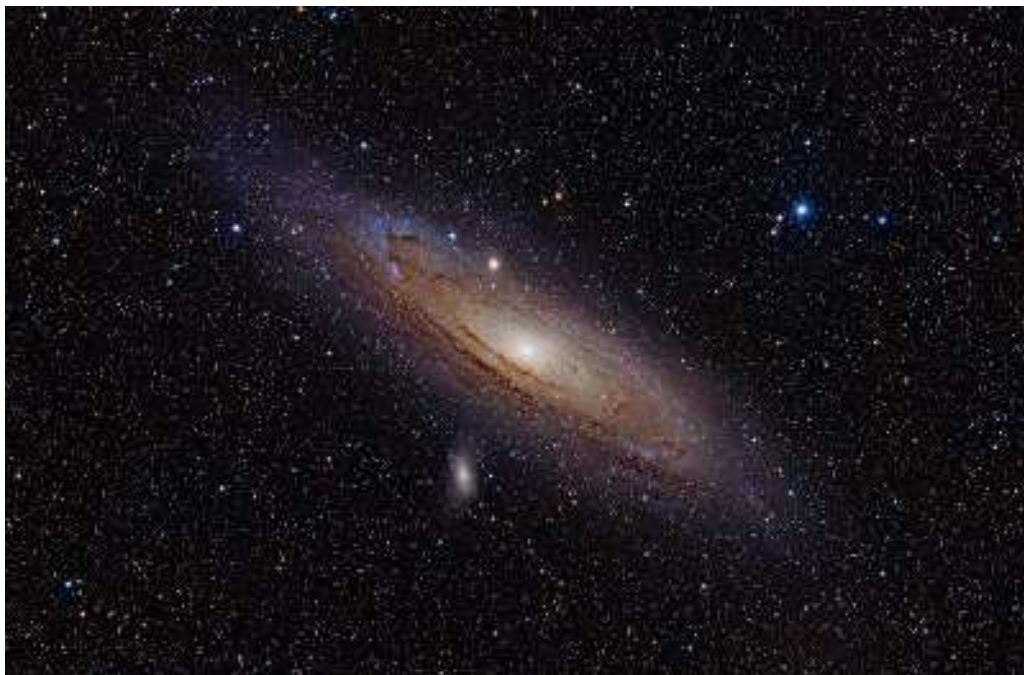
V poznámce 9.1 naznačíme, proč je silové působení diskového tvaru galaxie na testovací částici o dost větší, než když celou její hmotnost soustředíme do jednoho centrálního bodu. Podrobněji to pak rozvedeme v oddílu 9.4. Oběžná rychlost v hvězd na kruhových drahách ve spirální galaxii by proto měla být vyšší než pro keplerovské dráhy.

Vera Rubinová [233] (viz též [235], s. 480) zjistila u okolních spirálních galaxií téměř stejné konstantní² rychlosti všech hvězd³ řádu $v \approx 200$ km/s pro $r > r_0$, kde r_0 zhruba odpovídá poloměru centrální výdutě (angl. bulge) a je typicky rovno několika kpc (viz obr. 9.2 a 9.3). Na druhé straně, vnitřek spirální galaxie pro $r \leq r_0$ včetně eventuální příčky rotuje zhruba konstantní úhlovou rychlostí podobně jako gramofonová deska. Centrální výduť má totiž téměř konstantní hustotu hmoty a přibližně kulový tvar [17]. Proto je hmotnost $M(r)$ koule o poloměru r úměrná r^3 . Podle vztahu (9.1) je pak rychlost hvězd v lineárně úměrná jejich vzdálenosti r od středu (viz obr. 9.2).

Poznámka 9.1. Vztah (9.1) poskytuje jen hrubý odhad, pokud bychom jej chtěli použít k vyjádření oběžných rychlostí hvězd ve spirální galaxii. Ukažme proto nyní, že testovací částice (hvězda) obíhající kouli o poloměru r se zcela libovolným sféricky symetrickým rozložením hustoty (srov. první Newtonovu větu 4.1) má nižší rychlost, než kdyby obíhala disk o stejném poloměru r a stejné hmotnosti. Přitom budeme

²Spirální galaxie typu Sc nebo SBc připomínají svým tvarem hodně otevřené písmeno S. Je pozoruhodné, že pro naměřenou téměř stejnou konstantní rychlost hvězd ([233], s. 7) se spirální ramena nezavíjejí a že v nich nedochází k očekávanému „utahování“ ramen, když galaxie už vykonaly mnoho otoček. Jen těžko lze předpokládat, že se jedná o jakési hustotní vlny [17], s. 544.

³Ve Sluneční soustavě by podobný jev odpovídal tomu, že by Merkur obíhal Slunce stejnou rychlostí jako Neptun.



Obr. 9.3. Velká spirální galaxie M31 v Andromedě zabírá na nebeské sféře 6krát větší plochu než Měsíc v úplňku. Má zřetelnou centrální výduť.

uvažovat speciální rozložení hustoty disku, které vznikne projekcí hmotnosti koule kolmo do roviny disku xy .

Abychom se o tomto tvrzení přesvědčili, stačí uvažovat dva libovolné hmotné body o hmotnostech $m_1 = m_2$ umístěné uvnitř koule zrcadlově symetricky vzhledem k rovině xy (viz obr. 9.4). Potom celková síla F , kterou oba body působí na testovací částici o hmotnosti m , bude menší než síla \overline{F} , kterou by oba hmotné body působily na m , kdyby se nalézaly přímo na disku. Označme d vzdálenost mezi m_1 a m . Je-li b její ortogonální projekce do roviny xy , pak

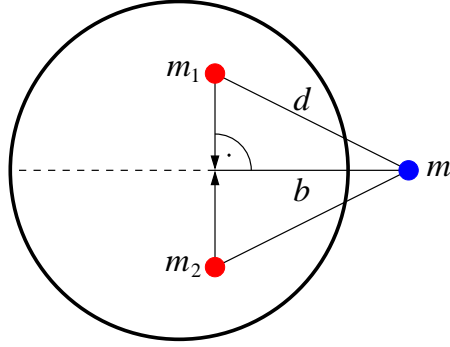
$$F = G \frac{2m_1 m}{d^2} \cdot \frac{b}{d} \quad \text{a} \quad \overline{F} = G \frac{2m_1 m}{b^2}.$$

Vidíme tedy, že poměr sil \overline{F} a F je roven třetí mocnině podílu d/b ,

$$\overline{F} = \left(\frac{d}{b}\right)^3 F \geq F. \tag{9.2}$$

Tato kubická nelinearita způsobuje podle (9.1) větší přitažlivou gravitační sílu disku než pro kouli, a tím i vyšší oběžnou rychlost kolem disku.⁴

⁴Analytické vyjádření silového působení celého disku na vnější testovací částici vede na eliptické integrály (viz [6], s. 156).



Obr. 9.4. Koule se symetricky rozloženou hmotou podle vodorovné roviny působí na testovací částici menší silou než celková hmotnost koule promítnutá kolmo do vodorovné roviny disku — čárkovaně.



9.3. Oběžná rychlost kolem centrálního bodového tělesa

V tomto oddílu představíme poměrně hrubý konzervativní odhad oběžných rychlostí hvězd v případě, že veškerou baryonovou hmotu (tj. zejména protony a neutrony) naší Galaxie nahradíme jedním centrálním hmotným bodem, který může být podle Newtonovy věty 4.1 nahrazen koulí se sféricky symetrickým rozložením hustoty. V dalším oddílu se pak soustředíme na plochý disk se zcela libovolným rotačně symetrickým rozložením hustoty.

Poloměr viditelné části disku naší Galaxie se odhaduje na

$$r_G = 16 \text{ kpc} = 4.938 \cdot 10^{20} \text{ m.} \quad (9.3)$$

Slunce obíhá střed Mléčné dráhy rychlostí⁵

$$v_\odot = 230 \text{ km/s} \quad (9.4)$$

na dráze o poloměru $r_\odot = 8.3 \text{ kpc}$, tj. nalézá se cca v polovině poloměru Galaxie, kde už je hustota hvězd poměrně řídká. Hvězdy obíhající střed Galaxie ve vzdálenosti $r > r_\odot \approx 3 \text{ kpc}$ by měly mít podobnou rychlost jako v_\odot vzhledem k očekávané ploché rotační křivce (viz obr. 9.2).

Označme $M(r_G)$ *hmotnost baryonové látky* (tj. všech známých elementárních částic) uvnitř koule o poloměru r_G se středem v centru Galaxie. K jejímu odhadu použijeme rozdělení hvězd dané tabulkou 9.1 (viz např. [182], s. 394), které se opírá o data z družice Hipparcos.⁶

⁵Většina zdrojů uvádí rychlost Slunce v_\odot v rozmezí 220 až 240 km/s.

⁶Harvardská spektrální klasifikace (en.wikipedia.org/wiki/Stellar_classification) uvádí podobná poměrná zastoupení hvězd, která budou dále zpřesňována pomocí dat z družice Gaia.

Tabulka 9.1. Rozdělení hvězd v naší Galaxii podle spektrální třídy. Druhý řádek udává odpovídající hmotnost typické hvězdy v jednotkách hmotnosti Slunce M_{\odot} . Na třetím řádku je počet hvězd dané spektrální třídy dělený 10^9 . Na posledním řádku je vyčíslena hmotnost celé třídy v miliardách hmotností Slunce.

Spektrální třída	O	B	A	F	G	K	M	bílí trpaslíci
Hmotnost v M_{\odot}	25	5	1.7	1.2	0.9	0.5	0.25	0.7
Počet v miliardách	10^{-5}	0.3	3	12	26	52	270	35
Součin	≈ 0	1.5	5.1	14.4	23.4	26	67.5	24.5

Z předposledního řádku vidíme, že se v naší Galaxii nachází přibližně 400 miliard hvězd. Zatímco koncem minulého století se soudilo, že červených trpaslíků spektrální třídy M jsou pouhá 3 % z celkového počtu hvězd (viz [17], s. 93), dnes se odhaduje, že je jich převážná většina (viz tabulka 9.1). Pro podporu tohoto tvrzení můžeme např. uvést, že z 20 Slunci nejbližších hvězd je v současnosti známo 13 červených trpaslíků. Přitom hmotnost červeného trpaslíka se pohybuje v rozmezí od $0.08M_{\odot}$ do $0.45M_{\odot}$. Z tabulky 9.1 je patrné, že třída M přispívá k celkové hmotnosti Galaxie nejvíce ze všech spektrálních tříd. Vera Rubinová samozřejmě nemohla vědět o existenci tolika červených trpaslíků té nejmenší hmotnostní kategorie. Za tento nárůst vdčíme stále se zlepšujícím detekčním technikám. Tím se nám ale podstatně zvětšila i odhadovaná baryonová hmotnost Galaxie. Sečteme-li čísla v posledním řádku tabulky 9.1, dostaneme nerovnost

$$M(r_G) \geq 162.4 \cdot 10^9 M_{\odot} = 3.25 \cdot 10^{41} \text{ kg}.$$

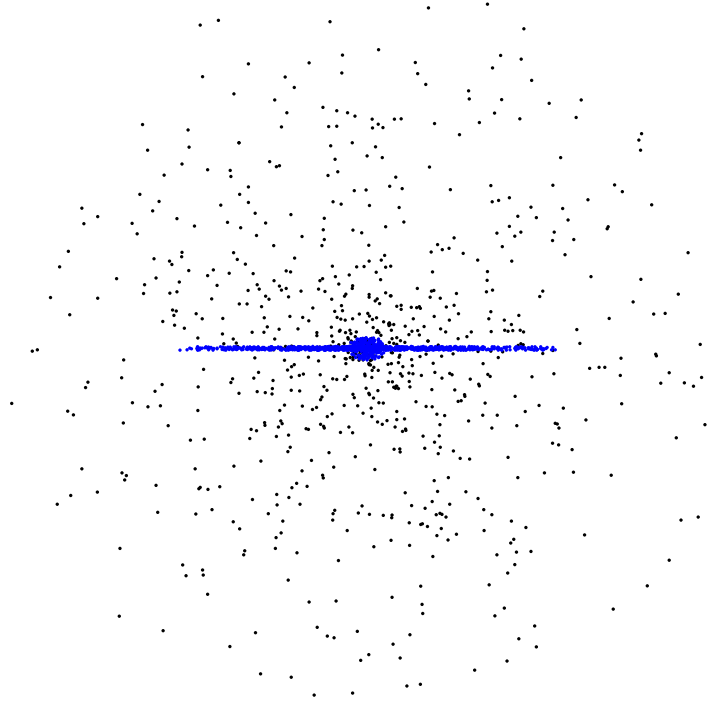
Zatím bohužel neumíme spolehlivě určit, kolik činí příspěvek k $M(r_G)$ od černých děr, kvarkových či neutronových hvězd⁷, infračervených trpaslíků⁸, exoplanet, bludných planet apod., jejichž svítivost je malá. Podle [182], s. 393, baryonová hmotnost všech hvězd v Galaxii činí

$$175 \cdot 10^9 M_{\odot} = 3.5 \cdot 10^{41} \text{ kg},$$

započteme-li ještě hvězdy luminozitní třídy I, II a III (viz [17], s. 92). V disku a ve výduti se také nachází velké množství nesvítící baryonové látky ve formě prachu,

⁷Hvězd z levé části tabulky 9.1 je v současnosti sice málo, ale protože žijí velice krátce, existuje po nich v Galaxii mnoho superhustých kompaktních pozůstatků.

⁸Pro malé chladné hvězdy byly poměrně nedávno zavedeny další tři spektrální třídy L (červenohnědí trpaslíci), T (hnědí trpaslíci) a Y (černí trpaslíci). Například v roce 2013 objevil Kevin Luhman dvojici hnědých trpaslíků vzdálených od Slunce jen 6.5 světelných let. Další hnědý trpaslík WISE J085510.83-071442.5 je vzdálen 7.2 světelných let.



Obr. 9.5. Schematické znázornění spirální galaxie z boku. Centrální sférickou výduť obklopuje plochý disk a řídké sféricky symetrické halo vyplněné zejména neutrálním vodíkem a heliem, starými hvězdami a kulovými hvězdokupami.

plynu a plazmatu. V práci [182], s. 353, se množství mezihvězdné látky (bez hypotetické temné hmoty) odhaduje na cca 10% celkové hmotnosti hvězd. Řídká nesvítící baryonová hmota⁹ se rozprostírá i v galaktickém halo (viz obr. 9.5), jak lze zjistit na rádiových vlnách 21 cm, které odpovídají překlopení spinu v atomu vodíku (viz [235], s. 485). Proto lze celkovou hmotnost baryonové látky uvnitř uvažované koule zdola odhadnout na¹⁰

$$M(r_G) \geq 3.85 \cdot 10^{41} \text{ kg.} \quad (9.5)$$

Podle [182] klesá hustota rozložení hmoty $\rho = \rho(r)$ za viditelným okrajem rychleji než r^{-2} , jinak by integrál $\int_{r_G}^{\infty} \rho(r) 4\pi r^2 dr$ divergoval. Z druhé Newtonovy věty 4.2 však plyne, že tato hmota (ani eventuální temná hmota) nemá na pohyb hvězd žádný vliv, pokud je její rozložení sféricky symetrické. Zkoncentrujeme-li baryonovou hmotu

⁹Tato hmota pozvolna padá na disk a podporuje tak proces tvorby nových hvězd.

¹⁰V astronomických tabulkách [165] se na s. 127 píše, že celková hmotnost naší Galaxie je bilion Sluncí, tj. $M_G = 10^{12} M_{\odot} = 2 \cdot 10^{42} \text{ kg}$. Některé zdroje [97] dokonce uvádějí ještě třikrát větší hodnoty v objemu do vzdálenosti 200 kpc od středu.

uvnitř koule o poloměru r_G do jednoho centrálního bodu, pak ze vztahů (9.1), (9.3) a (9.5) dostaneme, že oběžná rychlost hvězd na samém okraji viditelného disku je

$$v = \sqrt{\frac{GM(r_G)}{r_G}} \geq \sqrt{\frac{6.674 \cdot 10^{-11} \cdot 3.85 \cdot 10^{41}}{4.938 \cdot 10^{20}}} = 228 \cdot 10^3 \text{ (m/s)}, \quad (9.6)$$

což je hodnota vskutku srovnatelná s naměřenou rychlostí (9.4). I když je vztah (9.6) jen přibližný, postulovat existenci 5–6krát většího množství temné hmoty než baryonové hmoty (viz např. [22], [211]), aby se Galaxie nerozpadla a držela gravitačně pohromadě, se zdá být dosti nadhodnocené.



9.4. Oběžná rychlost kolem plochého disku

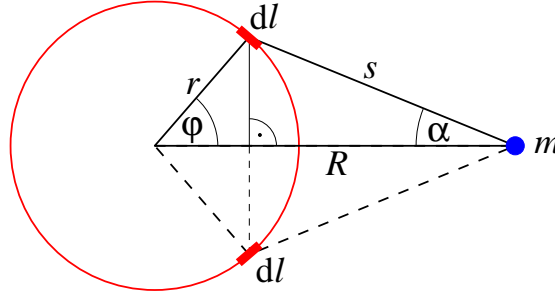
U spirálních galaxií činí průměrná tloušťka disku (mimo výdutě) od 300 pc do 1 kpc. Je tedy cca 30krát až 100krát menší než průměr viditelné části galaxie. Je to dobře patrné, jsou-li k nám galaxie natočeny bokem.¹¹ Přitom plyn a prach se nalézají zejména v těsné blízkosti roviny disku. Proto budeme na disk galaxie pohlížet jen jako na dvojrozměrný útvar, což je zjevně lepší aproximace než centrální hmotný bod. Gravitační pole spirální galaxie budeme tedy aproximovat gravitačním polem plochého disku s rotačně symetrickým rozložením hustoty.

Věta 9.1. *Částice obíhající hmotný bod po kruhové dráze o poloměru R má menší rychlost, než kdyby obíhala plochý disk o stejné hmotnosti s libovolně rotačně symetricky rozloženou hustotou hmoty a o poloměru nepřesahujícím R .*

Důkaz. Větší přitažlivá síla způsobuje větší oběžnou rychlost po kruhové dráze, a proto stačí porovnat jen gravitační sílu disku se silou centrálního hmotného bodu o stejné hmotnosti. Podle předpokladů věty je plošná hustota disku $\rho = \rho(r) \geq 0$ závislá pouze na vzdálenosti od jeho středu. Nejprve vyšetříme, jak působí libovolný pevně zvolený jednorozměrný homogenní prstenec o poloměru $r \in (0, R)$ na testovací částici o hmotnosti m ve vzdálenosti R od středu prstence. Pak celková hmotnost prstence bude $M = 2\pi r\rho$, kde ρ je délková hustota. Zkoncentrujeme-li hmotnost prstence do jeho středu, potom odpovídající síla působící na testovací částici bude rovna

$$\bar{F} = G \frac{2\pi r\rho m}{R^2}. \quad (9.7)$$

¹¹Kdybychom z disku a výdutě naší Galaxie vytvořili homogenní disk o hustotě vody ρ , měl by tloušťku jen asi jako tvrdý papír $h = M/(\pi R^2 \rho) = 0.0005 \text{ m}$, kde $M \approx 3.85 \cdot 10^{41} \text{ kg}$ je odhadovaná baryonová hmotnost (srov. (9.5)).



Obr. 9.6. Homogenní prstenec působí na vnější částici větší silou, než kdyby byla jeho celková hmotnost zkoncentrovaná do středu prstence.

Naším cílem bude ukázat, že \overline{F} je menší než síla prstence působící na testovací částici. Tvzení věty pak dostaneme integrací podle r . V polárních souřadnicích (r, φ) uvažujme dva stejné délkové elementy prstence

$$dl = r d\varphi \quad (9.8)$$

umístěné symetricky vzhledem k vodorovné ose ve vzdálenosti s od testovací částice tak, jak je nakresleno na obr. 9.6. Potom podle kosinové věty platí

$$s^2 = r^2 + R^2 - 2rR \cos \varphi \quad (9.9)$$

a síla, kterou tato dvojice působí na testovací částici, se rovná

$$dF = G \frac{2dl \rho m}{s^2} \cos \alpha. \quad (9.10)$$

Ze sinové věty $r \sin \varphi = s \sin \alpha$ plyne

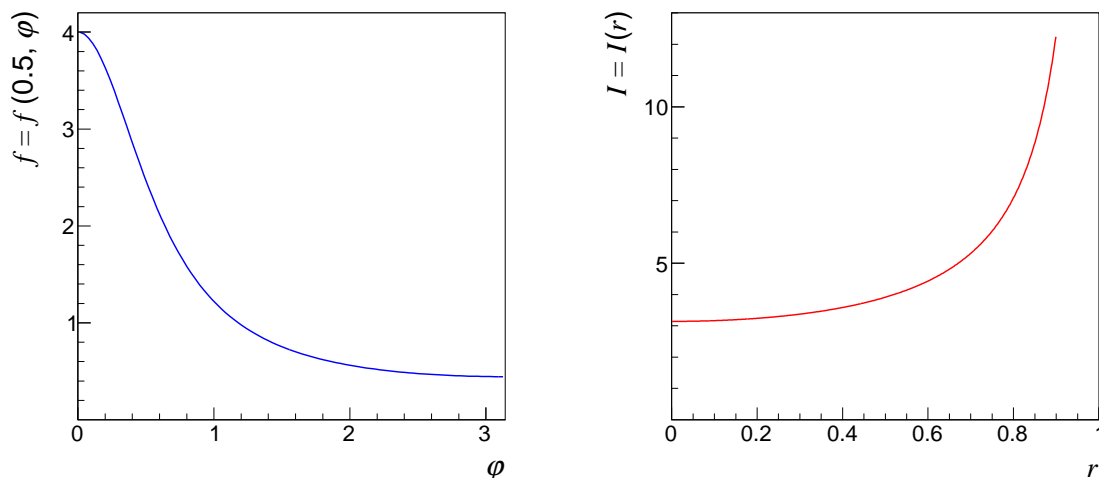
$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{1}{s} \sqrt{s^2 - r^2 \sin^2 \varphi}. \quad (9.11)$$

Bez újmy na obecnosti můžeme dále předpokládat, že gravitační konstanta $G = 1$, $R = 1$, $m = 1$ a že i délková hustota prstence je $\rho = 1$. Pak pro $r \in (0, 1)$ a $\varphi \in [0, \pi]$ dosazením (9.8), (9.9) a (9.11) do (9.10) dostaneme

$$\begin{aligned} dF &= \frac{2dl}{s^2} \frac{1}{s} \sqrt{r^2 + 1 - 2r \cos \varphi - r^2 \sin^2 \varphi} = \frac{2r d\varphi}{s^3} \sqrt{(1 - r \cos \varphi)^2} \\ &= 2r \frac{1 - r \cos \varphi}{(r^2 + 1 - 2r \cos \varphi)^{3/2}} d\varphi, \end{aligned}$$

protože $1 > r \cos \varphi$. Celková gravitační síla prstence o poloměru r působícího na testovací částici je tak

$$F(r) = 2r \int_0^\pi \frac{1 - r \cos \varphi}{(r^2 + 1 - 2r \cos \varphi)^{3/2}} d\varphi = 2r \int_0^\pi f(r, \varphi) d\varphi, \quad (9.12)$$



Obr. 9.7. Vlevo je graf integrované funkce z (9.12) pro $r = 0.5$ na intervalu $[0, \pi]$. Vpravo jsou znázorněny numericky vypočítané hodnoty integrálu $I(r)$ pro $r \in [0, 1)$.

kde pro pevné $r \in (0, 1)$ je integrovaná funkce $f = f(r, \varphi)$ kladná spojitá a klesající. Protože hodnoty v krajních bodech $f(r, 0) = (1 - r)^{-2}$ a $f(r, \pi) = (1 + r)^{-2}$ jsou konečná čísla, je vyšetřovaný integrál konečný (viz obr. 9.7).

Integrál

$$I(r) = \int_0^\pi \frac{1 - r \cos \varphi}{(r^2 + 1 - 2r \cos \varphi)^{3/2}} d\varphi \quad (9.13)$$

vystupující ve vztahu (9.12) bohužel nemá známé analytické vyjádření pro $r \in (0, 1)$. Můžeme ale zjistit, že $I = I(r)$ je rostoucí funkce¹², a analyticky vyčíslit její limitní hodnoty. Pro $r = 0$ vidíme, že je integrovaná funkce rovna jedné, a tak (viz obr. 9.7)

$$I(0) = \pi. \quad (9.14)$$

Pro $r = 1$ dostaneme pomocí Taylorova rozvoje, že

$$\cos \varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \frac{\varphi^6}{6!} + \dots \geq 1 - \frac{\varphi^2}{2}.$$

Proto

$$\varphi^2 \geq 2 - 2 \cos \varphi, \quad (9.15)$$

a tedy platí (viz obr. 9.7)

$$2I(1) = \int_0^\pi \frac{2 - 2 \cos \varphi}{(2 - 2 \cos \varphi)^{3/2}} d\varphi = \int_0^\pi \frac{d\varphi}{\sqrt{2 - 2 \cos \varphi}} \geq \int_0^\pi \frac{d\varphi}{\varphi} = \infty, \quad (9.16)$$

čili

$$I(1) = \infty. \quad (9.17)$$

¹²Funkce I je dokonce ryze konvexní (tj. \dot{I} je rostoucí) a $\dot{I}(0) = 0$.

Dostáváme tak hledanou nerovnost

$$F(r) = 2rI(r) > \overline{F} = 2rI(0) \quad \text{pro } r \in (0, 1], \quad (9.18)$$

kde síly jsou definovány v (9.12) a (9.7). \square



9.5. Oběžná rychlost kolem galaxie s výdutí a halem

Výsledné silové působení galaxie je součtem gravitačního působení výdutě, plochého disku a hala. Většina spirálních galaxií má výduť přibližně sférickou. Například sousední Velká galaxie M31 v Andromedě na obr. 9.3 má zřetelnou centrální výduť sahající zhruba do 20 až 25 % jejího poloměru.¹³ Podle první Newtonovy věty 4.1 lze silové působení sférické výdutě na vnější hvězdy aproximovat centrální silou hmotného bodu, do něhož je soustředěna celková hmotnost výdutě. Podle druhé Newtonovy věty 4.2 lze silové působení hala za okrajem disku zanedbat a uvažovat jen silové působení centrálního hmotného bodu na hvězdy na okraji disku.

Dále se proto budeme zabývat pouze gravitačním působením mezikruží. Označení bude stejné jako v předchozím oddílu. Podobný trik s dolním odhadem jako v (9.16) můžeme použít, abychom funkci kosinus v (9.13) nahradili kvadratickými polynomy v proměnné φ . To nám pomůže odvodit analyticky podobnou nerovnost jako v (9.18).

Stačí ukázat, že $I(r)$ je větší než π pro $r > 0.25$. Integrál z klesající funkce f na intervalu $[\pi/2, \pi]$ je větší než $\frac{1}{2}\pi \cdot f(r, \pi) = \frac{1}{2}\pi(1+r)^{-2}$ (viz obr. 9.7). Z (9.15) plyne $r\varphi^2 - 2r \geq -2r \cos \varphi$, což umožňuje získat horní odhad jmenovatele I ,

$$r\varphi^2 + (1-r)^2 \geq r^2 + 1 - 2r \cos \varphi.$$

Nerovnosti

$$\cos \varphi \leq 1 - \frac{2\varphi^2}{5}$$

zase využijeme k dolnímu odhadu čitatele na intervalu $[0, \pi/2]$. Dohromady tak platí

$$\begin{aligned} I(r) &= \int_0^{\pi/2} f(\varphi) d\varphi + \int_{\pi/2}^{\pi} f(\varphi) d\varphi \geq \int_0^{\pi/2} \frac{1 - r \cos \varphi}{(r\varphi^2 + (1-r)^2)^{3/2}} d\varphi + \frac{\pi}{2(1+r)^2} \\ &\geq \int_0^{\pi/2} \frac{1 - r + 2r\varphi^2/5}{(r\varphi^2 + (1-r)^2)^{3/2}} d\varphi + \frac{\pi}{2(1+r)^2} > \pi \quad \text{pro } r > 0.25, \end{aligned}$$

kde poslední integrál lze vypočítat analyticky [220], s. 466.

¹³Orbitální rychlost hvězd mimo centrum M31 je podle Rubinové opět kolem 230 km/s (viz [233], s. 7). Poloměr M31 činí $r_A \approx 2r_G$ a celková hmotnost se odhaduje na $M_A \approx 3M_G$ (viz např. [108]). Podle (9.6) dostaneme ještě větší nesoulad pro postulování existence temné hmoty v M31 než pro naší Galaxii.

Vidíme tedy, že větu 9.1 lze modifikovat i na mezikruží o vnitřním poloměru $R/4$ a vnějším poloměru R . Gravitační síla mezikruží na testovací částici na vnějším okraji je opět větší, než kdybychom celou hmotnost mezikruží zkoncentrovali do středu. Rychlost hvězd na okraji Galaxie je proto větší než v (9.6).

Poznámka 9.2. To, že jsou rotační křivky spirálních galaxií téměř ploché, ještě neznamena, že nutně existuje temná hmota, která by se usazovala v okolí galaxií. Z první Newtonovy věty 4.1 plyne, že gravitační síla, kterou působí dvojrozměrná homogenní sféra (slupka) na hmotný bod, který na ní leží, je konečná. Na druhé straně, síla jednorozměrného prstence působícího na hmotný bod, který na něm leží, je podle vztahů (9.12)–(9.17) nekonečná¹⁴, protože funkce $f = f(r, \varphi)$ ze vztahu (9.12) má pro $r \rightarrow 1$ a $\varphi \rightarrow 0$ nepříjemnou singularitu. Vidíme tedy, že mezi dvojrozměrným a trojrozměrným případem je dosti podstatný rozdíl. Z dvojrozměrného modelu je také patrné, proč hvězdy na okraji spirální galaxie obíhají rychleji než v poli hmotného bodu. Nelze tedy zaměňovat gravitační pole galaxie s polem centrální síly. Paradox velkých rychlostí hvězd pozorovaných Verou Rubinovou tak může mít zcela přirozené vysvětlení.



9.6. Současný stav chápání temné hmoty

Analýzou fluktuací reliktního záření, které detekovala sonda Planck (viz [210] a [211]), se zjistilo, že vesmír by měl být složen z **27 % temné hmoty**, necelých 5 % baryonové látky (z toho méně než 1 % tvoří svítící látka) a zbytek připadá na temnou energii. V této (ale i předchozí) kapitole jsme předložili několik protiargumentů poukazujících, že množství odhadované temné hmoty, která by se koncentrovala kolem galaxií, je značně nadsazené.

V současnosti probíhá rozsáhlá diskuze o tom, co vlastně temná hmota je. Rozpor nějakého modelu s pozorováním ještě neimplikuje existenci temné hmoty, protože model nemusí být správný. Značnou část nesvítící hmoty jistě tvoří známé částice, protože jen asi 10 až 20 % baryonové látky svítí. Zbytek tvoří temná oblaka mezihvězdného a mezigalaktického prachu, plynu a plazmatu. Hovoří se také o objektech MACHO (Massive Compact Halo Objects), což jsou osamělé černé díry, vyhaslé hvězdy, bludné planety (nomádi) apod. Velký podíl na hmotnosti galaxií mají též infračervení trpaslíci. Dosti obtížně se detekují, ale odhady jejich počtů v naší Galaxii stále narůstají. K nesvítící hmotě mohou přispívat i temné galaxie, v nichž je tvorba hvězd potlačena, protože hustota látky klesla pod určitou kritickou mez nutnou pro tvorbu hvězd (jako např. u galaxie LEO IV v těsné blízkosti naší Galaxie). Svítivost takových galaxií je malá, přestože mají stále dostatek nesvítící baryonové hmoty.

¹⁴Pokud by ale měl prstenec kladnou konstantní tloušťku, pak by jeho síla na hmotný bod byla konečná.

Zatím neumíme spolehlivě experimentálně ověřit, kolik hmoty připadá na neutrina (zejména reliktní). Zastánci temné hmoty proto pátrají po nových elementárních částicích, jež by mohly výrazně přispět k celkové hmotnosti vesmíru. Například axiony jsou hypotetické částice se spinem 0, které byly postulovány, aby vysvětlily, proč se v silných interakcích (kvantové chromodynamice) nenarušuje CP symetrie (Charge–Parity). Měly by být velice lehké, 10^{-6} až $1 \text{ eV}/c^2$, a s okolím by měly interagovat gravitačně a elektromagneticky. Kandidáty na temnou hmotu by mohly býti tzv. WIMPy (angl. Weakly Interacting Massive Particles). WIMP je souhrnné označení pro jakési hypotetické částice, o kterých se předpokládá, že jsou velice těžké (alespoň $10 \text{ GeV}/c^2$) a s okolím interagují slabě a gravitačně. Částice spadající do této kategorie předpovídá např. supersymetrické rozšíření standardního částicového modelu, kde lze roli WIMPu přisoudit neutralinu. V této teorii má každý boson svůj supersymetrický fermionový protějšek a naopak. Neutralino je tedy boson odpovídající neutrinu, což je fermion.

Pro detekci temné hmoty se stavějí různé sofistikované detektory (CDMS, DAMA/LIBRA, ADMX, ...) často umístěné pod zemí, které zatím žádnou temnou hmotu nedetekovaly. Rovněž na urychlovači LHC v CERNu dosud nebyly objeveny žádné nové částice, jež by vysvětlily temnou hmotu.

Působení temné hmoty ve Sluneční soustavě se také nepozoruje [188], i když je Slunce značný gravitační atraktor. Zdá se tedy, že temná hmota, pokud existuje, téměř jistě není schopna disipovat svou vnitřní energii. Proto se nemůže usadit v okolí Slunce. Rovněž pozorované kmitání hvězd ve směru kolmém na galaktickou rovinu Mléčné dráhy lze dobře vysvětlit klasickou Newtonovou mechanikou bez přítomnosti temné hmoty (viz [188]).

Na druhé straně Douglas Clowe uvádí v článku *A direct empirical proof of the existence of dark matter* [43] příklad srážky dvou galaktických kup vzdálených od nás 3.7 miliardy světelných let, kde se mezigalaktický plyn zabrzdí, zatímco galaxie pokračují dále v nezměněném směru společně s temnou hmotou a její přítomnost je odhalena pomocí gravitačního čočkování. Přestože název článku má v čtenáři vzbudit dojem, že se konečně podařilo najít přímý důkaz existence temné hmoty, zatím neumíme změřit tangenciální rychlosti jednotlivých galaxií k prokázání, že ke srážce skutečně došlo. Vzhledem k velkému natěsnání galaxií mělo dojít k dynamickému brzdění. Místa s údajnou temnou hmotou jsou obarvena uměle na základě numerických simulací bez popisu příslušného algoritmu a jakékoliv analýzy chyb. Podobných příkladů existuje už několik (např. Bullet Cluster, Musketball Cluster). Obě kupy jsou vždy zhruba stejně velké a společně s oblaky temné hmoty leží v jedné přímce (viz obr. 9.8), což se však jeví ze statistického hlediska velice málo pravděpodobné. Obecně by kupy měly mít rozdílnou velikost a jejich trajektorie by neměly ležet v jedné přímce (ani v projekci na nebeskou sféru).

I když data, která Zwicky a Rubinová používali, byla dosti nepřesná, nelze jim upřít prioritu v zajímavé úvaze vedoucí k postulování existence temné hmoty [146].



Obr. 9.8. Srážka dvou galaktických kup (tzv. Bullet Cluster). Modře je uměle obarvena domnělá temná hmota a červeně oblast, z níž vychází rentgenové záření v důsledku srážky mezigalaktického plynu z obou kup [43].

Je velice pravděpodobné, že Newtonův gravitační zákon na kosmologických vzdálenostech aproximuje realitu jen přibližně. Proto je třeba obezřetně přijímat výsledky složitých numerických simulací, které obvykle obsahují tisíce příkazových řádků kódu a snaží se např. prokázat, že bez temné hmoty by se galaxie nezformovaly tak rychle po Velkém třesku.

V současnosti se také rozvíjejí a studují různé modifikace Newtonovy mechaniky MOND (Modified Newtonian Dynamics) [177] a jejich relativistická zobecnění TeVeS (Tensor-Vector-Scalar) [13]. Účinky, které se přičítají temné hmotě, se snaží vysvětlit pomocí jiného tvaru gravitačního zákona. Na druhé straně, řada dalších prací ([61], [68], [99], [188] a [250]) ukazuje, že na škálách galaktických disků je Newtonova teorie gravitace stále ještě celkem dobrou aproximací reality a není ji třeba modifikovat ani předpokládat existenci temné hmoty. Galaxie mají celkem zanedbatelné velikosti ve srovnání s pozorovatelným vesmírem, kde Newtonova teorie jistě neplatí.

Příklady uváděné v oddílech 8.4 a 9.3 naznačují, že není jasné, zda nebaryonová skrytá hmota, která by se koncentrovala kolem galaxií, vůbec existuje. Jinými slovy, temná hmota může být jen chyba modelu vzniklá nesprávnou interpretací dat. Pokud přesto nějaká existuje, patrně jí není šestkrát více než svítící i nesvítící baryonové hmoty dohromady, jak se extrapoluje z vlastností reliktního záření, které k nám přichází ze vzdálenosti větší než 13 miliard světelných let (viz [211]).



Část 2

Antigravitace a temná energie

10. Zrychlující se rozpínání vesmíru

O všem se má pochybovat.

ARISTOTELES

10.1. Nobelova cena za fyziku v roce 2011

Kosmologie je odvětví fyziky zabývající se největšími prostorovými i časovými vzdálenostmi a otázkami vzniku a vývoje vesmíru jako celku. Za kosmologii získali Nobelovu cenu za fyziku v roce 2006 John C. Mather a George F. Smoot za prokázání Planckova spektra a anizotropie kosmického reliktního záření¹ pomocí družice COBE (srov. obr. 18.4 z družice Planck). V roce 2011 byla udělena Nobelova cena za fyziku



Obr. 10.1. Saul Perlmutter, Adam Riess, Brian Schmidt

¹Reliktní záření pochází z doby, kdy probíhala tzv. rekombinace. V důsledku poklesu teploty na cca 3000 K se volné ionty a elektrony spojily do atomů a vesmír se stal průhledný pro fotony. V současné době teplota reliktního záření odpovídá vyzařování černého tělesa o teplotě 2.73 K. Poznamenejme, že když byl vesmír zhruba 100krát menší než v současnosti, teplota reliktního záření se pohybovala kolem 0 °C.

opět za kosmologii třem astronomům za objev zrychlujícího se rozpínání vesmíru. Švédská královská akademie věd rozhodla rozdělit částku 10 milionů švédských korun mezi vedoucí osobnosti dvou soupeřících týmů zejména za práce [204], [222] a [203] z let 1997–1999, které vedly ke změření hodnot některých kosmologických parametrů našeho vesmíru a ke zjištění, že se vesmír rozpíná zrychleně v důsledku temné (skryté) energie.

Prvním laureátem je Američan Saul Perlmutter (*1959), který získal polovinu Nobelovy ceny. Perlmutter vedl *Supernova Cosmology Project* na University of California v Berkeley. Vystudoval fyziku na Harvard University v roce 1981 a získal vědecký titul PhD rovněž z fyziky na University of California v Berkeley v roce 1986.

Druhým oceněným je Adam Guy Riess (*1969), který je profesorem astronomie na Johns Hopkins University a Space Telescope Science Institute v Baltimore ve státě Maryland. Tento známý americký kosmolog absolvoval Massachusetts Institute of Technology v roce 1992 a titul PhD obhájil na Harvard University v roce 1996.

Konečně třetím oceněným je americko-australský astronom Brian Schmidt (*1967), vedoucí týmu *High- z Supernova Search* na Australian National University ve Weston Creek. Schmidt vystudoval astronomii na University of Arizona v roce 1989 a PhD dosáhl na Harvard University v roce 1993. Oba posledně jmenovaní laureáti získali druhou polovinu Nobelovy ceny.

Slavnostní nobelovské přednášky všech tří laureátů proběhly 8. prosince 2011 v Aule Magna na univerzitě ve Stockholmu. Posluchači se dozvěděli, jaké bylo teoretické pozadí jejich výzkumu, jak byl zorganizován observační program, které kosmologické modely lze nyní apriori vyloučit apod. Nobelovy ceny za fyziku pak byly jako každoročně předány dne 10. prosince v den výročí smrti Alfreda Nobela (zemřel v roce 1896). Připomeňme, že cena se uděluje již od roku 1901, kdy ji jako první získal Wilhelm Conrad Röntgen.



10.2. Rozpínající se vesmír a Hubbleova konstanta

Protože Nobelova cena byla udělena za kosmologii, připomeňme si nejprve některé důležité milníky ve vývoji této vědní disciplíny. Koncem 16. století Giordano Bruno (1548–1600) v pojednání *De l'infinito, universo e mondi* [31] vyslovil hypotézu, že vesmír je nekonečný a že každá hvězda je podobná našemu Slunci, což se často považuje za počátek novodobé kosmologie [187]. Za své revoluční názory byl 17. 2. 1600 upálen v Římě na náměstí Campo de' Fiori (Pole květin). Dnes zde stojí socha, která tuto událost připomíná. Od té doby bylo v kosmologii učiněno mnoho objevů.

V roce 1900 německý fyzik Karl Schwarzschild (1873–1916) v práci [249] předložil

domněnku, že vesmír má konečný objem a že jej lze popsat obrovskou trojrozměrnou nadsférou (hypersférou) v eukleidovském prostoru \mathbb{E}^4

$$\mathbb{S}_r^3 = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{E}^4 \mid x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = r^2\}.$$

Odvodil dokonce i dolní odhad jejího poloměru $r > 100\,000\,000$ AU a studoval její neeukleidovskou strukturu pomocí paralax nejblížeších hvězd. O dva řády větší dolní odhad poloměru vesmíru stanovil v roce 1924 Arthur Eddington ze vzdálenosti některých kulových hvězdokup (viz [193], s. 76).

Pokud se od nás vzdaluje nějaký vesmírný objekt, jeho charakteristické spektrální čáry ve viditelném oboru vykazují v důsledku Dopplerova jevu červený posuv. Jestliže se k nám objekt přibližuje, spektrální čáry světla se naopak posouvají k modré části spektra. Například naše „sousedka“, galaxie M31 v Andromedě, se projevuje modrým posuvem, protože radiální složka její rychlosti (tj. rychlosti směrem k pozemskému pozorovateli) činí cca 300 km/s (viz [255]). Pro úplnost připomeňme, že *červený posuv* z je definován vztahem

$$z = \frac{\lambda}{\lambda_0} - 1,$$

kde λ_0 je vlnová délka určité spektrální čáry, jsou-li zdroj a pozorovatel vůči sobě v klidu, a λ je odpovídající měřená vlnová délka světla ze zdroje. Záporné z mají tedy objekty, které se k nám přibližují, a kladné z mají vzdalující se objekty (míní se radiální složka rychlosti). Je-li např. $z = 1$, pak $\lambda = 2\lambda_0$. Tak velký červený posuv mají galaxie, jež jsou od nás vzdáleny více než 7 miliard světelných let [208]. Číslo $1 + z$ získané ze spektra nějaké hodně vzdálené galaxie tak vlastně udává, kolikrát se vesmír² rozeplnul, než její světlo doletělo k nám. Protože se fotony šíří ve vakuu stejnou rychlostí c pro všechny vlnové délky (tedy i energie), nezávisí z na volbě λ_0 . Z relativistického vztahu (viz [108], s. 348) $z = \sqrt{(c+v)/(c-v)} - 1$ pak dostaneme rychlost vzdalování sledovaných objektů od nás

$$v = \frac{(z+1)^2 - 1}{(z+1)^2 + 1} c.$$

Myšlenka, že by se vesmír mohl rozpínat, vznikla už v roce 1915. Tehdy americký astronom Vesto Mevlin Slipher (1875–1969) proměřoval spektra 15 dobře pozorovatelných spirálních mlhovin, viz [256]. Ke svému překvapení zjistil, že 11 z nich vykazuje červený posuv spektrálních čar železa a vanadu, zatímco jen 3 modrý posuv a jeden objekt měl přibližně nulový posuv. Sliper ovšem tehdy netušil, že se jedná o galaxie. Tři objekty (NGC 1068, 4565 a 4594) se od nás vzdalovaly dokonce

² *Vesmír* budeme modelovat izochronou v prostoročasu, která odpovídá určitému časovému okamžiku po Velkém třesku. Jeho expanze se pak modeluje trojrozměrnou rozpínající se nadplochou ve čtyřrozměrném prostoročasu. Pozor: zcela jinou trojrozměrnou nadplochou v prostoročasu je tzv. *pozorovatelný vesmír*, který navíc vidíme jen v projekci na nebeskou sféru, viz kapitola 18.

rychlostí větší než 1000 km/s a průměrná radiální rychlost všech 15 spirálních mlhovin směrem od Země byla cca 400 km/s. Vesmír v našem okolí se tak pravděpodobně rozpínal.

Další významný objev učinil Edwin Powell Hubble (1889–1953) na observatoři Mount Wilson v Kalifornii, kde byl tehdy největší teleskop světa s průměrem zrcadla 2.5 m. Při pozorování mlhoviny M31 v Andromedě (viz obr. 9.3) zjistil, že je složena z obrovského množství hvězd podobně jako naše Galaxie. V letech 1922–1924 pomocí pulzujících proměnných hvězd — cefeid³ zjistil, že M31 a další mlhoviny nepatří do naší Galaxie, ale že jde o velice vzdálené hvězdné ostrovy. K podobnému závěru došel i Herbert Curtis už v roce 1917, viz [48]. Hubble tak změnil klasifikaci mnohých objektů v okolí Mléčné dráhy. Mlhovina M31 se tedy nalézá za její hranicí a je to samostatná galaxie, která je dokonce větší než ta naše. Podle současných měření je od nás vzdálena přes 2 miliony světelných let, zatímco průměr Galaxie je kolem 100 000 světelných let.

Roku 1925 publikoval Gustav Strömberg (1882–1962) přehledový článek [266]. V něm porovnával radiální rychlosti 43 galaxií, jež téměř všechny změřil V. Slipher. Pouze 5 z nich vykazovalo modrý posuv, zatímco 38 červený posuv.⁴ To už byl statisticky velice významný fakt, který vyžadoval hlubší analýzu. Ze statistického hlediska je totiž téměř vyloučeno, že by šlo o náhodu, kdyby byl vesmír v průměru stacionární. Kdyby totiž pravděpodobnosti výskytu galaxie s modrým a červeným posuvem byly rovny 0.5, pak pravděpodobnost P , že z náhodně vybraných 43 galaxií bude mít nejvýše 5 modrý posuv, je podle binomické věty jen

$$P = \sum_{j=0}^5 \binom{43}{j} 0.5^j (1 - 0.5)^{43-j} = 2^{-43} \sum_{j=0}^5 \binom{43}{j} < 10^{-6}.$$

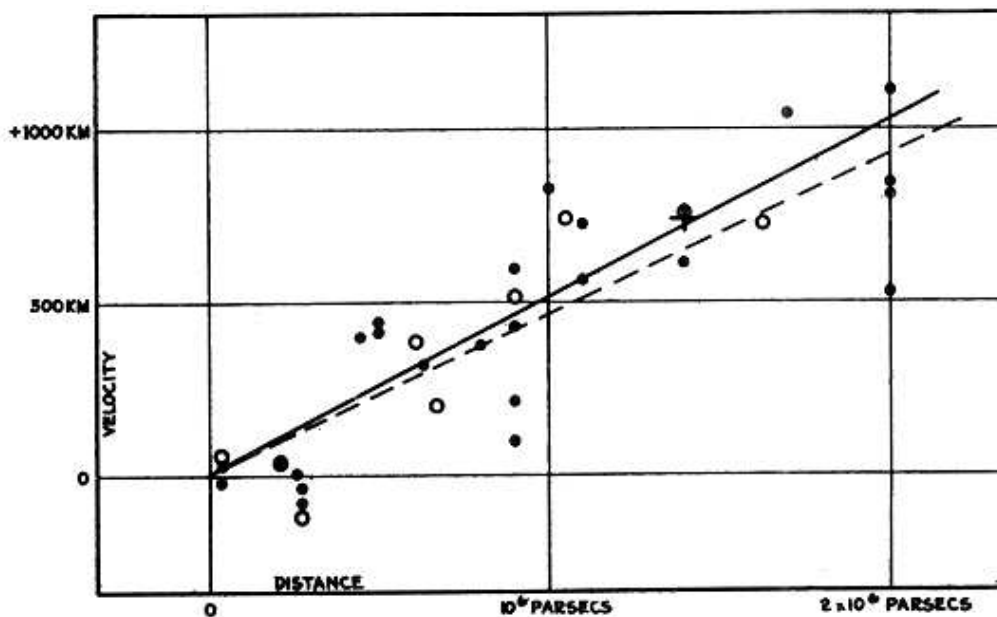
Tak se opět potvrdilo, že se vesmír v našem okolí rozpíná s pravděpodobností takřka rovnou jedné.

V roce 1927 belgický kosmolog Georges E. Lemaître⁵ (1894–1966) inspirován

³Cefeidy jsou hvězdy, jejichž jas se periodicky mění. Objevila je Henrietta Swan Leavittová. Kolem roku 1912 si všimla, že mezi průměrnou svítivostí cefeid a jejich periodou platí přímá úměrnost. Cefeidy tak patří mezi tzv. *standardní svíčky*, což jsou jakékoliv třídy astronomických objektů se známou svítivostí.

⁴Později Hubbleův spolupracovník Milton L. Humason (1891–1972) zjistil ze spektra eliptické galaxie NGC 7619 v souhvězdí Pegase, že se od nás vzdaluje rychlostí 3800 km/s, což už je více než procento rychlosti světla!

⁵Jeho teorie je i v dnešní době v souladu s červeným posuvem galaxií a jejich znatelnou evolucí v kosmologických vzdálenostech, s charakterem reliktního mikrovlnného záření a s existencí primordiálních lehkých prvků (zejména helia a lithia), které vznikly během Velkého třesku. Poločas rozpadu volného neutronu, který není uvězněn v atomovém jádře, je totiž jen 611 sekund. Celoživotnímu dílu G. Lemaître je věnována obsáhlá monografie [90].



Obr. 10.2. Původní obrázek charakterizující rozpínání vesmíru z Hubbleova článku [92]. Na vodorovné ose je vzdálenost příslušné galaxie od nás v parsecích a na svislé ose je radiální složka rychlosti galaxie (správně má být v km/s), která je opravena o pohyb Slunce v naší Galaxii. Černými puntíky jsou znázorněny vyšetřované galaxie a plnou čarou vztah (10.1). Kroužky a přerušovaná čára odpovídají menším skupinám galaxií.

Strömbergovým článkem [262] přišel s myšlenkou Velkého třesku⁶ (viz [167]). O dva roky později pak rozpínání vesmíru nezávisle potvrdil E. Hubble. Ve svém článku [92] publikoval graf (viz obr. 10.2), který ukazuje, že radiální složka v rychlosti uvažované galaxie závisí přibližně lineárně na její vzdálenosti d od nás, tj.

$$v = H_0 d \quad (\text{Hubbleův vztah}). \quad (10.1)$$

S využitím stejnoměrného horního odhadu absolutní svítivosti hvězd a pomocí cefeid z 22 galaxií Hubble odvodil⁷ hodnotu konstanty úměrnosti z (10.1),

$$H_0 \approx 500 \text{ km s}^{-1} \text{Mpc}^{-1} \approx 1.62 \cdot 10^{-17} \text{ s}^{-1},$$

⁶Anglický termín *Big Bang* poprvé vyslovil Fred Hoyle až v roce 1949, autorem českého termínu *Velký třesk* je známý astrofyzik Jiří Grygar. S myšlenkou, že vesmír mohl mít v hodně dávnej minulosti „nulový poloměr“, přišel ale už v roce 1922 A. Friedmann. V anglickém překladu článku [66], footnote 11, se doslova píše: *The time since the creation of the world is the time that has flowed from that instant when the space was one point ($R = 0$) until the present state ($R = R_0$); this time may also be infinite.*

⁷Je pozoruhodné, že Hubble necituje Slipherovy články [255] a [256] ani Lemaîtreův článek [167].

která se po něm nazývá *Hubbleova konstanta*⁸. Tak velká hodnota ale odporovala některým skutečnostem. Například pro určení přibližného Hubbleova stáří vesmíru $T_0 = 1/H_0$ vycházelo méně než 2 miliardy let, což je ve zjevném rozporu se stářím Sluneční soustavy 4.6 miliardy let. Hubble totiž mnohonásobně podcenil vzdálenosti pozorovaných galaxií. Později se hodnota Hubbleovy konstanty zpřesňovala. Současná měřicí technika umožnila stanovit mnohem menší hodnotu (viz např. Riess a kol. [225])

$$H_0 \approx 72 \text{ km s}^{-1} \text{Mpc}^{-1} \approx \frac{1}{13.6 \text{ Gyr}} \approx 2.33 \cdot 10^{-18} \text{ s}^{-1} \quad (10.2)$$

v okolí naší Galaxie a věříme, že i jinde ve vesmíru je nyní přibližně stejná.



10.3. Supernovy typu Ia — standardní svíčky

Pro kosmologii je podstatná pouze gravitační interakce. Vliv dalších tří fyzikálních interakcí, silné, slabé a elektromagnetické,⁹ se v případě velkých prostorových vzdáleností zanedbává. Základní kosmologické principy popsané jazykem matematiky jsou uvedeny například v [287], [187] či [199]. Pro populárnější výklad odkazujeme na známou Weinbergovu publikaci [288].

Podle Einsteinova kosmologického principu¹⁰ je vesmír ve všech bodech homogenní a izotropní. Věříme totiž, že jako pozorovatelé nejsme na žádném privilegiovaném místě ve vesmíru. *Homogenita* je předpokládaná vlastnost vesmíru, kdy pro daný pevný okamžik se vesmír na velkých prostorových škálách¹¹ jeví stejný všem pozorovatelům, ať jsou kdekoliv. Jinými slovy, pro každý pevný čas požadujeme translační symetrii vesmíru.

Podobně *izotropie* je předpokládaná vlastnost vesmíru, kdy se vesmír na velkých prostorových škálách jeví pozorovateli v každém bodě¹² stejný ve všech směrech,

⁸Hubbleovu konstantu ale nezavedl poprvé Hubble, jak se často nesprávně tvrdí. Již o dva roky dříve G. Lemaître uvádí v [167] na s. 56 její hodnotu 625 km/(s Mpc). Vypočítal ji ze Strömbergova seznamu ([266], s. 200) červených a modrých posuvů extragalaktických mlhovin po odečtení rychlosti Sluneční soustavy vzhledem k Mléčné dráze.

⁹Je otázkou, která ze čtyř základních interakcí způsobila Velký třesk, pokud nastal.

¹⁰Termín *Einsteinův kosmologický princip* zavedl v roce 1935 E. A. Milne [183]. Už v roce 1922 ale Carl V. L. Charlier v [94] píše, že kosmologický princip zavedl Einstein, i když jej tak nepojmenoval.

¹¹Většinou se uvádí miliarda světelných let. Ve vesmíru však existují i větší struktury, např. *Sloan Great Wall* je vlákno galaxií dlouhé 1.37 miliard světelných let.

¹²Kdyby měl vesmír tvar povrchu vejce a pozorovatel by se nacházel na jeho špičce, jevil by se mu vesmír izotropní, ale nebyl by izotropní ve všech bodech.

tj. požadujeme rotační symetrii vesmíru.¹³ Teoreticky lze odvodit (viz např. [187], s. 714; [288], s. 29), že izotropie v každém bodě implikuje homogenitu.¹⁴ Předpokládáme-li tedy izotropii vesmíru, můžeme se zabývat stanovením rychlosti jeho rozpínání.

K tomuto účelu si zavedeme další pojmy. *Supernovou* se rozumí hvězda, která vybuchla a jejíž svítivost (luminozita) se mnohamiliardkrát zvýšila v důsledku gravitačního kolapsu a následné explozivní nukleosyntézy. Už v roce 1938 konstatoval Walter Baade (1893–1960), který spolupracoval s Fritzem Zwicky, že supernovy by mohly být slibnými kandidáty pro měření vesmírné expanze. Na možnost měření vzdáleností pomocí supernov (typu Ia) upozorňoval také Charles Thomas Kowal [112] v roce 1968. Supernova totiž může vydávat po několik týdnů tolik světla jako menší galaxie. Světlo z takových objektů k nám letí skrze expandující vesmír, a tak se postupně prodlužuje vlnová délka jednotlivých fotonů (jde o tzv. kosmologický Dopplerův jev). Změřené vlnové délky a svítivost supernov nás tak dobře informují o historii rozpínání vesmíru, čehož podstatně využili i laureáti Nobelovy ceny za rok 2011.

Supernovy se dělí na několik typů. Pokud nemají ve svém spektru čáry vodíku¹⁵, patří do třídy I a dělí se dále na dva typy Ia a Ib podle toho, zda mají či nemají ve svém spektru charakteristické absorpční čáry křemíku o vlnové délce 615 nm. Značná podobnost při porovnávání jednotlivých výbuchů supernov typu Ia ukazuje, že patrně mají stejný spouštěcí mechanismus. Supernovy typu Ia dosahují maxima svítivosti zhruba po 20 dnech. Po mnoho týdnů pak mají v podstatě stejný, pozvolna klesající průběh svítivosti po hlavním maximu světelné křivky. Zejména rychlost poklesu svítivosti se ukázala být rozhodující pro kalibraci a určování vzdáleností, protože maximum jejich absolutního zářivého výkonu kolísá.

Ve všeobecně přijímaném modelu se předpokládá, že mechanismus supernov typu Ia je tento: Jedná se o těsnou dvojhvězdu, jejíž jedna složka je bílý trpaslík (o vysoké hustotě až 10^5 kg/cm^3) a druhá složka červený obr, který postupně zvětšuje svoji velikost. Jakmile se naplní Rocheův lalok, který je definován ekvipotenciálními plochami procházejícími Lagrangeovým bodem L_1 , dochází k přetékání hmoty z červeného obra přes bod L_1 na bílého trpaslíka (podrobnosti viz [101]). Hmota přetéká tak dlouho, až hmotnost bílého trpaslíka dosáhne tzv. *Chandrasekharovy meze nestability* $1.4 M_\odot$, kde $M_\odot = 1.989 \cdot 10^{30} \text{ kg}$ je hmotnost Slunce. Po překročení této meze dojde ke gravitačnímu kolapsu trpaslíka. Nejprve se jeho vnitřní části zhroutí do

¹³O možnosti jakéhosi rotujícího vesmíru, který by byl homogenní a neizotropní, uvažoval Kurt Gödel [73] — např. pokud bychom viděli polovinu oblohy s modrým posuvem a druhou polovinu s červeným posuvem. Toho lze dosáhnout pro libovolnou lichou dimenzi n na sféře S^n (protože ji lze „učesat“).

¹⁴Předpokládat homogenitu izotropního vesmíru je tedy nadbytečné, i když se to běžně dělá. To je podobné, jako kdybychom říkali: nechť je funkce konstantní a spojitá, nechť je matice jednotková a symetrická apod.

¹⁵Supernovy třídy II mají ve svém spektru čáry vodíku a vznikají explozí hvězd nazývaných veleobři, když jsou na konci svého vývoje. Jejich vnitřní vyhořelá část se vlastní gravitací zhroutí ke středu, kde vznikne neutronová hvězda nebo černá díra.

neutronové hvězdy (o nepředstavitelně vysoké hustotě větší než 10^{11} kg/cm³), na niž pak začnou padat vnější části trpaslíka. Uvolněná energie způsobí obrovskou explozi. V maximu svítivosti vykazují supernovy typu Ia spektrální čáry křemíku (Si II) a síry (S II), ale žádné čáry vodíku.¹⁶

Za objev meze stability a další výsledky získal indický astrofyzik Subrahmanyan Chandrasekhar (1910–1995) v roce 1983 Nobelovu cenu za fyziku. Chandrasekharova mez nám tak vlastně ve vesmíru určuje standardní svíčky, u nichž můžeme odhadnout vzdálenost pomocí svítivosti a Pogsonovy rovnice¹⁷ (viz též oddíl 8.2). Jistá potíž ale spočívá v tom, že se od sebe liší dosti svítivosti ve směru osy rotace vybuchujícího trpaslíka a ve směru na ní kolmém.

V typické galaxii se zcela náhodně objeví jen několik supernov za tisíciletí. Proto oba oceněné týmy vždy po několika týdnech srovnávaly snímky určité části oblohy obsahující mnoho tisíců galaxií. Po odečtení obou snímků občas našly nepatrné světlé body — kandidáty na supernovy typu Ia, u nichž bylo nutno analyzovat následné světelné křivky [202]. Každý sledovaný výsek oblohy, v němž Brian Schmidt a jeho kolegové hledali supernovy typu Ia, obsahoval kolem 5 000 galaxií. Tak objevili zejména hodně vzdálené supernovy s červeným posuvem $z \geq 0.2$. Čím je totiž větší z , tím více galaxií je v uvažovaném výseku, protože jejich počet roste přibližně se čtvercem vzdálenosti (pro velká z tomu tak ale není). Pro malá z proto žádné supernovy neobjevili.



10.4. Měření kosmologických parametrů

Rychlost rozpínání vesmíru není konstantní v čase, neboť ji mimo jiné ovlivňuje gravitační působení hmoty, jejíž střední hustota klesá. Proto místo konstanty H_0 ze vztahu (10.2) budeme uvažovat funkci $H = H(t)$, pro niž $H(t_0) = H_0$, kde $t_0 = 13.82$ miliardy let je odhad stáří vesmíru podle současných kosmologických modelů. Pro pevný čas t její hodnota nezávisí na prostorových proměnných v důsledku předpokládané homogenity a izotropie vesmíru. Funkce $H = H(t)$ nazývaná *Hubbleův parametr* se definuje jako poměr

$$H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}, \quad (10.3)$$

¹⁶Supernovy typu Ib mají v maximu svítivosti spektrální čáry helia (He I) a supernovy typu Ic obsahují čáry vápníku (Ca II) a kyslíku (O I).

¹⁷Pogsonova rovnice $\mu_1 - \mu_2 = 2.5 \log_{10}(I_2/I_1)$ udává vztah mezi rozdílem pozorovaných magnitud $\mu_1 - \mu_2$ dvou světelných zdrojů a poměrem hustot I_2/I_1 jejich světelných toků. Je-li poměr $I_2/I_1 = 100$, vidíme, že mezi zdroji je rozdíl 5 magnitud. Pro představu o pozorované hvězdné velikosti dodejme, že např. pro Polárku je $\mu = 2.2$ mag. Pro zdroje o rozdílu jedné magnitudy je poměr $I_2/I_1 = \sqrt[5]{100} = 2.512$.

kde tečka označuje časovou derivaci a $a = a(t)$ je nezáporná a spojitě diferencovatelná *expanzní funkce* (*škálovací parametr*). Pro pevný časový okamžik t označuje hodnota $a(t)$ poloměr vesmíru, pokud má kladnou křivost a modelujeme¹⁸ jej trojrozměrnou sférou $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = a^2(t)$ v \mathbb{E}^4 , viz [167]. Například pro $a(t) = Ct^{2/3}$ s konstantou $C > 0$ vystupující v jednoduchých klasických kosmologických modelech bez temné energie (viz např. [187] a [288]) dostáváme během posledních $t_0 - 380\,000$ let, kdy dominuje látka nad zářením, klesající funkci

$$H(t) = \frac{2}{3t}. \quad (10.4)$$

Pro funkci (10.4) pak stanovíme, že

$$H(t_0) = 1.53 \cdot 10^{-18} \text{ s}^{-1}.$$

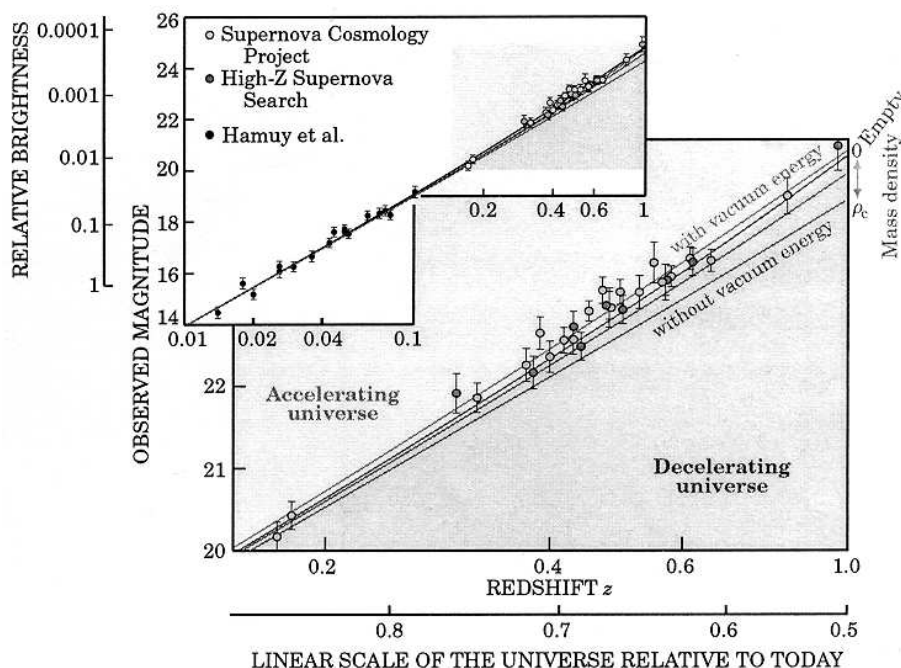
Všimněme si ale, že změřená hodnota v (10.2) je o 52 % větší. Hlavním důvodem je skutečnost, že vztah (10.4) neuvažuje vliv temné energie. Kdybychom znali přesný časový průběh Hubbleova parametru, pak integrací (10.3) dostaneme vztah (srov. modelovou situaci na obr. 8.7)

$$a(t) = a(t') \exp \int_{t'}^t H(\tau) d\tau \quad \text{pro } 0 < t' \leq t,$$

přičemž $a(0) = 0$. Tato počáteční podmínka ale neumožňuje uvažovat např. expanzní funkci tvaru $a(t) = C_1 \exp(C_2 t)$, kde C_1 a C_2 jsou kladné konstanty, která vede na konstantní Hubbleův parametr.

Koncem 20. století se kosmologové domnívali, že expanzní funkce je vždy konkávní, tj. \dot{a} je klesající funkce času, protože rozpínání vesmíru brzdí přitažlivá gravitační síla. Pak ale přišlo velké překvapení. Týmy Supernova Cosmology Project a High- z Supernova Search se koncem devadesátých let zaměřily na supernovy ve velkých vzdálenostech odpovídajících červenému posuvu 0.2 až 1. Nezávisle objevily, že supernovy typu Ia mají až o 15 % menší svítivost (viz [71], [203], [222]), než by měly mít, kdyby se vesmír rozpínal zpomaleně. Pomocí různě obarvených filtrů navíc zjistily, že zeslabení svítivosti prakticky není způsobeno absorpcí v látce. To ale znamená, že se světlo supernov šíří do většího objemu, než kdyby rozpínání vesmíru pouze zpomalovala gravitace. Aby se vysvětlil tento paradox, bylo nutno kromě temné hmoty zavést ještě *temnou energii*, která rozpínání vesmíru naopak urychluje. Tak bylo zjištěno, že derivace $\dot{a} = \dot{a}(t)$ je rostoucí (tj. a je ryze konvexní)

¹⁸Pro zápornou křivost se vesmír popisuje hyperbolickou nadplochou $x^2 + y^2 + z^2 - w^2 = -a^2(t)$ s Minkowského metrikou (viz (18.5)). Pro nulovou křivost hodnota $a(t)$ udává vzdálenost dvou „typických“ galaxií. Parametr $a = a(t)$ vystupuje ve Friedmannově–Lemaîtreově–Robertsonově–Walkerově metrice, která definuje prostoročasovou varietu (viz [40], [199]).



Obr. 10.3. Závislost magnitudy supernov typu Ia na červeném posuvu spektra z ukazující na zrychlené rozpínání vesmíru podle Perlmutterova článku [202]. Pro $z < 0.1$ jsou pro porovnání znázorněny též výsledky Hamuyova týmu naměřené před rokem 1996.

v časovém intervalu posledních cca 5 miliard let, což odpovídá červenému posuvu přibližně $0 \leq z \leq 0.5$.

Na obr. 10.3 vidíme přehled výsledků obou soupeřících týmů vedených Saulem Perlmutterem a Brianem Schmidtem. Na vodorovné ose je červený posuv a na svislé ose je příslušná velikost v magnitudách supernovy, což je jednotka pro měření hvězdné velikosti (svítivosti) nebeských objektů — viz [287], s. 421–426.

Pro hodně vzdálené objekty ($z > 1$) naměřená data naznačují, že existovalo období zpomalování kosmické expanze, tj. období, kdy derivace expanzní funkce \dot{a} byla klesající s rostoucím časem, viz [223], [222] a [225]. Některé studované supernovy byly vzdáleny dokonce více než 10 miliard světelných let, což umožnilo zjistit, že se zpomalující rozpínání vesmíru změnilo ve zrychlené asi po 8 až 9 miliardách let od Velkého třesku.

Oba týmy se zaměřily na stanovení několika dalších důležitých kosmologických parametrů. Stávající hodnotu Hubbleova parametru určily blízkou (10.2). Odtud vychází *Hubbleovo stáří vesmíru*

$$T_0 = \frac{1}{H_0} \approx 13.6 \text{ miliardy let,}$$

což je jen hrubý odhad jeho skutečného stáří t_0 .

Počátkem dvacátých let minulého století Alexander A. Friedmann (1888–1925) odvodil ze soustavy deseti Einsteinových rovnic¹⁹ pro dokonale symetrický vesmír, který je pro každý pevný časový okamžik homogenní a izotropní, nelineární diferenciální rovnici (viz [66], [67]) pro rychlost rozpínání vesmíru (angl. expansion rate)

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G\rho}{3} + \frac{\Lambda c^2}{3} - \frac{kc^2}{a^2}, \quad (10.5)$$

kde G označuje gravitační konstantu, c rychlost světla ve vakuu, $\rho = \rho(t)$ střední hustotu látky ve vesmíru, k/a^2 prostorovou křivost (viz kapitola 18),

$$k \in \{-1, 0, 1\}$$

index křivosti (normalizovanou křivost) a Λ kosmologickou konstantu²⁰, která vystupuje v Einsteinových rovnicích obecné teorie relativity u absolutního členu (viz např. [40], [187], [199]). Předposlední člen v rovnici (10.5) obsahující Λ hraje pro $t \rightarrow \infty$ dominantní roli, protože hustota $\rho(t)$ je úměrná $a^{-3}(t)$. Vydělíme-li rovnici (10.5) čtvercem $H^2 \neq 0$, pak pomocí (10.3) dostaneme pro všechna t rovnici pro tři bezrozměrné parametry

$$1 = \Omega_M(t) + \Omega_\Lambda(t) + \Omega_K(t). \quad (10.6)$$

Zde Ω_M je *parametr hustoty temné a baryonové hmoty*²¹, Ω_Λ je *parametr hustoty temné energie* (viz [91], [199]), Ω_K je *parametr hustoty prostorové křivosti* a

$$\Omega_M(t) = \frac{8\pi G\rho(t)}{3H^2(t)}, \quad \Omega_\Lambda(t) = \frac{\Lambda c^2}{3H^2(t)}, \quad \Omega_K(t) = -\frac{kc^2}{H^2(t)a^2(t)}. \quad (10.7)$$

Rovnice (10.6) tak udává vztah mezi parametry hustoty hmoty, hustoty energie a hustoty křivosti vesmíru. Pro plochý vesmír s $k = 0$ tedy platí $\Omega_M + \Omega_\Lambda = 1$. Tuto rovnost však nelze dokázat pomocí měření, která vždy vykazují nějakou nejistotu.

Důležitým cílem tedy bylo určit současné hodnoty parametrů Ω_M a Ω_Λ (Ω_K se pak dopočte z (10.6)). V článcích [204], [222] a [203] z let 1997–1999 se uvádí, že

¹⁹Einsteinovy rovnice obecné teorie relativity se opírají o tenzorový počet, který si v Praze Einstein osvojil během diskuzí s Georgem Pickem v letech 1911–1912.

²⁰A. Einstein předpokládal, že vesmír je stacionární, a zpočátku nevěřil na jeho rozpínání. Aby zabránil gravitačnímu kolapsu vesmíru, zavedl roku 1917 do svých rovnic obecné teorie relativity kosmologickou konstantu [59]. Její repulzivní charakter mu umožňoval nadále uvažovat neexpandující stacionární vesmír i pro $k \leq 0$. V r. 1917 však Willem de Sitter (1872–1934) našel velice speciální řešení Einsteinových rovnic [253], které popisuje rozpínání izotropního vesmíru s nulovou hustotou a $\Lambda > 0$. Když pak v r. 1929 Hubble publikoval článek [92] o rozpínání vesmíru, Einstein se kosmologické konstanty zřekl a prohlásil, že to byl největší omyl v jeho vědecké kariéře [63].

²¹Baryonová hmota je tvořena převážně protony a neutrony. Astronomové k ní však započítávají i další známé elementární částice, např. elektrony či neutrina.

parametr hustoty temné energie Ω_Λ je kladný s pravděpodobností vyšší než 99 % a parametr hustoty hmoty $\Omega_M \approx 0.2$. V dnešní době je známo už přes tisíc supernov typu Ia s červeným posuvem $z > 0.1$. A tak se hodnoty parametrů Ω_M a Ω_Λ neustále zpřesňují. Příslušný $\Omega_M - \Omega_\Lambda$ diagram byl uveřejněn v [248], s. 16. Například podle článku Riese a jeho spolupracovníků [225] jsou současné hodnoty přibližně $\Omega_M = 0.3$ a $\Omega_\Lambda = 0.71$. Podle (10.6) a (10.7) by tedy platilo²²

$$\Omega_K(t_0) = -0.01 = -\frac{kc^2}{H^2(t_0)a^2(t_0)},$$

což odpovídá kladnému indexu křivosti $k = 1$, tj. trojrozměrné nadsféře vložené do čtyřrozměrného eukleidovského prostoru. Odtud a podle (10.2) vychází nepředstavitelně velký poloměr současného vesmíru²³

$$a(t_0) = \frac{10c}{H_0} \approx 1.3 \cdot 10^{27} \text{ m} \approx 140 \text{ Gly}, \quad (10.8)$$

kde ly označuje světelný rok (z angl. light year), a proto se nám jeví vesmír skoro plochý. Zdůrazněme ale, že vztah $\Omega_M + \Omega_\Lambda \approx 1$ neimplikuje rovnost $\Omega_K = 0$.

Obraťme nyní pozornost na samotnou kosmologickou konstantu Λ . Významným úkolem týmů vedených Perlmutterem a Schmidtem bylo stanovit její skutečnou hodnotu. Nebylo totiž známo, zda je její hodnota kladná, nulová či záporná.²⁴ Perlmutter se svým kolektivem odvodil z prvních 42 pozorovaných supernov kladnou hodnotu Λ s pravděpodobností 99.8 % (viz [204], s. 580). V současnosti se v literatuře uvádí celá řada horních i dolních odhadů, které se většinou pohybují kolem hodnoty 10^{-52} m^{-2} (viz např. [105], [116]). Podle (10.7), (10.2) a naměřených hodnot vskutku máme

$$\Lambda \approx 0.71 \frac{3H_0^2}{c^2} = 1.22 \cdot 10^{-52} \text{ m}^{-2}.$$

Z (10.5) je patrné, že pro $\Lambda > 0$ a $a \rightarrow \infty$ je \dot{a} rostoucí od jistého časového okamžiku t_0 počínaje, tj. funkce $a = a(t)$ je konvexní pro $t \geq t_0$.

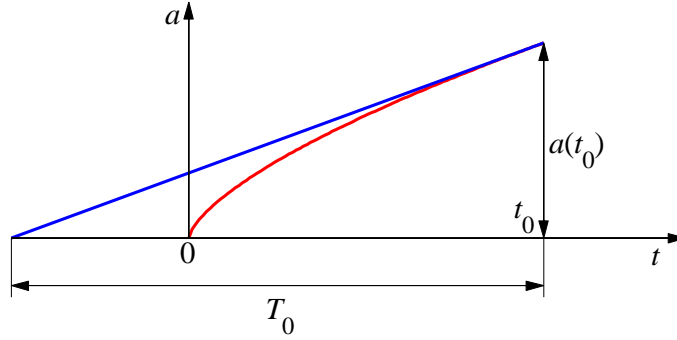
Dále byla stanovena hodnota bezrozměrného *deceleračního parametru* (parametru zpomalení)

$$q := -\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2} = -\frac{\ddot{a}}{\dot{a}}H^{-2} = -\dot{H}H^{-2} - 1, \quad (10.9)$$

²²V článku [243] byly pomocí fluktuací reliktního záření získány hodnoty parametrů $\Omega_K = -0.014$ a $\Omega_\Lambda = 0.716$ (srov. [180], s. 96). Také standardní Λ CDM model (angl. Lambda–Cold Dark Matter) uvažuje podobné hodnoty. Kosmologické parametry, které naměřila družice Planck [211], uvádíme v (19.11).

²³Všechny zde uváděné hodnoty je třeba brát „se značnou rezervou“, protože se jedná jen o přibližné modely zatížené celou řadou nejrůznějších chyb.

²⁴Z rovnice (10.5) pro Einsteinův stacionární vesmír s $\dot{a} = 0$ dostáváme horní odhad $\Lambda \leq 3k/a^2$.



Obr. 10.4. Kdyby byla expanzní funkce konkávní, pak by její graf ležel pod tečnou procházející bodem $(t_0, a(t_0))$. Pro $\dot{a}(t_0) > 0$ by tedy podle (10.12) věk vesmíru t_0 nepřevyšoval Hubbleovo stáří vesmíru $T_0 = 1/H_0 = 13.6$ miliardy let, což ale není v souladu s naměřenými daty.

kde druhá rovnost plyne z (10.3). Odtud vidíme, že současná hodnota deceleračního parametru $q_0 = q(t_0)$ je vlastně jen další koeficient v Taylorově rozvoji [220], s. 623,

$$\begin{aligned} a(t) &= a(t_0) + \dot{a}(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2}\ddot{a}(t_0)(t - t_0)^2 + \dots \\ &= a(t_0)(1 + H_0(t - t_0) - \frac{1}{2}q_0H_0^2(t - t_0)^2 + \dots). \end{aligned} \quad (10.10)$$

Proto bylo nutno získat spektra supernov typu Ia, jež jsou velice vzdáleny ($z \approx 1.7$), viz [63]. V práci [225], s. 110, byla nalezena záporná hodnota parametru (srov. obr. 8.7)

$$q_0 \approx -0.6, \quad (10.11)$$

tj. a je ryze konvexní v okolí t_0 .

Zápornou hodnotu $q_0 < -1$ ovšem předpovídala Novozélandka Beatrice Tinsleyová (1941–1981) již koncem sedmdesátých let minulého století.²⁵ Pokud by totiž byla expanzní funkce $a = a(t)$ ve svém definičním oboru všude konkávní (viz obr. 10.4) a $\dot{a}(t_0) > 0$, pak podle (10.3) a (10.2) pro věk vesmíru t_0 platí

$$t_0 \leq T_0 = \frac{a(t_0)}{\dot{a}(t_0)} = H_0^{-1} \approx 4.29 \cdot 10^{17} \text{ s} \approx 13.6 \text{ miliardy let}. \quad (10.12)$$

To ale odporovalo pozorováním, protože některé hvězdy se považovaly za starší. Tak v roce 1978 B. Tinsleyová zjistila [273], že expanzní funkce musí být v nějakém intervalu ryze konvexní, což odpovídá zrychlujícímu se rozpínání vesmíru (viz též [80]).

Poznamenejme ještě, že když $q \geq -1$ a a je ryze konvexní (tj. \dot{a} je rostoucí) na nějakém podintervalu, pak zde $H = H(t)$ není rostoucí podle (10.9). Na druhé

²⁵Tinsleyová však nezkovala supernovy. Její domněnka se opírala o pozorování, že nejvyšší koncentrace kvasarů (angl. quasi stellar objects) je pro $z \approx 2$.

straně pro $q < -1$ již plyne, že $\dot{H} > 0$, tj. $H = H(t)$ je rostoucí funkce na příslušném podintervalu. Pokud bychom například lineárně extrapolovali decelerační parametr $q = q(t)$ z obr. 8.7 na 5 miliard let do budoucnosti, potom by jeho hodnota byla menší než -1 . Nesmíme ale zapomínat, že jde jen o model.²⁶



10.5. Souhrn

Velké objevy obvykle nevznikají z ničeho, ale opírají se o výsledky mnoha dalších badatelů. Nesmírnou zásluhu o použití výsledků neeukleidovské geometrie na náš vesmír má nesporně K. Schwarzschild. Již v r. 1900 si uvědomil, že vesmír by mohl mít konečný objem [249]. Na červený posuv většiny extragalaktických mlhovin poukázal V. M. Slipher (viz [256], [262]) mnohem dříve než E. P. Hubble.

A. Friedmann našel model rozpínajícího se vesmíru, nikoliv rozpínání skutečného vesmíru. To, že vesmír mohl mít kdysi „nulový poloměr“ předpokládal Friedmann [66] již v r. 1922, tj. o pět let dříve než k podobnému závěru došel G. Lemaître na základě astronomických pozorování [167]. Jasně argumenty pro zrychlující se rozpínání vesmíru poprvé předložila B. Tinsleyová koncem sedmdesátých let minulého století. I když její článek [273] vyšel v *Nature*, v pracích laureátů Nobelovy ceny [202]–[204], [222]–[225] není citována.

V současnosti probíhá velká diskuze o tom, co je záhadným zdrojem temné energie, která svými antigravitačními účinky způsobuje zrychlující se rozpínání vesmíru, viz [3], [71]. Uvažuje se, že by základní fyzikální konstanty mohly záviset na čase. Kdyby např. hodnota gravitační konstanty vhodně klesala, dostali bychom pozorované zrychlené rozpínání vesmíru [252], jež se také občas vysvětluje energií vakua. Uvažuje se i o existenci dynamického skalárního pole (kvintesence — hypotetické páté základní síly), které způsobuje zrychlenou expanzi vesmíru, viz [180], str. 99. Pomocí kladné gravitační aberace způsobující antigravitační síly se v kapitole 17 pokusíme vysvětlit, odkud může pocházet alespoň část temné energie způsobující zrychlené rozpínání vesmíru.



²⁶Obr. 8.7 odpovídá hodnotám $H_0 = 67.15 \text{ km}/(\text{s Mpc})$, $\Omega_\Lambda = 0.683$ a $\Omega_M = 0.317$, srov. (19.11).

11. Vzdalování Marsu od Slunce

Každý nový objev prochází třemi stadii:

*v prvním je směšný,
v druhém je potírán,
v třetím je samozřejmý.*

ARTHUR SCHOPENHAUER

V kapitole 10 jsme se zabývali globálním rozpínáním vesmíru. V následujících kapitolách 11–15 podáme celou řadu argumentů ukazujících, že se Sluneční soustava rozpíná rychlostí srovnatelnou s expanzí vesmíru, které je dáno Hubbleovou konstantou. To je samozřejmě v rozporu se zákonem zachování energie z klasické mechaniky. Hlavním cílem druhé části této knížky bude ukázat, proč tento fundamentální fyzikální zákon v reálném světě neplatí zcela přesně, ale jen přibližně. Uvidíme, že se energie ve vesmíru pozvolna samovolně generuje v důsledku antigravitace. Příčinou může být málo známý a opomíjený jev gravitační aberace (viz kapitola 17).

11.1. Antigravitace a zákon zachování energie

O „platnosti“ fyzikálních zákonů se přesvědčujeme pomocí měření. Absolutně přesné měřicí přístroje však zkonstruovat nelze. Tedy ani v principu nemůžeme ověřit, že obecně přijímané zákony, jako např. zákon zachování energie či zákon zachování momentu hybnosti, platí na libovolný počet desetinných míst. Zákon zachování energie patří mezi základní pilíře, na nichž stojí současná fyzika. Newtonova teorie gravitace je zformulována tak, aby zákon zachování energie platil naprosto přesně. Jak je to ale v reálném světě, který Newtonova teorie či teorie relativity jen modelují? K zodpovězení této otázky použijeme široký interdisciplinární přístup. Uvedeme více než 10 konkrétních příkladů, které ilustrují, že nepatrně narůstá celková mechanická energie soustavy skutečných těles, která na sebe vzájemně gravitačně působí.

Nejprve předložíme řadu astrobiologických, astronomických, geometrických, geofyzikálních, geochronometrických, heliofyzikálních, klimatologických, paleontologických a observačních argumentů, které ukazují, že se Sluneční soustava pozvolna rozpíná rychlostí cca $5 \text{ m yr}^{-1} \text{ au}^{-1}$ a že tak významné rozpínání nelze vysvětlit ani úbytkem sluneční hmoty, ani slunečním větrem, ani slapovými silami. To je samozřejmě v rozporu s Keplerovými zákony, a tudíž i se zákonem zachování energie, uvažíme-li, že Sluneční soustava je dostatečně izolována od gravitačního vlivu sousedních hvězd. Například Slunci nejbližší hvězda Proxima Centauri působí podle (4.1) na Zemi cca milionkrát menší gravitační silou než Venuše.

Někteří autoři tvrdí (viz např. [39], [45]), že se temná energie ve Sluneční soustavě nikterak neprojevuje. V oddílu 13.7 ukážeme, kde se dopouštějí chybné úvahy. Uvedeme též další argumenty ukazující, že kromě Sluneční soustavy se pozvolna rozpínají i samotné galaxie (viz kapitola 16). Pokusíme se také vysvětlit, odkud by se na to i na zrychlenou expanzi celého vesmíru mohla alespoň částečně brát energie. V kapitole 17 vyslovujeme domněnku, že jednou z možných příčin je tzv. *gravitační aberace*, která je důsledkem kauzality a konečné rychlosti šíření gravitační interakce (viz též [130], [132] a [137]).

Zdánlivou sílu, která způsobuje pozvolné rozpínání Sluneční soustavy i dalších gravitačně vázaných systémů, nazveme *antigravitace*. Uvidíme, že na malých i velkých časových i prostorových škálách lze pozorovat její projevy, pokud ovšem nejsou rušeny jinými jevy (rezonancemi, slapy, silnými elektromagnetickými poli apod.). Antigravitace není žádná nová pátá síla, ale jen vedlejší projev síly gravitační způsobený konečnou rychlostí šíření gravitační interakce. Podobně vedlejším projevem silné interakce mezi kvarky je, že drží pohromadě atomové jádro.



11.2. Rychlost rozpínání Sluneční soustavy

Koncem minulého století astronomové zjistili, že vesmír by měl být vyplněn jakousi temnou energií, která je rozprostřena poměrně rovnoměrně a svými antigravitačními účinky způsobuje jeho zrychlující se rozpínání (viz kapitola 10). Rychlost této expanze je dána Hubbleovým parametrem, jehož velikost podstatně závisí na množství temné energie.

Přepočtíme nyní současnou hodnotu Hubbleova parametru H_0 na střední vzdálenost Slunce–Země, tj. jedné astronomické jednotky¹

$$1 \text{ au} = 149\,597\,870\,700 \text{ m} \approx 150 \cdot 10^9 \text{ m.} \quad (11.1)$$

¹Tato definice astronomické jednotky byla přijata na 28. valném shromáždění Mezinárodní astronomické unie v srpnu 2012. Původně udávaná hodnota $1 \text{ AU} = 149\,597\,870\,691 \text{ m}$ byla navýšena o 9 metrů.

Uvážíme-li, že $1 \text{ pc} \approx 206\,265 \text{ au}$ a že jeden siderický rok má $31\,558\,149.54$ sekundy, dostaneme

$$H_0 \approx 70 \text{ km s}^{-1} \text{Mpc}^{-1} = 70 \text{ m s}^{-1} \text{kpc}^{-1} = \frac{70 \cdot 31\,558\,149.54}{206\,265\,000} \text{ m yr}^{-1} \text{au}^{-1}.$$

Tedy

$$H_0 \approx 10 \text{ m yr}^{-1} \text{au}^{-1}. \quad (11.2)$$

Odtud dále vidíme, že 1 m^3 prostoru se zvětší v průměru o 0.2 mm^3 za rok, protože

$$\left(1 + \frac{10}{150 \cdot 10^9}\right)^3 \approx 1 + 3 \frac{10}{150 \cdot 10^9} = 1 + 0.2 \cdot 10^{-9}. \quad (11.3)$$

Hodnoty udávané v (11.2) a (11.3) jsou poměrně velké, a proto by se vliv temné energie měl projevit i ve Sluneční soustavě. Z našeho pohledu neexistuje žádný důvod, proč by se projevy temné energie měly nějakým způsobem vyhýbat naší Galaxii či Sluneční soustavě.

Připustíme-li působení temné energie ve Sluneční soustavě, pak snadno vysvětlíme celou řadu záhad, jako např. paradox mladého horkého Slunce [164], zformování Kuiperova pásu komet a Neptunu [15], existenci řek na Marsu i existenci jeho měsíce Phobosu, paradox slapových sil Měsíce [279], paradox velkého orbitálního momentu Měsíce či Tritonu, migraci planet, pomalou rotaci Merkuru a neexistenci jeho měsíců.

V následujících kapitolách ukážeme, že se Sluneční soustava rozpíná rychlostí řádově srovnatelnou s Hubbleovou konstantou (11.2), i když obvykle o trochu menší. Například pro Zemi to lze zapsat takto (viz kapitola 13)

$$H_0^{(\text{loc})} \approx 0.5 H_0 \approx \frac{\dot{R}}{R}, \quad (11.4)$$

kde $R = R(t)$ je střední vzdálenost Země od Slunce v čase t a tečka označuje časovou derivaci.



11.3. Řeky na Marsu

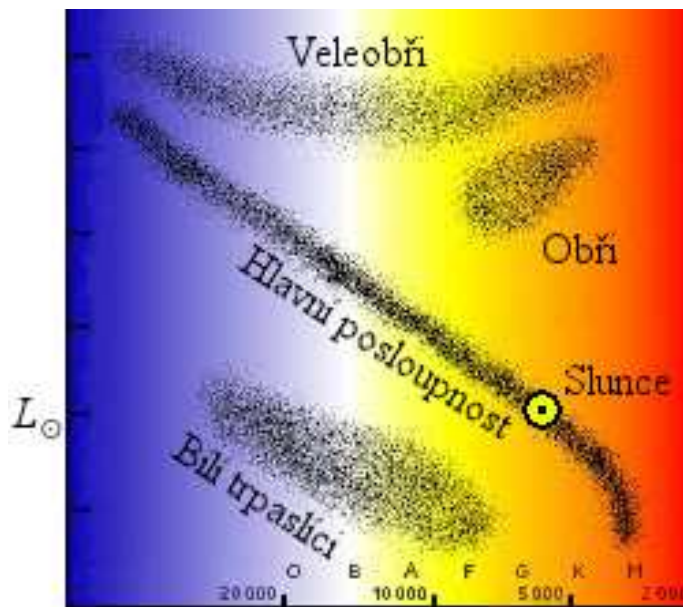
Množství sluneční energie dopadající za 1 s na plochu 1 m^2 kolmo k paprskům ve vzdálenosti 1 au je rovno *sluneční konstantě*

$$L_0 = 1.36 \text{ kWm}^{-2}. \quad (11.5)$$

Hodnota této „konstanty“ v současnosti kolísá o méně než 0.1% zejména v závislosti na počtu a velikosti slunečních skvrn. Celkový sluneční výkon je tak

$$L_{\odot} = 4\pi R^2 L_0 = 3.846 \cdot 10^{26} \text{ W},$$

kde $R = 1 \text{ au}$.



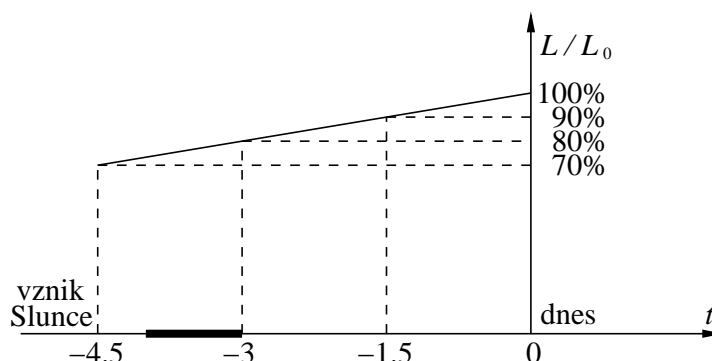
Obr. 11.1. Hertzsprungův–Russellův diagram udává vztah mezi teplotou a zářivým výkonem hvězdy. Slunce se nachází na jeho hlavní posloupnosti a pozvolna stoupá vzhůru. Obě osy mají logaritmická měřítka. Na vodorovné ose roste teplota v kelvinech nestandardně zprava doleva. Na svislé ose je uveden relativní výkon hvězdy vzhledem k L_{\odot} a jeden dílek odpovídá stonásobku výkonu.

Protože Slunce je hvězdou hlavní posloupnosti známého Hertzsprungova–Russellova diagramu, jeho poloha v něm pomalu stoupá doleva (viz obr. 11.1). Přitom Slunce urazí na hlavní posloupnosti jen velice krátký úsek. Podle [238], s. 461, mělo Slunce před 4.5 miliardami let povrchovou teplotu 5586 K a jeho zářivý výkon (luminozita) byl jen 70 % dnešní hodnoty (viz též [162]; [70], s. 48). Pak jeho výkon narůstal přibližně lineárně až do současnosti (viz obr. 11.2). Současná (efektivní) teplota je 5770 K a za 3 miliardy let stoupne podle [238], s. 461, na 5843 K. To již Slunce bude mít výkon 133 % dnešní hodnoty.² Vidíme, že teplota roste poměrně pomalu, zatímco výkon narůstá mnohem rychleji (srov. (11.8)).

Z počtu kráterů ve vyschlých řečištích na Marsu (viz obr. 11.3) planetologové odhadují, že na něm tekla voda před 3–4 miliardami let (viz [84] a tučně vyznačený interval na časové ose obr. 11.2). V té době byl výkon Slunce přibližně 75 % dnešní hodnoty. Tok energie ze Slunce klesá se čtvercem vzdálenosti. Proto podle (11.1) odpovídající sluneční konstanta pro Mars byla jen

$$L_{\text{Mars}} = 0.75 L_0 \left(\frac{150}{225} \right)^2 = \frac{L_0}{3} \quad (11.6)$$

²Přibližně za 12 miliard let od svého vzniku bude Slunce červeným obrem. Odhaduje se, že jeho poloměr vzroste cca 165krát, tj. na 0.77 au, a jeho výkon bude obrovský (podrobnosti viz [238]).



Obr. 11.2. Relativní luminozita L/L_0 Slunce od vzniku Sluneční soustavy až po dnešek. Čas t je uveden v miliardách let.

za předpokladu, že Mars byl v průměru vzdálen od Slunce

$$r = 225 \cdot 10^9 \text{ m}, \quad (11.7)$$

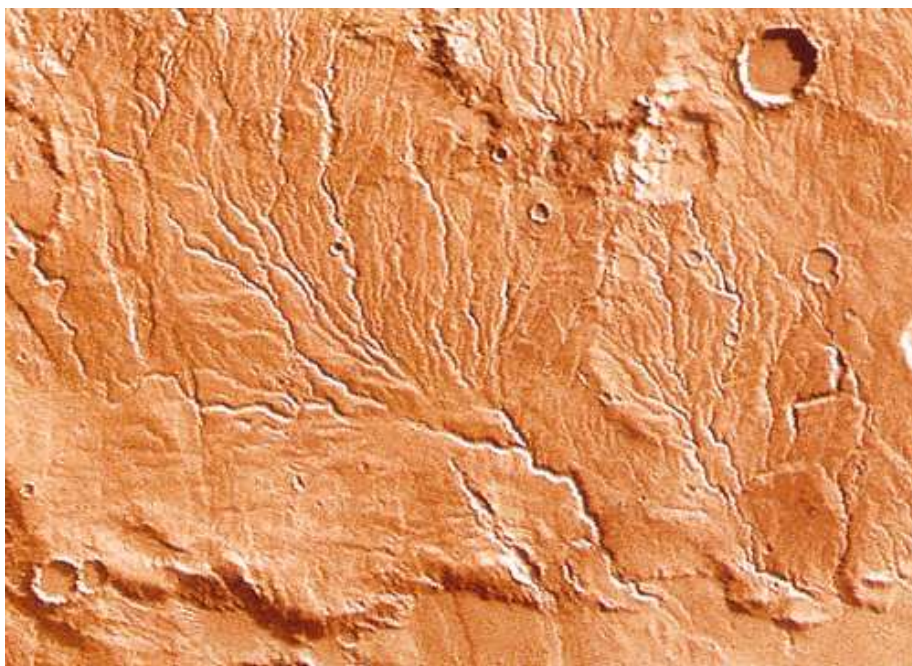
jako je nyní. Třikrát menší hodnota L_{Mars} , než je stávající sluneční konstanta L_0 , však jen těžko může vysvětlit existenci stovek vyschlých řečišť a jezer, která se na Marsu nalézají zejména mezi jeho $-50.$ a $50.$ rovnoběžkou.

Představme si na okamžik, že bychom na Zemi měli trvale dvoutřetinové zatmění Slunce. To by se její povrch asi moc neprohrál. Dlouhodobý pokles slunečního svitu o pouhých 2 % způsoboval v minulosti na Zemi doby ledové, i když zde byl skleníkový efekt. Enormní pokles slunečního svitu o 66.6 % (viz (11.6)) existenci řek na Marsu vylučuje, pokud by Mars byl stále na stejné dráze (11.7). Jeho povrch by byl totálně zmrzlý. Vyšší koncentrace CO_2 (viz [15], s. 177) jistě přispívala k vyšší teplotě, ale jen těžko mohla dlouhodobě udržet vodu v kapalném skupenství.

Podle [205] byl ale na severní polokouli Marsu dokonce obrovský tekutý oceán, který patrně zamrzal a pokrýval asi jednu třetinu povrchu. Důkazem tohoto tvrzení je skutečnost, že v rozsáhlém okolí severního pólu nejsou téměř žádné krátery. Při dopadu asteroidů jistě velké množství vody unikalo do kosmického prostoru v důsledku nízké gravitace. Na druhé straně v okolí jižního pólu krátery jsou.

Severovýchodně od čtyř mohutných štítových marsovských sopek se nachází řečiště gigantických rozměrů široké až 100 km. Vzniklo bleskurychlým roztáním ledovců během sopečných erupcí. Stovky dalších řečišť mají však rozměry srovnatelné s pozemskými (viz obr. 11.3). Voda zde tekla v době, kdy se na Zemi začal rozvíjet život. Koryta menších řek a potoků byla zahlazena erozí.

Automatické sondy nám poslaly i jiné důkazy o existenci vody v kapalném skupenství na Marsu (viz např. obr. 11.4). Objevily mj. velké množství limonitu (tzv. hnědel, vodnatý oxid železitý), který potřebuje ke svému vzniku tekutou vodu. Metanové řeky, které existují na Titanu, tak na Marsu pravděpodobně nebyly.



Obr. 11.3. Před 3–4 miliardami let tekly na Marsu řeky, dno bývalého moře je u dolního okraje vpravo, střed oblasti $175 \times 125 \text{ km}^2$ se nalézá na 42.3° jižní marsové šířky a 92.7° západní délky. Struktura řečišť naznačuje, že tudy neproudila láva, ale voda (foto NASA).

Na Marsu je nyní doba ledová. Současná průměrná teplota -60°C je hluboko pod bodem mrazu, jak zjistily sondy Viking³, Pathfinder, Spirit, Opportunity aj. V poledne se sice může teplota vyšplhat na hodně tmavých horninách v rovníkových oblastech nad 20°C , je-li bezvětrí a Mars v přísluní.⁴ Pro existenci řek je ale nutné, aby průměrná celodenní teplota (tj. včetně noci) dlouhodobě příliš neklesla pod bod mrazu.

Existují desítky klimatologických modelů původní marsové atmosféry, jež se snaží vysvětlit existenci vody v kapalném skupenství na Marsu v dávné minulosti. Je-li teplota⁵ vody 273.16 K a tlak 611.7 Pa, pak voda může existovat současně v plynném, kapalném i pevném skupenství. Je to tzv. *trojný bod*. Automatické sondy naměřily na povrchu Marsu tlak v rozmezí 690–900 Pa, což je hodnota srovnatelná s 611.7 Pa. Kapalná voda zde tedy může existovat, jen když se teplota nepatrně liší od bodu mrazu. V současnosti je proto většina vody zmrzlá (viz obr. 11.5) a jen malé množství je ve formě páry.

Na Marsu musel kdysi být vyšší atmosférický tlak i teplota, jinak bychom na

³Například sonda Viking 2 naměřila celodenní teplotu v rozmezí -100°C až -24°C .

⁴V současné době má dráha Marsu poměrně velkou excentricitu téměř rovnou 0.1.

⁵Bodu mrazu 0°C odpovídá jen o trochu nižší teplota 273.15 K.



Obr. 11.4. Písek s oblázky — další důkaz toho, že na Marsu tekly řeky, který poskytla sonda Curiosity. Plánovaně přistála v kráteru Gale, o kterém se předpokládá, že v něm kdysi proudila voda (foto NASA).

něm nemohli pozorovat stopy po tekoucí vodě. Podle [84] však Mars neměl hustší atmosféru, než jakou máme nyní na Zemi, protože jeho gravitační pole je příliš slabé ve srovnání s ostatními planetami (kromě Merkuru, který atmosféru nemá).

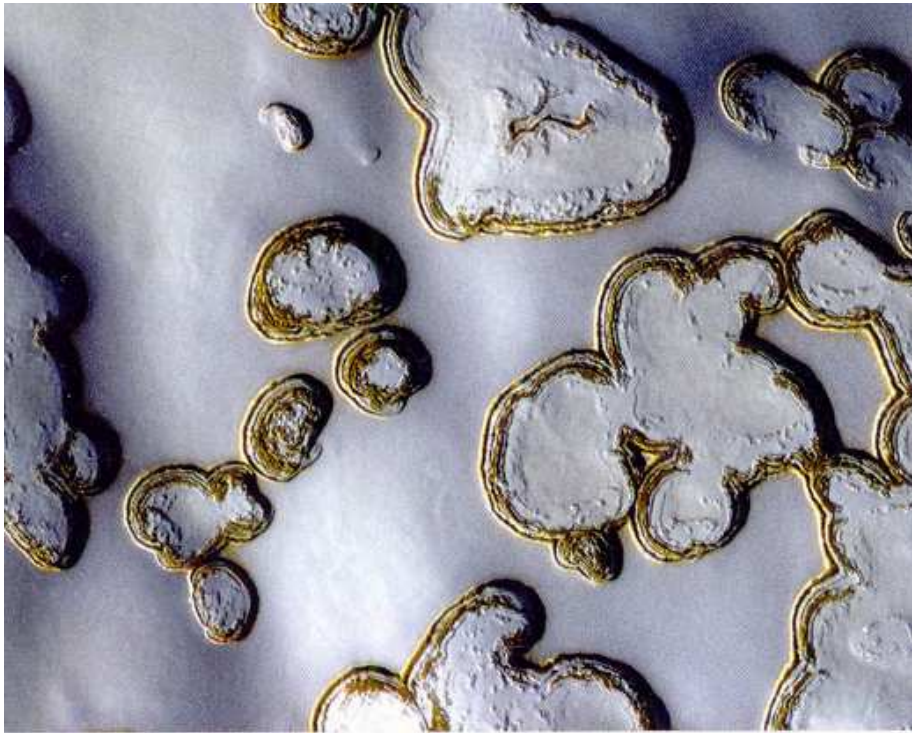


11.4. Mars z pohledu Stefanova–Boltzmannova zákona

Podívejme se nyní podrobněji na teplotní situaci na Marsu z hlediska Stefanova–Boltzmannova zákona. Předpokládejme na okamžik, že Slunce i Mars jsou absolutně černá tělesa. V tomto případě se absorbovaná sluneční energie rovná energii emitované. Pokud by Mars absorboval celkový zářivý tok Slunce, pak by jeho teplota byla dána vztahem

$$4P \cdot \sigma T^4 = L_{\odot} \frac{P}{4\pi r^2}, \quad (11.8)$$

kde $\sigma = 5.669 \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$ je Stefanova–Boltzmannova konstanta, r je vzdálenost Marsu od Slunce (11.7), P je maximální průřez Marsu a $4P$ je jeho povrch, T je rovnovážná teplota ve vzdálenosti Marsu pro celkový sluneční výkon $L_{\odot} = 3.846 \cdot 10^{26} \text{ W}$ a albedo (odrazivost) $A = 0$.



Obr. 11.5. Směs vodního ledu H_2O a suchého ledu CO_2 na Marsu (foto NASA)

Mars však není černé těleso a současná hodnota jeho Bondova albeda je

$$A = 0.25.$$

Rovnovážná teplota na jeho povrchu je tak dána vztahem [30]

$$T_{\text{Mars}} \approx \sqrt[4]{\frac{(1-A)L_{\odot}}{16\sigma\pi r^2}} = 211 \text{ K} \approx -62^\circ\text{C}. \quad (11.9)$$

Vidíme, že teoretická teplota uvedená v (11.9) dobře odpovídá současné průměrné celoroční teplotě $\approx -60^\circ\text{C}$ naměřené na několika stanovištích.

Když ovšem byla luminozita Slunce jen 75 % dnešní hodnoty (viz obr. 11.2), dostaneme ze vztahu (11.9) rovnovážnou teplotu pouze

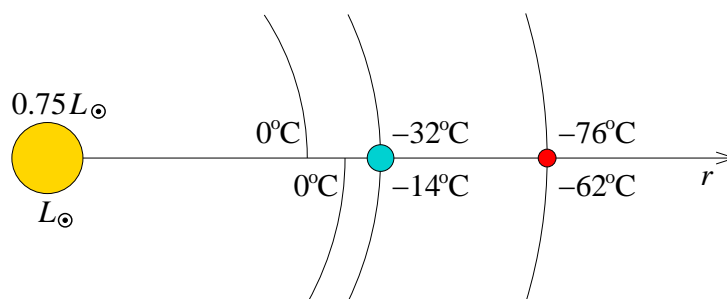
$$T_{\text{Mars}} = 197 \text{ K} \approx -76^\circ\text{C}.$$

Pro tak nízkou hodnotu skleníkový efekt jen těžko zaručí, aby se průměrná celodenní teplota přiblížila alespoň k bodu mrazu 273.15 K ($= 0^\circ\text{C}$), i když měl Mars v minulosti podstatně hustší atmosféru, o kterou časem přišel v důsledku nízké gravitace a působením slunečního větru.⁶ Například pro Zemi, kde je současná průměrná

⁶Mars má velice slabé magnetické pole, které nepůsobí jako překážka pro sluneční vítr jako v případě Země.

teplota kolem 15°C , způsobuje skleníkový efekt přibližně jen 29 stupňů (srov. teplotu u Země na obr. 11.6). Navíc Mars musel mít kdysi vyšší albedo než $A = 0.25$, protože v jeho atmosféře byla přítomna oblaka, ze kterých pršelo či sněžilo, aby mohly vzniknout stovky rozsáhlých říčních systémů (obr. 11.3). Mars v dávné minulosti tedy nemusel být úplně rudou planetou. Mars měl také na svém povrchu mnohem více sněhu a ledu, a to nejen v oblasti polárních čepiček, jako je tomu nyní. To rovněž zvyšuje albedo a zároveň snižuje teplotu v (11.9).

Na druhé straně, Mars měl kdysi teplejší nitro, které ohřívalo jeho povrch. Byly zde i činné sopky a měl vyšší radioaktivitu, což průměrnou povrchovou teplotu Marsu zase zvyšovalo.



Obr. 11.6. Rovnovážná teplota podle Stefanova–Boltzmannova zákona (11.9) pro albedo $A = 0.25$. Teploty v horní, resp. dolní části obrázku odpovídají někdejší luminozitě $0.75L_\odot$, resp. dnešní luminozitě L_\odot . Poloměry jednotlivých kružnic jsou po řadě 117, 134, 150 a 225 milionů km. Slunce je žluté, Země modrá a Mars červený.

Pro luminozitu $0.75L_\odot$ plyne ze vztahu (11.9), že rovnovážná teplota 273.15 K ($= 0^\circ\text{C}$ bod mrazu) odpovídá vzdálenosti $r = 117$ milionů km (viz obr. 11.6), což je o 108 milionů km méně, než je současná průměrná vzdálenost Marsu od Slunce (11.7). Spolu se všemi výše uvedenými argumenty vidíme, že Mars musel být kdysi o desítky milionů km blíže ke Slunci, než je nyní, aby na něm mohly téci řeky (srov. obr. 11.7) po dobu jedné miliardy let. To ale odpovídá dlouhodobé průměrné rychlosti vzdalování Marsu od Slunce řádově 10 metrů ročně, což je hodnota srovnatelná s Hubbleovou expanzí (11.2).

Ukažme si nyní podrobněji, jak lze k takovému odhadu dospět. Kdyby byl Mars při svém vzniku vzdálen od Slunce kupříkladu 180 milionů km, pak by jeho průměrná rychlost vzdalování byla právě 10 m za rok, aby za 4.5 miliardy let své existence dosáhl dnešní vzdálenosti $r = 225$ milionů km. To by podle (11.1) odpovídalo současné lokální expanzi, která je řádově srovnatelná s Hubbleovou konstantou (11.2) přeškálovanou na vzdálenost r

$$H_0^{(\text{loc})} = \frac{150}{225} H_0 \approx 0.67 H_0. \quad (11.10)$$

V tomto modelovém případě by tedy byla příslušná hodnota sluneční konstanty pro Mars rovna (srov. (11.6))

$$L_{\text{Mars}} = 0.75L_0 \left(\frac{150}{180}\right)^2 = 0.52L_0.$$

Pro celkový sluneční výkon $0.75L_\odot$, resp. L_\odot bychom podle (11.9) na obrázku 11.6 dostali hodnoty -53°C , resp. -37°C pro $r = 180$ milionů km. Vztah (11.10) samozřejmě představuje jen jakýsi přibližný odhad. Uvádíme jej pouze pro ilustraci možné rychlosti vzdalování Marsu od Slunce, aby mohla být vysvětlena tekoucí voda na povrchu Marsu. Rychlost vzdalování mohla být i vyšší.



Obr. 11.7. V západní části kráteru Eberswalde se nalézají delta řeky v oblasti cca 25×40 km. Střed má souřadnice -23.8953° S a 326.7426° E (foto NASA).

Na závěr poznamenejme, že slapové síly, sluneční vítr, úbytek sluneční hmotnosti apod. dokáží vysvětlit rychlost vzdalování jen několik centimetrů za rok, jak ještě podrobněji ukážeme pro Zemi v oddílu 13.6. Magnetické pole Marsu je téměř nulové, takže magnetické pole Slunce má také zcela zanedbatelný vliv na vzdálenost Mars–Slunce. Zhoršující se teplotní podmínky na Marsu a současné zvyšování tepelného toku ze Slunce lze vysvětlit rychlostí vzdalování Marsu srovnatelnou s (11.10), která může být způsobena antigravitačním působením temné energie. V následující kapitole představíme podobný odhad jako v (11.10) pro Měsíc, ale s přesností na centimetry za rok.



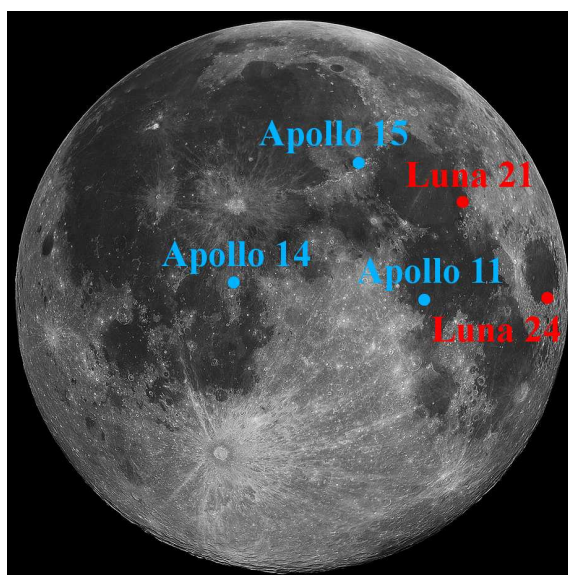
12. Vzdalování Měsíce od Země

*Vesmír se rozpíná téměř tak rychle,
jako se Měsíc vzdaluje od Země.*

AUTOR

12.1. Měření vzdálenosti Země–Měsíc

V této kapitole ukážeme, že se Měsíc vzdaluje od Země rychleji, než plyne z klasické mechaniky. Hypotéza o existenci antigravitačních sil a lokální expanzi Sluneční soustavy je totiž velice dobře testovatelná právě pomocí přesného měření změny střední vzdálenosti Země–Měsíc. Připomeňme si proto nejprve její definici z [108]. *Střední vzdálenost* je rovna délce hlavní poloosy eliptické dráhy. V našem případě je to tedy



Obr. 12.1. Polohy koutových odražečů na Měsíci

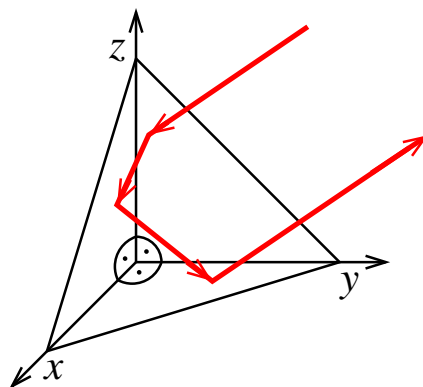
aritmetický průměr vzdáleností Měsíce od Země v apogeu a perigeu (srov. (1.1)). Měsíční dráha má mírnou excentricitu $e = 0.0554$, a tak se Měsíc k Zemi střídavě pozvolna přibližuje a pak se od ní zase vzdaluje. Současná technika ale umožňuje velice přesně stanovit dlouhodobé změny parametrů jeho dráhy.

Již od sedmdesátých let minulého století se proto pečlivě proměřuje změna střední vzdálenosti

$$D \approx 384\,402 \text{ km} \quad (12.1)$$

Měsíce od Země pomocí koutových odražečů, které na Měsíc přivezla mise Apollo 11 v roce 1969 a později ještě Apollo 14, 15 a Luna 21 na vozítku Lunochod 2. V roce 2012 se americké družici Lunar Reconnaissance Orbiter podařilo dohledat ztracenou sondu Luna 24 s dalším koutovým odražečem. V současnosti jich tak máme na Měsíci pět (viz obr. 12.1).

Princip prostého koutového odražeče je nakreslen na obr. 12.2. Jedná se vlastně o tři vzájemně kolmé odrazné plochy. Na Měsíci byly použity francouzské odražeče složené z mnoha pravoúhlých čtyřstěnů, které vzniknou „useknutím“ rohu homogenní křemenné krychle (angl. cube-corner tetrahedron).¹ Laserový impuls vyslaný k odražeči se po průchodu čelní stěnou² do opticky hustšího prostředí láme ke kolmici. Pak postupuje tak, jak je nakresleno na obr. 12.2. Přitom na stěnách $x = 0$, $y = 0$ a $z = 0$ dochází na rozhraní křemen–vakuum k totálnímu odrazu. Při výstupu z čelní



Obr. 12.2. Stěny koutového odražeče jsou v kartézské soustavě (x, y, z) dány rovnicemi $x = 0$, $y = 0$ a $z = 0$. Laserový paprsek na obrázku vyslaný ve směru (a, b, c) se po odrazu od stěny $x = 0$ pohybuje tak, že a se změní na $-a$ a ostatní dvě složky směrového vektoru zůstanou nezměněny. Tato vlastnost je důsledkem toho, že úhel dopadu je roven úhlu odrazu. Podobně je tomu u dalších stěn. Paprsek tak postupně vystřídá směry (a, b, c) , $(-a, b, c)$, $(-a, -b, c)$ a $(-a, -b, -c)$.

¹I na odrazce bicyklu je patrna struktura pravidelně rozmístěných rohů malých krychliček.

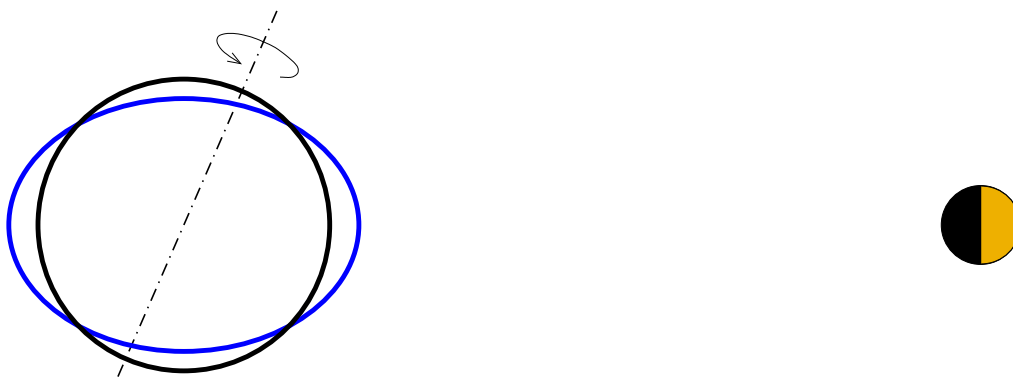
²Čelní stěna na obr. 12.2 je rovnostranný trojúhelník rovnoběžný s rovinou $x + y + z = 1$.

stěny se láme od kolmice a vrací se v původním směru zpět nezávisle na natočení odražeče. (Běžné zrcadlo tuto vlastnost nemá!) Protože umíme změřit velice přesně dobu mezi vysláním a příjmem, můžeme pomocí koutových odražečů stanovit změnu střední vzdálenosti Země–Měsíc s přesností na milimetry.



12.2. Paradox slapových sil Měsíce

Přivrácená strana Země je k Měsíci přitahována větší silou než strana odvrácená. V důsledku rotace Země tak vznikají *slapové síly*³, jež vyvolávají nejenom přílivy či odlivy moří a oceánů, ale i vzednutí zemské kůry (viz obr. 12.3). Neustálé deformace zemského tělesa tak způsobují, že se rotace Země zpomaluje, a tím ztrácí rotační moment hybnosti. Ze zákona zachování momentu hybnosti pak plyne, že musí narůstat orbitální moment hybnosti soustavy Země–Měsíc.



Obr. 12.3. Snižování úhlové rychlosti rotace Země je způsobeno třením při tvorbě slapových výdutí, které vznikají gravitačním působením Měsíce. Deformace zemského tělesa se přeměňuje na teplo.

Již v roce 1975 si T. C. van Flandern [64] (viz též [57], kapitola 6) povšiml, že Měsíc má poněkud anomální dráhu, protože se vzdaluje od Země rychleji, než lze vysvětlit pomocí slapových sil a Newtonovy mechaniky. Zkoumal, zda by to nemohlo být snižováním hodnoty gravitační konstanty. Dlouhodobá měření ukazují (viz [52]), že střední vzdálenost D postupně narůstá v průměru o

$$v = 3.84 \text{ cm za rok.} \quad (12.2)$$

³Slapové síly sehrály důležitou roli i při ukládání sedimentů. V nich je zaznamenána délka roku i měsíce, jak zjistil G. E. Williams [291].

Působením slapových sil v zemské kůře, hydrosféře, atmosféře apod. lze ale objasnit mnohem menší rychlost vzdalování (jen asi 55 % uvedené hodnoty), viz (12.20) a též [192], s. 67; [200], kapitola 9.10.4 a [284], s. 31. Tomu se obvykle říká *paradox slapových sil Měsíce*, viz [64]. Verbunt [279] dokonce píše o *slapové katastrofě*.

V oddílu 12.4 ukážeme, že ze zákona zachování momentu hybnosti lze odvodit rychlost vzdalování Měsíce od Země v důsledku slapových sil přibližně jen 2.13 cm za rok (srov. (12.2)) za předpokladu konstantního momentu setrvačnosti Země.

Měsíc se tedy od nás vzdaluje patrně nejenom v důsledku slapových sil. Pro zbývající řádově stejně velký přírůstek vzdalování cca 1.71 cm za rok je třeba hledat jiná vysvětlení. Tání ledovců, vnitřní procesy, přesuny hmoty v atmosféře, hydrosféře apod. tak velkou hodnotu vysvětlit nedokáží. Jednou z dalších možností je, že ke vzdalování Měsíce přispívá i antigravitace.



12.3. Pozoruhodná souvislost

Současnou rychlost rozpínání vesmíru lze charakterizovat Hubbleovou konstantou (viz (11.2))

$$H_0 \approx 70 \text{ km s}^{-1} \text{Mpc}^{-1} \approx 10 \text{ m yr}^{-1} \text{au}^{-1}.$$

Není těžké přepočítat rychlost tohoto rozpínání pouze na vzdálenost Země–Měsíc. Označíme-li yr časovou jednotku odpovídající jednomu siderickému roku a $R = 1 \text{ au}$, pak podle (12.1) vychází, že

$$H_0 \approx 10 \text{ m yr}^{-1} \text{au}^{-1} = 10 \frac{D}{R} \text{ m yr}^{-1} D^{-1} = 2.57 \text{ cm yr}^{-1} D^{-1}. \quad (12.3)$$

Vidíme, že tato hodnota je překvapivě blízká střední hodnotě vzdalování (12.2) Měsíce od Země. Antigravitace přitom může vysvětlovat větší naměřenou rychlost (12.2) vzdalování Měsíce od Země,⁴ než jaká plyne ze slapových sil. Dráha Měsíce tak není elipsa, ale velice hustá spirála.

Pokud budete chtít někomu názorně přiblížit, jak velká je v současnosti rychlost rozpínání vesmíru, stačí si připomenout vztahy (12.2) a (12.3):

Vesmír se rozpíná téměř tak rychle, jako se Měsíc vzdaluje od Země.



⁴U těsných binárních pulzarů se naopak oběžná doba zkracuje. V tomto případě binární systém vytváří silná a rychle se měnící gravitační pole. Podle teorie relativity pak ztrácí energii ve formě gravitačních vln. Protože pulzary mají extrémně silná magnetická pole, systému ubývá energie i ve formě elektromagnetických vln. Tyto jevy převládnu nad antigravitací.

12.4. Rychlost vzdalování Měsíce od Země v důsledku slapů

Podle [132] se nyní pokusíme podrobně odhadnout příspěvek slapových sil k hodnotě rychlosti (12.2). Uvažujme nejprve izolovanou soustavu Země–Měsíc s hmotnostmi

$$m_1 = 5.97219 \cdot 10^{24} \text{ kg}, \quad m_2 = 7.3477 \cdot 10^{22} \text{ kg} \quad (12.4)$$

a předpokládejme pro jednoduchost, že dráhy obou těles jsou kruhové (odhad slapového působení Slunce na změnu rotace Země zmíníme později). Pak odpovídající vzdálenost (viz (12.1)) můžeme napsat takto

$$D = R_1 + R_2, \quad (12.5)$$

kde

$$R_1 = \frac{Dm_2}{m_1 + m_2} \quad \text{a} \quad R_2 = \frac{Dm_1}{m_1 + m_2} \quad (12.6)$$

jsou po řadě vzdálenosti Země a Měsíce od jejich společného těžiště.

Podle zákona o zachování momentu hybnosti tohoto systému bude hodnota

$$\mathcal{L} = I_1\omega_1 + I_2\omega_2 + m_1R_1v_1 + m_2R_2v_2 \quad (12.7)$$

konstantní, tj. časová derivace $\dot{\mathcal{L}} = d\mathcal{L}/dt$ bude nulová. Zde v_1 a v_2 jsou postupně rychlosti Země a Měsíce vzhledem k těžišti, I_1 a I_2 jsou momenty setrvačnosti Země a Měsíce,

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1} = 7.292 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}, \quad \omega_2 = \frac{2\pi}{T_2} = 2.669 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-1} \quad (12.8)$$

jsou úhlové frekvence rotace Země a Měsíce kolem jejich vlastních os, $T_1 = 86\,164.1$ s je siderický den a $T_2 = 27.32166 T_1$. Podle [35] je

$$I_1 = 8.036 \pm 0.008 \cdot 10^{37} \text{ kg m}^2. \quad (12.9)$$

Nejprve ukážeme, že součin $I_2\omega_2$ v rovnici $\dot{\mathcal{L}} = 0$ je zanedbatelně malý ve srovnání s $I_1\omega_1$ (viz (12.14) a (12.17)). Použijeme-li vztah pro moment setrvačnosti homogenní koule [220], s. 108, dostaneme pro moment setrvačnosti Měsíce, jehož hustota $\rho(r)$ stoupá směrem ke středu, nerovnost

$$I_2 < \frac{4}{3}\pi r_2^3 \cdot \rho_2 \cdot \frac{2}{5}r_2^2 = 8.87 \cdot 10^{34} \text{ kg m}^2, \quad (12.10)$$

kde

$$\rho_2 = 3348 \text{ kg/m}^3 \quad (12.11)$$

je střední hustota Měsíce a $r_2 = 1737$ km je jeho poloměr. Poznamenejme, že člen $I_2\omega_2 < 2.37 \cdot 10^{29} \text{ kg m}^2\text{s}^{-1}$ odpovídající Měsíci je mnohem menší než $I_1\omega_1 = 5.86 \cdot 10^{33} \text{ kg m}^2\text{s}^{-1}$. My ale potřebujeme porovnat jejich časové derivace.

Jak již víme z oddílu 2.7, rotace Země se během posledních 2700 let zpomaluje tak, že délka dne narůstá průměrně o 1.7 ms za století, tj.

$$\tau_1 = 1.7 \cdot 10^{-5} \text{ s za rok.} \quad (12.12)$$

Odhad velikosti těchto dlouhodobých změn v rotaci Země způsobených slapovými silami byla získána podrobnou analýzou záznamů starých Babylóňanů (viz např. [192], s. 62, [239], s. 270, [284], s. 31), Arabů, Řeků a Číňanů [200] o úhlových výškách Slunce při pozorovaných zatměních a je v souladu i s dnešními měřeními. Soudobé zvýšené tání ledovců, procesy v nitru Země, přesuny atmosféry apod. tedy nemají příliš velký vliv na velikost (12.12). Proto budeme pro jednoduchost nejprve předpokládat, že moment setrvačnosti Země I_1 nezávisí na čase. V dalším oddílu pak budeme uvažovat časovou závislost $I_1 = I_1(t)$.

Slunce a Měsíc mají prakticky stejný úhlový průměr (viz kapitola 6). Protože slapové síly klesají s třetí mocninou vzdálenosti a objem zase s třetí mocninou vzdálenosti od Země roste, bude slapové působení každého z obou těles na Zemi přímo úměrné jeho střední hustotě. Pomocí rovností (12.11) a (4.18) stanovíme, že poměr⁵ hustot Měsíce a Slunce je roven 2.38. Měsíční slapový účinek na Zemi je tedy o dost silnější než účinek sluneční.

Podle [207] se rotace Země zpomaluje zejména v důsledku slapových sil Měsíce (cca 68.5 %), ale též Slunce (cca 31.5 %). Tudíž nárůst délky dne $\tau = 0.685\tau_1$ odpovídá působení Měsíce a $0.315\tau_1$ odpovídá působení Slunce. Za rok se úhlová frekvence rotace Země vlivem Měsíce změní na

$$\bar{\omega}_1 = \frac{2\pi}{T_1 + \tau}. \quad (12.13)$$

Ze vztahů (12.12) a (12.13) vidíme, že časová změna úhlové frekvence rotace Země způsobená slapovými silami Měsíce je⁶

$$\dot{\omega}_1 = \frac{\bar{\omega}_1 - \omega_1}{T} = -\frac{2\pi}{T} \frac{\tau}{T_1(T_1 + \tau)} = -3.123 \cdot 10^{-22} \text{ s}^{-2},$$

kde

$$T = 31\,558\,149.54 \text{ s}$$

je siderický rok. Odpovídající změna rotačního momentu hybnosti Země pak podle (12.9) je

$$I_1 \dot{\omega}_1 = -2.509 \cdot 10^{16} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-2}. \quad (12.14)$$

⁵Poměr slapového působení je ve skutečnosti o trochu menší než 2.38, protože průměrná úhlová velikost Slunce je $31.98'$ a Měsíce $31.07'$.

⁶Pro správný výpočet derivace $\dot{\omega}_1$ je důležité vycházet z naměřené hodnoty (12.12) zpomalování rotace Země a nikoliv z teoreticky odvozené hodnoty τ_1 využívající zákon zachování momentů hybnosti a vztah (12.2), jak se uvádí v [192], s. 65.

Měsíc ale také snižuje svůj rotační moment hybnosti v důsledku vzdalování (12.2) a rezonance 1:1 mezi oběžnou dobou a rotační periodou Měsíce T_2 . Měsíc se dostal do tzv. slapové pasti. Dále ukážeme, že $I_2\dot{\omega}_2$ je o mnoho řádů menší než hodnota uvedená v (12.14). Podle vztahu (12.6) je $R_1 = 4672$ km, a tak $R_2 \approx D$ a těžiště soustavy Země–Měsíc se nachází uvnitř Země. Použijeme tedy zobecněný třetí Keplerův zákon (4.5), který výborně aproximuje skutečnou situaci na krátkých časových škálách. Podle něj je D^3/T_2^2 konstantní. Z (12.8) pak plyne, že součin $\omega_2^2 D^3$ je také konstantní. Zderivujeme-li $\omega_2^2 D^3$ podle času, obdržíme diferenciální rovnici

$$2\omega_2\dot{\omega}_2 D^3 + 3\omega_2^2 D^2 \dot{D} = 0,$$

tj.

$$\dot{\omega}_2 = -\frac{3}{2} \frac{\omega_2}{D} \dot{D}. \quad (12.15)$$

Podle (12.2) je průměrná dlouhodobá pozorovaná časová změna D dána vztahem

$$\dot{D}_{\text{pozorovaná}} = \frac{3.84 \text{ cm}}{T} = 1.2 \cdot 10^{-9} \text{ m/s}. \quad (12.16)$$

Odtud, z (12.1), (12.8), (12.10) a (12.15) dostaneme

$$|I_2\dot{\omega}_2| < 1.1 \cdot 10^8 \text{ kg m}^2 \text{s}^{-2}, \quad (12.17)$$

tj. změna rotačního momentu hybnosti Měsíce je zanedbatelná vůči hodnotě uvedené v (12.14).

Pokles rotačního momentu hybnosti Země v (12.14) musí být tudíž kompenzován nárůstem orbitálního momentu hybnosti $m_1 R_1 v_1 + m_2 R_2 v_2$ v (12.7). Úhlová rychlost rotace Měsíce kolem vlastní osy je díky vázané rotaci stejná jako úhlová rychlost Země kolem společného těžiště s Měsícem, tj. $\omega_2 = v_2/R_2 = v_1/R_1$. Uvažujeme-li nadále soustavu, v níž je těžiště Země–Měsíc v klidu, pak ze zákona zachování hybnosti $m_1 v_1 = m_2 v_2$, (12.5) a (12.6) dostaneme

$$m_1 R_1 v_1 + m_2 R_2 v_2 = (R_1 + R_2) m_1 v_1 = D m_1 v_1 = D m_1 R_1 \omega_2 = D^2 \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \omega_2.$$

Odtud, z (12.15) a derivováním (12.7) podle času plyne, že

$$\begin{aligned} I_1 \dot{\omega}_1 &= -\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \frac{d(D^2 \omega_2)}{dt} = -\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (\dot{\omega}_2 D^2 + 2\omega_2 D \dot{D}) \\ &= -\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \frac{\omega_2 D}{2} \dot{D}. \end{aligned} \quad (12.18)$$

Dosazením z (12.1), (12.4), (12.8) a (12.14) konečně dostaneme

$$\dot{D} = 0.674 \cdot 10^{-9} \text{ m/s}, \quad (12.19)$$

což je jen o trochu více než polovina hodnoty získané z měření (12.16).

Vynásobením (12.19) délkou siderického roku T zjistíme, že vzdálenost mezi Zemí a Měsícem by v současnosti měla narůstat jen o

$$v_{\text{slapy}} \approx 2.13 \text{ cm za rok.} \quad (12.20)$$

Rozdíl mezi naměřenou hodnotou z (12.2) a hodnotou (12.20) označme

$$v_{\text{zbytek}} \approx 1.71 \text{ cm za rok,} \quad (12.21)$$

tj.

$$v = v_{\text{slapy}} + v_{\text{zbytek}}.$$

Původ členu v_{zbytek} je neznámý, ale jeho velikost podporuje hypotézu o lokálním působení antigravitace. Je totiž patrné, že hodnota v_{zbytek} v (12.21) je jen o trochu menší, než je současná hodnota Hubbleovy konstanty ve vztahu (12.3). Přesněji řečeno, rychlost 1.71 cm za rok je rovna 67 % hodnoty 2.57 cm za rok, tj.

$$H_0^{(\text{loc})} = 0.67 H_0. \quad (12.22)$$

Tak velké vzdalování není způsobeno slapy ani jinými negravitačními jevy, jak ještě uvidíme níže i v dalších kapitolách.

V roce 2003 Dumin (viz [53], s. 2463) odvodil pro systém Země–Měsíc poněkud odlišným způsobem podobnou lokální expanzi $H_0^{(\text{loc})} \approx 0.5 H_0$ a v článku [54] z roku 2008 ji ještě navýšil na hodnotu $H_0^{(\text{loc})} \approx 0.85 H_0$.



12.5. Časově proměnný moment setrvačnosti Země

Geofyzici připouštějí (viz např. [192], [279], [284]), že je obtížné vysvětlit poměrně velký rozdíl mezi pozorovanou hodnotou (12.16) a hodnotou (12.19) teoreticky odvozenou ze slapových sil. Hledají proto zdroj, který by dával řádově stejné hodnoty vzdalování Měsíce od Země jako slapové síly. Například v [192], s. 67, se uvažuje časově proměnný moment setrvačnosti $I_1 = I_1(t)$ a levá strana rovnice (12.18) je nahrazena derivací $d(I_1\omega_1)/dt$. K vyrovnání rozdílu mezi (12.16) a (12.19) by tedy po dobu nejméně 2700 let od času pozorování babylónských astronomů (srov. (12.12)) musel existovat trvalý tok hmoty ke středu Země, který by zajistil, že $-\dot{I}_1$ je řádově 10^{20} až $10^{21} \text{ kg m}^2/\text{s}$.

Podívejme se nyní podrobněji, jak se k tomuto závěru dojde. Předpokládejme, že pozorovaná časová změna (12.16) je způsobena proměnným momentem setrvačnosti Země. Pak místo vztahu (12.18) budeme uvažovat rovnici

$$\frac{d}{dt}(I_1\omega_1) = \dot{I}_1\omega_1 + I_1\dot{\omega}_1 = -\frac{m_1m_2}{m_1+m_2} \frac{\omega_2 D}{2} \dot{D}_{\text{pozorovaná}}.$$

Odečteme-li od ní (12.18), dostaneme

$$\dot{I}_1 \omega_1 = -\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \frac{\omega_2 D}{2} (\dot{D}_{\text{pozorovaná}} - \dot{D}).$$

Po vydělení ω_1 a dosazení z (12.1), (12.4), (12.8), (12.16) a (12.19) obdržíme

$$\dot{I}_1 = -2.686 \cdot 10^{20} \text{ kg m}^2 \text{s}^{-1}.$$

Tak velká změna momentu setrvačnosti je absurdní a nelze ji vysvětlit nějakým jednoduchým procesem. Odpovídá obrovskému toku hmoty ke středu Země trvajícimu alespoň 2700 let, což není pravděpodobné. Proto lze uvažovat časově nezávislý moment setrvačnosti Země, aniž bychom se dopustili příliš velké chyby při odvozování (12.22).

Existují rozmanité negravitační síly, které ovlivňují změnu vzdálenosti Měsíce od Země, jako např. sluneční vítr, tepelné sálání Země a Měsíce, Jarkovského efekt, srážky s meziplanetárním prachem a meteority či přítomnost magnetických polí. Jejich vliv se však zdá být zcela zanedbatelný ve srovnání s působením slapů.

Existuje velké množství hypotéz, které se snaží vysvětlit nadměrné vzdalování Měsíce od Země (viz např. [53], [54], [55], [132]). V článku [55] se rychlé vzdalování přičítá energii vakua. Přitom se ale předpokládá, že rychlost gravitační interakce je nekonečná. Relativistické efekty a též případná závislost gravitační konstanty na čase se zase vyšetřují v [175]. Rychlosti $v_1 = 12.5 \text{ m/s}$ a $v_2 = 1020 \text{ m/s}$ z (12.7) jsou však velice nízké na to, aby se relativistické efekty výrazněji projevil.



12.6. Paradox velkého orbitálního momentu hybnosti Měsíce

Pomocí samotných slapových sil je obtížné vysvětlit současný paradoxně velký orbitální moment hybnosti soustavy Země–Měsíc (viz [109]; [15], s. 534). Pokud připustíme působení antigravitačních sil, získáme dodatečný posun (12.21) v rychlosti vzdalování Měsíce od Země. Podle [109] se Měsíc zformoval ve vzdálenosti jen 20 000 km od Země přibližně před 4.5 miliardami let. To odpovídá průměrné rychlosti vzdalování

$$\bar{v} = 8 \text{ cm za rok},$$

aby dosáhl dnešní vzdálenosti (12.1). Protože slapové síly ubývají se třetí mocninou vzdálenosti, tempo vzdalování Měsíce od Země se postupně snižuje. Přitom antigravitace mohla také podstatně přispívat k procesu vzdalování.



13. Vzdalování Země od Slunce

*Žádné množství experimentů
nemůže dokázat, že mám pravdu.
Jediný experiment však může
dokázat, že jsem se mýlil.*

ALBERT EINSTEIN

13.1. Paradox mladého horkého Slunce

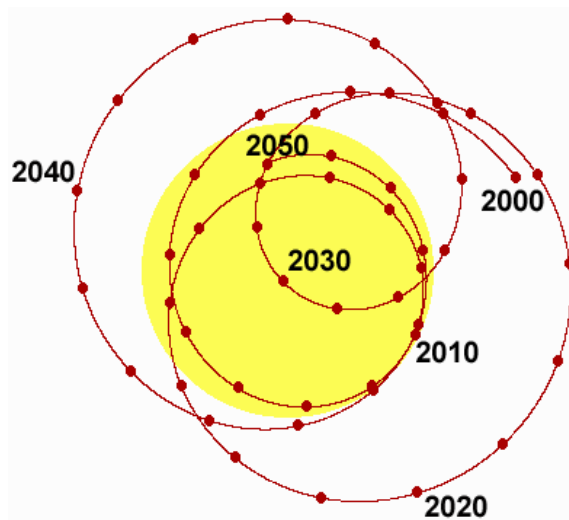
Nejprve připomeňme *paradox mladého horkého Slunce*. Mysleme si na okamžik, že Země byla při svém zrodu vzdálena od Slunce cca 1 au, jako je nyní. Aby nebyla zcela zmrzlá a mohl se na ní vyvíjet život, muselo být Slunce při svém vzniku přibližně tak horké, jako je nyní. To však není v souladu s tím, že Slunce, jakožto hvězda na hlavní posloupnosti Hertzsprungova–Russellova diagramu, mělo při svém vzniku menší zářivý výkon (srov. obr. 11.1 a 11.2). Paradox mladého horkého Slunce je podrobněji popsán např. v [164].

Pokud byl Mars podstatně blíže Slunci o desítky milionů km (viz kapitola 11), musela být blíže i naše Země. Jinak by totiž v minulosti docházelo k jejich blízkým setkáním a jejich dráhy by nebyly dlouhodobě stabilní. V následujících oddílech uvedeme další 3 nezávislé argumenty svědčící o tom, že Země byla kdysi blíže Slunci a že jejich průměrná vzdálenost narůstá rychlostí několika metrů za rok. Připustíme-li, že je to díky antigravitaci, přestane být paradox mladého horkého Slunce záhadou.



13.2. Rozpínání ekosféry

Země se nachází uvnitř tzv. obyvatelné zóny, tj. oblasti, v níž se trvale nachází tekutá voda. V tomto oddíle stanovíme rychlost vzdalování Země od Slunce zajišťující kon-



Obr. 13.1. Dráha těžiště Sluneční soustavy vzhledem ke Slunci v období 2000–2050. Průměr Slunce je téměř 1.4 milionu km. Těžiště se posune zhruba o 1 000 km za den.

stantní přísun sluneční energie po dobu 3.5 miliardy let, což by poskytovalo příznivé podmínky pro rozvoj života na naší planetě.

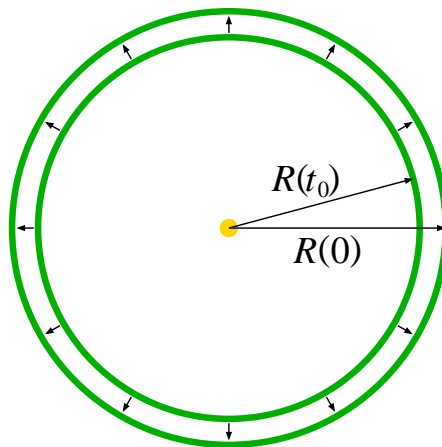
Zatím bohužel neumíme změřit skutečnou průměrnou rychlost vzdalování Země od Slunce s přesností řádově metr za rok, protože se poloha těžiště Sluneční soustavy mění o statisíce kilometrů ročně v důsledku gravitačního působení velkých planet, viz (5.1) a obr. 13.1. Proto budeme sledovat velice dlouhý časový interval 3.5 miliardy let existence života na Zemi.

K zajištění příznivých podmínek pro život na Zemi je v současnosti nutné, aby zářivý výkon Slunce byl nejvýše o 5 % větší nebo menší než sluneční konstanta

$$L_0 = 1.36 \text{ kWm}^{-2}. \quad (13.1)$$

Takovému mezikruží (popř. kulové vrstvě či mezikoulí) se říká *ekosféra*. Protože zářivý tok klesá od Slunce se čtvercem vzdálenosti, jsou její poloměry $(0.95)^{1/2}$ au a $(1.05)^{1/2}$ au, což odpovídá velice úzkému intervalu 145.8–153.3 milionu km (viz obr. 13.2). Kdyby se eliptická dráha Země dlouhodobě dostala mimo tuto oblast, mělo by to katastrofální důsledky pro život na naší planetě. Trvalé snížení zářivého výkonu Slunce o více než 5 % by způsobilo celkové zalednění naší planety. Na druhé straně už při teplotách nad 57°C dochází k rozpadu některých sekvencí DNA mnohobuněčných organismů.

Doba, kdy se na Zemi objevil život (tj. před 3.5 miliardami let), odpovídá výkonu Slunce kolem 77 % dnešní hodnoty (viz obr. 11.2). Pro zabezpečení příznivého klimatu pro dlouhodobý vývoj života, kdy je nutná voda v kapalném skupenství, byla Země patrně o desítky milionů kilometrů blíže ke Slunci. Mohou na to poukazovat



Obr. 13.2. Schematické znázornění rozpínání ekosféry během posledních 3.5 miliardy let, kde $R(t_0) = 1.3 \cdot 10^{11}$ m, $R(0) = 1.5 \cdot 10^{11}$ m a $t_0 = -3.5$ Gyr.

například data o výskytu fosilních termofilních bakterií, ze kterých se soudí [169], že teplota oceánů před 3.5 Gyr byla kolem 80°C . Vzhledem k vyšší vulkanické činnosti ovšem není jasné, do jaké míry se může jednat o výběrový efekt. Tak vysoké teploty (srov. obr. 11.6) lze těžko vysvětlit jiným složením atmosféry, když mělo Slunce jen 77% dnešního výkonu. Přitom ze vztahu (11.9) pro celkový sluneční výkon $0.75L_\odot$ a současnou hodnotu středního albeda Země $A = 0.306$ dostáváme teplotu -36°C pro $r = 1$ au.

Radioaktivní látky jistě také přispívaly k vyšší teplotě během několika prvních stovek milionů let existence Země, kdy se rozpadaly prvky s relativně krátkým poločasem přeměny. Za půl miliardy let však povrch Země dostatečně vychladl. Podle současných měření je tepelný tok ze Země menší než 0.1 W/m^2 . Před 4 miliardami let nemohl být o mnoho větší, protože poločasy rozpadů současných přirozených radioaktivních izotopů ^{232}Th , ^{238}U a ^{235}U jsou 13.9, 4.468 a 0.704 miliardy let [50]. Proto se odhaduje (viz [70], s. 58), že tepelný tok ze Země před 4 miliardami let byl nejvýše 5krát větší než dnes. Tento tok tepla z geotermálních zdrojů je však zcela zanedbatelný ve srovnání se sluneční konstantou (13.1).

Pro rozvoj života byly zapotřebí velice stabilní podmínky po dobu 3.5 miliardy let, i když výkon Slunce narůstal přibližně podle obr. 11.2. V oddílu 14.2 ukážeme, že pro průměrnou rychlost¹ vzdalování Země od Slunce

$$\bar{v} = 5.2 \text{ m za rok} \quad (13.2)$$

by Země dostávala téměř konstantní přísun energie (srov. (13.1))

$$L(t) = 1.36 \pm 0.005 \text{ kW m}^{-2}$$

¹Velká rychlost vzdalování (13.2) by činila potíže s původní definicí astronomické jednotky. Nově zavedená definice astronomické jednotky au je na vzdálenosti Země od Slunce nezávislá (viz (4.6)).

pro všechna t z intervalu dlouhého 3.5 miliardy let. V tomto smyslu je rychlost (13.2) optimální. Netvrdíme však, že se Země vzdaluje právě touto rychlostí, ale rychlostí řádově srovnatelnou s (13.2). Rychlost (13.2) však podle vztahu

$$H_0 \approx 10 \text{ m yr}^{-1} \text{ au}^{-1}, \quad (13.3)$$

který jsme odvodili v kapitole 11 (srov. (11.2)), odpovídá střední rychlosti rozpínání

$$H_0^{(\text{loc})} = 0.52 H_0. \quad (13.4)$$

Vzhledem k řádové podobnosti s Hubbleovou konstantou usuzujeme, že toto vzdalování lze přičíst na vrub repulzivním účinkům temné energie.

Antigravitační síla tak způsobuje sekulární migraci naší planety o metry za rok, aby trvale zůstávala uvnitř rozpínající se ekosféry (viz obr. 13.2). Pokud by antigravitace nepůsobila, vhodné podmínky pro vývoj života na zeměkouli by existovaly jen asi jednu miliardu let. Inteligentní život by se nestačil rozvinout díky neustálému růstu teploty (srov. obr. 11.2, [137] a [157]).



13.3. Analýza přírůstků fosilních korálů ze slunečních dat

V tomto oddílu představíme metodu navrženou W. Zhangem [296]. Současná hodnota siderického roku je

$$Y = Y(0) = 31\,558\,149.54 \text{ s} = 365.25636 \cdot 24 \cdot 3600 \text{ s}. \quad (13.5)$$

Jeho délka v minulosti je dána vztahem

$$Y(t) = n(t)(24 \cdot 3600 + f(t)t) \quad \text{pro } t \leq 0, \quad (13.6)$$

kde čas $(-t)$ je dán počtem oběhů Země kolem Slunce, $t = 0$ odpovídá současnosti, $f = f(t) > 0$ charakterizuje nárůst délky dne v sekundách během daného roku v důsledku zpomalování zemské rotace a $n(t)$ je počet dní v roce, který lze dobře odhadovat z paleontologických dat. Každý korál totiž během dne naroste o několik mikronů, v létě více, v zimě méně. Pokud vyšetřujeme data pro několik po sobě jdoucích let (např. v [196] se vyšetřují vrstvy, které narostly během dvanácti let), umožňuje nám to minimalizovat chybu určení počtu dní v příslušném roce. Stovky takových vzorků fosilních korálů byly analyzovány pomocí mikroskopu například v [296]. Nejvíce dat je nashromážděno pro $\tau = -370 \cdot 10^6$ let odpovídajících devonu v prvohorách. Pro tato data byla nalezena přibližná hodnota $n(\tau) = 405$ dní, které ovšem byly kratší než dnešní dny. J. W. Wells v průkopnickém článku [290], s. 949, z roku 1963 také uvádí, že v devonu měl rok kolem 400 dní.

Rotaci Země brzdí slapové síly Měsíce a Slunce, které klesají se třetí mocninou vzdálenosti. Protože kdysi byl Měsíc blíže Zemi a Země patrně blíže Slunci, je funkce f klesající. Podle [296], s. 4014, je $f(\tau) = 2.6 \cdot 10^{-5}$ s za rok, zatímco současná hodnota je $f(0) = 1.7 \cdot 10^{-5}$ s za rok (viz (2.6)). Historie zpomalování rotace Země (paleorotace) se vyšetřuje též v [196] a [291]. Dosadíme-li předchozí data do (13.6), dostaneme (srov. (13.5))

$$Y(\tau) = 405(24 \cdot 3600 - 2.6 \cdot 10^{-5} \cdot 370 \cdot 10^6) \text{ s} = 405 \cdot 76780 = 31\,095\,900 \text{ s}, \quad (13.7)$$

tj. v devonu měl den přibližně jen 76 780 sekund (≈ 21.327 hodiny).

Označme $R(t)$ velikost hlavní poloosy zemské dráhy v čase t . Na krátkých časových intervalech popisuje 3. Keplerův zákon

$$\frac{R^3(t)}{Y^2(t)} = \frac{GM_\odot}{4\pi^2} \quad (13.8)$$

realitu dosti přesně. Zde $G = 6.674 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}$ je gravitační konstanta a

$$M_\odot = 1.989 \cdot 10^{30} \text{ kg} \quad (13.9)$$

hmotnost Slunce. Dnešní hodnota M_\odot se od hodnoty v devonu liší jen o 0.003 % (viz (13.19) níže). Dosazením ze (13.7) do (13.8) dostaneme pro délku hlavní poloosy dráhy Země v devonu hodnotu

$$R(\tau) = \left(\frac{Y^2(\tau)GM_\odot}{4\pi^2} \right)^{1/3} = 148.1 \cdot 10^9 \text{ m}.$$

Průměrná rychlost vzdalování Země od Slunce pak pro $R(0) = 149.6 \cdot 10^9 \text{ m}$ vychází

$$\bar{v} = \frac{R(\tau) - R(0)}{\tau} = \frac{(149.6 - 148.1) \cdot 10^9}{370 \cdot 10^6} = 4 \text{ (m/yr)},$$

což je hodnota poměrně blízká hodnotě uvedené v (13.2) a podle (13.3) odpovídá rychlosti rozpínání

$$H_0^{(\text{loc})} = 0.4 H_0. \quad (13.10)$$



13.4. Analýza přírůstků fosilních korálů z měsíčních dat

Z kapitoly 12 víme, že současná střední hodnota vzdálenosti Měsíce od Země je rovna

$$D = 384\,402 \cdot 10^6 \text{ m} \quad (13.11)$$

a že rychlost $v = v(t)$ jeho pozvolného vzdalování od nás má nyní hodnotu

$$v(0) = 3.84 \text{ cm/yr.} \quad (13.12)$$

Na některých prvohorních korálech lze také vystopovat, jak byl kdysi dlouhý lunární měsíc, a odtud můžeme odvodit délku siderického měsíce $P(t)$ a kolik siderických měsíců $s(t)$ bylo v jednom roce. Přitom dnešní hodnoty jsou $P(0) = 27.322$ dne, $s(0) = 13.368$ a počet siderických měsíců je roven počtu lunárních měsíců zvětšených o jedničku. Počet lunárních měsíců pro různá období lze určit z paleontologických dat pomocí počítání vrstev přírůstků korálů od jednoho novu k novu následujícímu (viz obr. 13.3 a [296], s. 4012).

V kambriu před půl miliardou let byl navíc Měsíc asi o 20 000 km blíže Zemi (při průměrné rychlosti vzdalování 4 cm/yr extrapolované z [52]), a tak při úplňku svítil o trochu více než dnes. Jeho prostorový úhel byl přibližně o 10 % větší. A tudíž jsou rozdíly intenzity měsíčního svitu mezi úplňkem a novem na některých vzorcích dobře rozpoznatelné. Tímto způsobem se například zjistilo, že v kambriu pro $\tau = -500$ milionů let bylo $s(\tau) = 14.2$ siderického měsíce [296], s. 4013.

Podle zobecněného 3. Keplerova zákona (4.5) použitého na soustavu Země–Měsíc pro délku jednoho roku v době t platí

$$Y(t) = s(t)P(t) = s(t) \left((D + v(t)t)^3 \frac{4\pi^2}{G(M + m)} \right)^{1/2}, \quad (13.13)$$

kde

$$M = 5.9736 \cdot 10^{24} \text{ kg}, \quad m = 7.349 \cdot 10^{22} \text{ kg} \quad (13.14)$$

jsou hmotnosti Země a Měsíce a $v(t)$ rychlost jejich vzdalování. Protože působení slapů ubývá se třetí mocninou vzdálenosti, je funkce $v = v(t)$ klesající v čase.

Odtud a ze vztahů (13.8), (13.13), (13.14), (13.11) a (13.12) pro $t = \tau = -5 \cdot 10^8$ yr dostaneme horní odhad pro vzdálenost Země–Slunce v kambriu

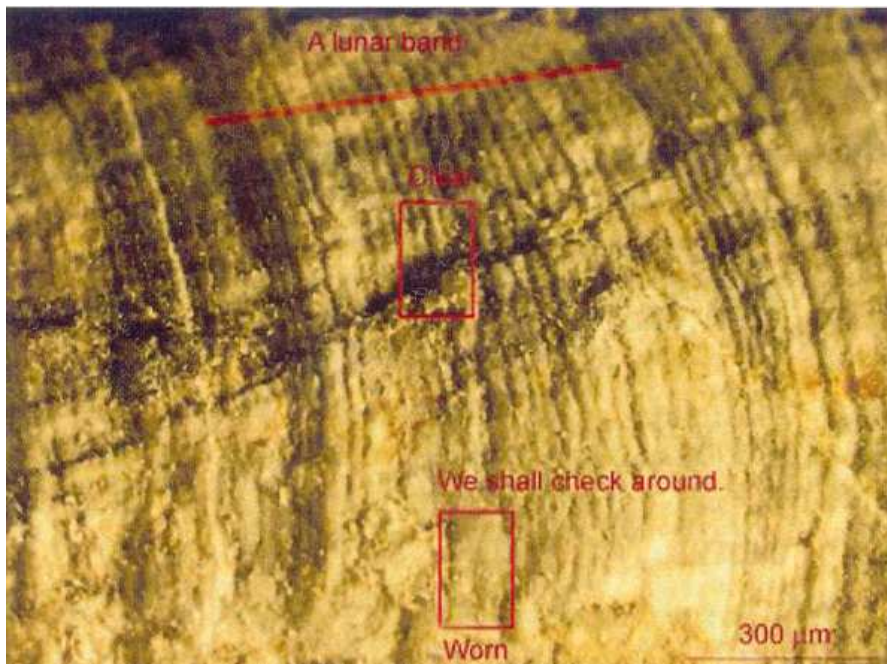
$$\begin{aligned} R(\tau) &= \left(Y^2(\tau) \frac{GM_\odot}{4\pi^2} \right)^{1/3} = s(\tau)^{2/3} \left(\frac{M_\odot}{M + m} \right)^{1/3} (D + v(\tau)\tau) \\ &< 14.2^{2/3} \cdot 328919^{1/3} (384.402 \cdot 10^6 + v(0)\tau) = 147.8 \cdot 10^9 \text{ (m)}, \end{aligned}$$

protože $v(\tau) > v(0)$. Odtud dostáváme dolní odhad pro průměrnou rychlost vzdalování Země od Slunce

$$\bar{v} = \frac{R(\tau) - R(0)}{\tau} > \frac{(149.6 - 147.8) \cdot 10^9}{5 \cdot 10^8} = 3.6 \text{ (m/yr)}.$$

V tomto případě ze vztahu (13.3) obdržíme

$$H_0^{(\text{loc})} > 0.36 H_0. \quad (13.15)$$



Obr. 13.3. Metoda stanovení délky lunárního měsíce mezi dvěma po sobě následujícími novy pomocí přírůstků prvohorních korálů podle [296]. Místo dolního obdélníku, kde je struktura proužků nezřetelná, se počítají proužky v jiném obdélníku.

Pro výpočet periody $P(t)$ v (13.13) použili Zhang a kol. [296] také 3. Keplerův zákon. Důkladnou analýzou lunárních dat stovek vzorků fosilních korálů, která jsou nezávislá na slunečních datech, našli další hodnoty $s(t)$ pro mnoho časových epoch t (viz [296], s. 4013–4016). Tak zjistili, že střední rychlost vzdalování Země od Slunce je

$$H_0^{(\text{loc})} = 0.57 H_0. \quad (13.16)$$



13.5. Prodlužování délky siderického roku Země

V předchozích oddílech 13.1–13.4 jsme uvedli několik nepřímých, ale zato vzájemně nezávislých argumentů ukazujících, že střední velikost hlavní poloosy zemské dráhy narůstá o několik metrů ročně. Dalším účinným nástrojem, jak zjistit průměrnou rychlost vzdalování Země od Slunce, by nám mohla poskytnout současná systematická měření délky siderického roku. Je ale nutno měřit dlouhodobě a velice přesně. Během několika let je velice obtížné detekovat změny, které odpovídají vzdalování Země od Slunce řádově o metry za rok. Jak již víme z obr. 13.1, těžiště Sluneční sou-

stavy se posunuje o statisíce kilometrů za rok. Navíc elipticitu dráhy „dvojplanety“ Země–Měsíc mírně narušuje Slunce, Jupiter, Venuše a další tělesa.

Předpokládejme, že délka hlavní poloosy zemské dráhy naroste v průměru o $\Delta R = 5.2$ m za siderický rok (srov. (13.2)). Pak podle třetího Keplerova zákona

$$\frac{(R + \Delta R)^3}{(Y + \Delta Y)^2} = \frac{R^3}{Y^2}$$

můžeme snadno zjistit, že změna orbitální periody Země za jeden rok činí přibližně $\Delta Y = 1.6$ ms. Platí totiž

$$Y^2(R^3 + 3R^2\Delta R + \dots) = R^3(Y^2 + 2Y\Delta Y + \dots).$$

Zanedbáme-li členy vyšších řádů v ΔR a ΔY , pak z (11.1) a (13.5) dostaneme, že se každoročně siderický rok prodlužuje o

$$\Delta Y \approx \frac{3Y}{2R}\Delta R = 0.0016 \text{ s.} \quad (13.17)$$

Tak malou časovou změnu lze jen těžko detekovat vzhledem ke složitosti problému, i když čas umíme měřit s přesností lepší než ps.

Nárůst oběžné doby Země kolem Slunce o $\Delta Y = 1.6$ ms by vyžadoval přidávat k siderickému roku jednu sekundu každých 35 let, protože po dvou letech bychom museli k orbitální periodě přidat $2\Delta Y$, po třech letech $3\Delta Y$ atd. Odtud dostaneme

$$(1 + 2 + \dots + 35)\Delta Y = (1 + 35)\frac{35}{2} \cdot 0.0016 \text{ s} \approx 1 \text{ (s)},$$

což činí detekci malé změny periody velice obtížnou. Nárůst siderického roku se tak znatelně projeví až za několik desetiletí. Přitom nesmíme zapomínat, že jde jen o průměrnou hodnotu.

Poznamenejme ještě, že se takřka každoročně přidává ke kalendářnímu roku² 1 nebo 2 přestupné sekundy, aby se vyrovnalo zpoždění rotace Země.³ Výše uvedené hodnoty jsme odvodili za předpokladu (13.2). Skutečnost však může být trochu jiná. Například z (13.5) a (13.7) plyne, že se siderický rok prodlužuje o (srov. (13.17))

$$\Delta Y = \frac{Y(\tau) - Y(0)}{\tau} = \frac{31\,558\,149.54 - 31\,095\,900}{370 \cdot 10^6} \text{ s} = 0.00125 \text{ (s)}.$$

²Gregoriánský kalendářní rok má 365.2425 dne. Je téměř roven tropickému roku 365.24219 dne, což je doba mezi dvěma po sobě následujícími průchody Slunce *jarním bodem*, tj. jedním ze dvou průsečíků ekliptiky a nebeského rovníku. Tropický rok má 31 556 925.4 sekundy a je tedy cca o 20 minut kratší než siderický rok (13.5). V důsledku precese zemské osy se za tropický rok posune jarní bod po ekliptice o 50.27" vzhledem ke hvězdám.

³Při zemětřeseních občas dochází k tomu, že se nepatrně urychlí zemská rotace, protože Země zmenší svůj moment setrvačnosti nebo se pohne osa rotace.

I když v současnosti lze měřit úhly s přesností na miliontiny obloukové vteřiny, měřit vzdalování Země pomocí změny úhlového průměru Slunce nemá smysl. Okraj Slunce není příliš ostrý a zmenšení úhlového průměru o $0.000\,001''$ odpovídá vzdálenosti o 176 metrů větší. Navíc není známo, jak rychle narůstá průměr Slunce v metrech za rok.



13.6. Eliminace dalších příčin vzdalování Země od Slunce

V tomto oddílu ukážeme, že snižování sluneční hmotnosti v důsledku nukleárních reakcí, výtrysků plazmatu a slunečního větru, působení slapových sil, magnetických polí aj. má zcela zanedbatelný vliv na významné vzdalování Země od Slunce. Bez přítomnosti antigravitačních sil není snadné vysvětlit poměrně velkou rychlost (13.2). Lokální působení antigravitace (viz (13.4), (13.10), (13.15) a (13.16)) však opět může tento paradox objasnit.

Jádro helia je o 0.7 % lehčí než 4 protony. To znamená, že nejvýše 0.7 % celkové sluneční hmotnosti se změní na energii během 10 miliard let, což je odhadované stáří Slunce. Když vzniklo, obsahovalo již asi 30 % helia. Vodík se mění na helium jen v centrální části Slunce a až Slunce skončí svoji pouť na hlavní posloupnosti Hertzsprungova–Russellova diagramu (viz obr. 11.1), bude stále ještě obsahovat obrovské množství vodíku. Proto se předpokládá, že Slunce přemění asi jen 0.07 % své celkové hmotnosti na energii. V důsledku přeměny hmotnosti na energii jsou současné sluneční ztráty podle (13.5) a (13.9) průměrně jen $0.0007M_{\odot}/(10^{10} \cdot Y(0)) = 4.46 \cdot 10^9$ kg za sekundu. Přitom jaderné reakce mají hlavní podíl na ztrátě sluneční hmotnosti.

Slunce také částečně ztrácí hmotnost díky plazmatickým výronům. Ze vztahů (13.9) a (4.15) (resp. (4.12)) uvažovaných pro Slunce lze odvodit, že plazma může teoreticky opustit Sluneční soustavu, resp. samotné Slunce, je-li jeho rychlost větší než 617 km/s, resp. 436 km/s. Pro menší počáteční rychlosti spadne plazma zpět do Slunce. Do Slunce ale občas padají komety a další tělesa, která zase jeho hmotnost zvyšují.

Podle [191] Slunce ztrácí v průměru každou sekundu $5.75 \cdot 10^9$ kg (tj. každým rokem asi $1.815 \cdot 10^{17}$ kg) své hmotnosti v důsledku termonukleárních reakcí, slunečního větru, elektromagnetického záření a již zmiňovaných výronů koronárního plazmatu. Odtud a z (13.9) plyne, že

$$\frac{\dot{M}_{\odot}}{M_{\odot}} = \frac{1.815 \cdot 10^{17}}{1.989 \cdot 10^{30}} = -9.13 \cdot 10^{-14} \text{ (yr}^{-1}\text{)}, \quad (13.18)$$

kde tečka označuje časovou derivaci. Jak se ukazuje v [191], poloměry drah planet expandují ve stejném poměru. Země se tedy v důsledku úbytku hmotnosti Slunce od

něj vzdaluje průměrnou rychlostí $9.13 \cdot 10^{-14} \text{ yr}^{-1} \cdot 149.6 \cdot 10^{11} \text{ m} = 0.014 \text{ m/yr}$, což je podstatně menší rychlost rozpínání, než uvádíme v oddílu 13.2 (srov. např. (13.2)). Řešení diferenciální rovnice (13.18) má tvar

$$M_{\odot}(t) = M_{\odot} e^{-Ct},$$

kde $C = 9.13 \cdot 10^{-14} \text{ yr}^{-1}$. Změny hmotnosti Slunce jsou tedy vskutku zanedbatelné. Pokud např. $t = \tau = -370 \cdot 10^6 \text{ yr}$, což odpovídá devonu, zjistíme, že

$$M_{\odot}(\tau) = 1.989067 \cdot 10^{30} \text{ kg}, \quad (13.19)$$

což představuje spíše jen horní odhad skutečné hmotnosti vzhledem k nižšímu výkonu Slunce v devonu.

Tlak slunečního záření na Zemi také nedokáže vysvětlit významnou rychlost vzdalování Země od Slunce. Energie, která k nám ze Slunce za rok přijde,⁴ je rovna

$$E = SYL_0 = 5.4 \cdot 10^{24} \text{ J},$$

kde $S = \pi(6.378 \cdot 10^6)^2 \text{ m}^2 = 1.277964 \cdot 10^{14} \text{ m}^2$ je maximální průřez Země, Y je délka roku z (13.5) a L_0 je sluneční konstanta z (13.1). Označme dále E_i , λ_i , ν_i a p_i postupně energii, vlnovou délku, frekvenci a hybnost i -tého fotonu. Pak platí

$$p_i = \frac{h}{\lambda_i} = \frac{h\nu_i}{c} = \frac{E_i}{c},$$

kde $h = 6.626\,0693 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$ je Planckova konstanta a $c = 299\,792\,458 \text{ m/s}$ je rychlost světla. Sečteme-li předchozí rovnici přes všechny fotony přicházející na Zemi od Slunce během jednoho roku, dostaneme celkovou hybnost

$$p = \sum_i p_i = \frac{E}{c} = \frac{5.4 \cdot 10^{24}}{3 \cdot 10^8} = 1.8 \cdot 10^{16} \text{ (kg m/s)}.$$

Kdyby Země všechny sluneční fotony pohltila, pak ze (13.14) dostaneme opět poměrně malou rychlost vzdalování ve srovnání s (13.2),

$$v = \frac{p}{M} = 0.095 \text{ m/yr}.$$

Slapové síly rovněž neumožňují vysvětlit významné vzdalování Země od Slunce. Z předchozí kapitoly 12 víme, že rotace Země se jejich působením zpomaluje. Přitom

⁴Podle (13.1) je celkový výkon Slunce roven $L_{\odot} = 4\pi R^2 L_0 = 3.8 \cdot 10^{26} \text{ W}$, kde $R = 1 \text{ au}$. Odtud a z (13.9) plyne, že $L_{\odot}/M_{\odot} = 0.0002 \text{ W/kg}$. Jaderný reaktor nalézající se jen v několika procentech centrální části Slunce tak má na jednotku hmotnosti mnohem menší výkon než např. lidské tělo, které produkuje cca 100 W.

asi 68.5 % je způsobeno Měsícem a jen 31.5 % Sluncem, viz [35]. Vliv ostatních planet je zanedbatelný. Slapové síly od Slunce na 1 kg Země jsou přibližně rovny $2GM_{\odot}r/R^3$, kde M_{\odot} je hmotnost Slunce (13.9), $R = 1$ au a r poloměr Země. Vidíme, že ubývají s třetí mocninou vzdálenosti Země od Slunce. Odtud lze odvodit, že vzdálenost Země–Slunce narůstá v důsledku slapů jen o několik cm za rok (viz např. [15], s. 606; [192]).

Země se rovněž pohybuje v magnetickém poli Slunce. Protože má železné jádro, generují se v něm Foucaultovy vířivé proudy a Země by tak měla padat na nižší dráhu. To se však nepozoruje (viz předchozí oddíly), protože magnetický potenciál dipólu ubývá jako r^{-2} (zatímco gravitační potenciál jako r^{-1}). Ze stejného důvodu i síla, jež působí mezi magnetickým polem Země a Slunce, nemá na dlouhodobé vzdalování Země od Slunce téměř žádný vliv. Navíc se Slunce přepólovává každých 11 let.

Jarkovského, resp. YORP efekt [15] sice mění dráhu, resp. rotaci malých těles Sluneční soustavy, ale jejich účinek na vzdalování Země od Slunce je rovněž naprosto zanedbatelný [30]. Totéž platí i o meziplanetárním prachu a dalších negravitačních silách.



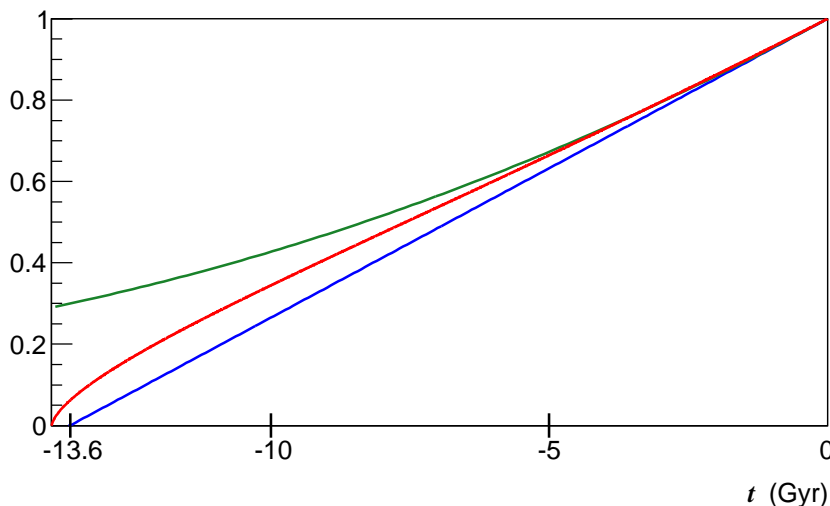
13.7. Proč jiní autoři tvrdí, že se Sluneční soustava nerozpíná

G. A. Krasinsky a V. A. Brumberg [117] odvozují, že vzdálenost Země–Slunce v současnosti narůstá v průměru jen o 15 cm ročně. Jejich argumentace je však založena na nerealistickém předpokladu, že Newtonova teorie gravitace popisuje pohyb těles ve Sluneční soustavě naprosto přesně. Řeší algebraickou soustavu pro 62 neznámých keplerovských parametrů (viz oddíl 3.4) všech planet a některých větších planetek, a přitom vliv malých antigravitačních sil neberou v úvahu. Jinými slovy, implicitně ignorují chybu modelu (ale i diskretizační chybu, zaokrouhlovací chyby, chybu aproximace počátečních podmínek, chybu určení fyzikálních veličin aj.).

Řada autorů (viz např. [39], [45], [176]) tvrdí, že temná energie nemá žádný vliv na rozpínání Sluneční soustavy. Nyní ukážeme, kde se tito autoři dopouštějí chybné argumentace. Hubbleův parametr $H = H(t)$, který popisuje rychlost rozpínání vesmíru, se definuje vztahem

$$H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}, \quad (13.20)$$

kde $a = a(t)$ je expanzní funkce a tečka označuje časovou derivaci. Pokud by například globální model vesmíru měl konstantní kladnou křivost ve všech bodech a ve



Obr. 13.4. Dolní modrý graf odpovídá lineární funkci $1 + H_0 t$ z Taylorova rozvoje (13.22) na intervalu $(-1/H_0, 0)$, kde $1/H_0 = 13.6$ Gyr je Hubbleův čas. Horní zelený graf odpovídá prvním třem členům Taylorova rozvoje $1 + H_0 t - q_0 H_0^2 t^2 / 2$ pro $q_0 = -0.6$. Prostřední červený graf ilustruje předpokládaný průběh normalizované expanzní funkce $a(t)/a(0)$ získané integrací (13.20). Hodnoty na horizontální ose jsou v miliardách let a na vertikální ose jsou bezrozměrná čísla. Vidíme, že zrychlená expanze se jen velice nepatrně odlišuje od lineárního rozpínání během několika posledních miliard let.

všech směrech v daném čase t , pak by hodnota expanzní funkce $a(t)$ byla rovna poloměru vesmíru v čase t (viz např. G. Lemaître [167]). V tomto případě je vesmír modelován trojrozměrným povrchem čtyřrozměrné nafukující se koule (viz oddíl 10.4). Derivováním vztahu (13.20) podle času dostaneme

$$\dot{H} = \frac{\ddot{a}}{a} - H^2 = -qH^2 - H^2, \quad (13.21)$$

kde $q = -\ddot{a}a/\dot{a}^2$ je bezrozměrný decelerační parametr, jenž charakterizuje zpomalování či urychlování expanze vesmíru. Rozvineme-li expanzní funkci $a = a(t)$ do Taylorovy řady v čase $t = 0$, který odpovídá současnosti, obdržíme (viz obr. 13.4)

$$a(t) = a(0) + \dot{a}(0)t + \frac{1}{2}\ddot{a}(0)t^2 + \dots = a(0)(1 + H_0 t - \frac{1}{2}q_0 H_0^2 t^2 + \dots), \quad (13.22)$$

kde $H_0 = H(0)$ a $q_0 = q(0) = -0.6$ je v současné době přijímaná hodnota deceleračního parametru (viz [225], s. 110), která je záporná, protože se expanze vesmíru zrychluje.

M. Carrera a D. Giulini [39], s. 175, správně odvozují, že ve vzdálenosti Pluta (tj. asi 40 au) dává zrychlující se rozpínání vesmíru jen $2 \cdot 10^{-23}$ m/s², což je

vskutku naprosto zanedbatelná hodnota. Podobné zcela nepatrné hodnoty odvozuji i F. I. Cooperstock a kol. [45], s. 62, či B. Mashhoon a kol. [176], s. 5041. Všichni tito autoři se ale soustředili pouze na kvadratický člen v rozvoji (13.22) a neuvažovali velkou hodnotu Hubbleovy konstanty (13.3), která vystupuje u lineárního členu v (13.22). Jinými slovy, zrychlující se rozpínání vesmíru se znatelně neprojevuje na škálách Sluneční soustavy, ale samotné rozpínání ano. Platí totiž

$$|H_0 t| \gg \frac{1}{2} |q_0| H_0^2 t^2$$

pro t blízké 0. Zrychlující se rozpínání dané kvadratickým členem se tak začíná projevovat až v kosmologických vzdálenostech. I přesto je kvadratický člen tak malý, že lineární člen $|H_0 t|$ z (13.22) nad ním v absolutní hodnotě výrazně dominuje nejenom v okolí nuly, protože platí

$$0.3 \cdot |H_0 t| > \frac{1}{2} |q_0| H_0^2 t^2$$

pro všechna t z intervalu $(-1/H_0, 0)$, kde $|q_0|/2 = 0.3$.



13.8. Generování energie systémem Země–Slunce

Extrémně malá odchylka $\varepsilon > 0$ skutečné polohy nějakého tělesa od jeho polohy definované Newtonovou teorií gravitace za jeden rok může způsobit za miliardu let dosti velkou a dobře detekovatelnou chybu velikosti řádově $10^9 \varepsilon$. Tyto odchylky od newtonovské teorie gravitace se vzájemně neruší (jako např. zaokrouhlovací chyby, které mají tendenci se vzájemně anulovat), nýbrž akumulují. Odtud je patrné, proč antigravitace působí i lokálně. Například pro Měsíc je $\varepsilon = 1.71$ cm za rok (viz (12.21)) a pro Zemi $\varepsilon \approx 5$ m za rok (viz (13.2)). Jak jsme mohli vidět a jak ještě ukážeme v dalších kapitolách, Sluneční soustava, ale i jiné soustavy volných těles se s rostoucím časem v průměru „nafukují“. Abychom toto prokázali, musíme umět měřit vzdálenosti velice přesně, jako v případě našeho Měsíce (viz kapitola 12), anebo uvažovat velice dlouhé časové či prostorové škály, kdy se vliv antigravitačních sil nahromadí natolik, že jej lze detekovat.

Významné vzdalování Země od Slunce popsané v oddílech 13.1–13.5 sice nelze vysvětlit pomocí klasické Newtonovy fyziky, ale můžeme podle ní přibližně odhadnout, kolik temné energie se takto vygeneruje za rok. Pro jednoduchost předpokládejme, že Země má kruhovou orbitu o poloměru $R = 1$ au. Z (13.5) a 3. Keplerova zákona $R^3/Y^2 = GM_\odot/4\pi^2$ zjistíme, že celková (tj. kinetická a potenciální) energie Země je rovna

$$E(R) = \frac{1}{2} M \left(\frac{2\pi R}{Y} \right)^2 - \frac{GMM_\odot}{R} = -\frac{GMM_\odot}{2R}, \quad (13.23)$$

kde podle (13.14) a (13.9) hmotnost Země M činí zhruba 6 kvadrilionů kg a hmotnost Slunce M_\odot je 2 kvintiliony kg. Nyní pro $\Delta R = 5.2$ m (srov. (13.2)) dostaneme, že roční spontánní nárůst celkové energie činí odhadem

$$\begin{aligned} E(R + \Delta R) - E(R) &= -\frac{GMM_\odot}{2} \left(\frac{1}{R + \Delta R} - \frac{1}{R} \right) \\ &= \frac{GMM_\odot \Delta R}{2(R + \Delta R)R} = 9.4 \cdot 10^{22} \text{ J}, \end{aligned} \quad (13.24)$$

což je o cca 10 řádů menší hodnota než kinetická energie Země, tj.

$$|E(R)| = \frac{1}{2} M \left(\frac{2\pi R}{Y} \right)^2 = \frac{GMM_\odot}{2R} = 2.69 \cdot 10^{32} \text{ J}.$$

Hodnota (13.24) odpovídá podle (13.5) trvalému výkonu téměř 3000 TW. Na přesun zeměkoule o hmotnosti $5.9736 \cdot 10^{24}$ kg v silném gravitačním poli Slunce jen o pouhých 5 metrů je tedy zapotřebí obrovské množství energie (srov. (13.24)). Pro jiný roční přírůstek ΔR se energie či výkon pouze lineárně přeskálují pomocí trojčlenky.

Vidíme, že odchylka od zákona zachování energie Newtonovy mechaniky se během jednoho roku projeví až na desátém platném desetinném místě. Nemůžeme tedy příliš věřit dlouhodobým simulacím (např. vývoje Sluneční soustavy na stovky milionů let) pomocí Newtonovy teorie gravitace, protože pak je chyba příslušného modelu poměrně velká v důsledku akumulace chyb způsobených antigravitací (srov. oddíl 5.5).



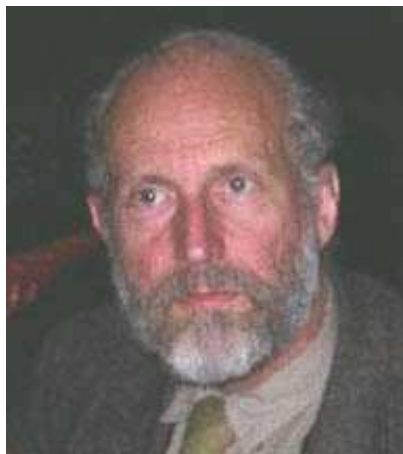
14. Temná energie a antropický princip

O mimozemských civilizacích:
Tak kde k čertu všichni jsou?

ENRICO FERMI

14.1. Antropický princip a kosmologická konstanta

V roce 1973 australský matematik a teoretický fyzik Brandon Carter zavedl termín *antropický princip*¹ [41]. V roce 1986 jej podrobněji rozšířili a propracovali John Barrow a Frank Tipler v monografii *The Anthropic Cosmological Principle* [11]. Slabá formulace tohoto principu tvrdí, že všechny fundamentální fyzikální konstanty mají takové velikosti, že umožnily vznik života. Podle silné formulace směřuje vývoj ke vzniku člověka (v řečtině *anthropos*).



Obr. 14.1. Brandon Carter (*1942)

¹Poprvé jej veřejnosti představil v Krakově na symposiu věnovanému 500. výročí narození Mikuláše Koperníka.

Proti silné formulaci antropického principu lze však namítnout, že kdyby asteroid, který způsobil vyhynutí dinosaurů, minul Zemi, pak by se lidstvo nevyvinulo. Přitom není vyloučeno, že by mohli vzniknout jiní inteligentní tvorové. Přesto je velice překvapivé, že fyzikální konstanty mají právě takové hodnoty, že umožnily vznik a rozvoj života ve vesmíru.

Zde je třeba zdůraznit, že na žádnou fyzikální konstantu nelze nahlížet jako na standardní matematickou konstantu. Například iracionální Ludolfovo číslo $\pi = 3.1415926535\dots$, Eulerovo číslo $e = 2.7182818284\dots$ či $\sqrt{2} = 1.4142135623\dots$ mají nekonečně mnoho nenulových desetinných cifer. Na druhé straně Newtonova gravitační konstanta $G = 6.674 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}$ není reálné číslo s nekonečným desetinným rozvojem. Podle (4.21) je její čtvrtá platná cifra patrně blízka 4, ale další cifry nejsou přesně známy. V budoucnu ani nikdy nebudeme moci určit, jaká je např. miliontá desetinná cifra G , protože fyzikální konstanty mají zcela odlišný charakter než reálná čísla. Na fyzikální konstanty je proto třeba nahlížet jen jako na úzký interval s neostrými rozmazanými hranicemi, popř. jako na hustotu určité distribuční funkce (z teorie pravděpodobnosti).

Newtonův gravitační zákon² představuje jen jistou idealizaci reality. Konstanta G je totiž definována jen čistě teoreticky pomocí dvou hmotných bodů. Žádné hmotné body však ve skutečném vesmíru neexistují. Z tohoto důvodu nikdy nemůžeme změřit či jinak stanovit gravitační konstantu absolutně přesně.

Součin GM , kde M je hmotnost hvězdy, je úměrný jejímu tlaku uvnitř. Hodnota G tak má vliv na centrální teplotu, svítivost hvězdy, její věk a mnoho dalších parametrů. Kdyby G byla např. jen o jednu tisícinu menší, než je její současná hodnota, pak by se všechny hvězdy i galaxie vyvíjely odlišným způsobem a Země by tak nikdy nevznikla.

Totéž platí i pro další fyzikální konstanty, jako je Avagadrova konstanta, Planckova konstanta, bezrozměrná konstanta jemné struktury $\alpha \approx \frac{1}{137}$ atd. Hmotnosti protonu, neutronu a elektronu a velikost jejich vzájemné interakce (slabé, silné a elektromagnetické) jsou velmi jemně vyladěny tak, že mohly vzniknout stabilní atomy, z nichž lze vytvářet složité molekuly (viz obr. 14.3). Jedním z důležitých parametrů antropického principu je také rychlost expanze našeho vesmíru. Kdyby byla příliš velká, hvězdy ani galaxie by nemohly vzniknout. Pokud by byla příliš malá, vesmír by se mohl brzy začít gravitačně hroutit a život by neměl dostatek času pro svůj vznik a rozvoj.

V této kapitole ukážeme, jak kosmologická konstanta $\Lambda \approx 10^{-52} \text{ m}^{-2}$ umožnila „správnou“ lokální expanzi Sluneční soustavy, a tím i vznik a rozvoj života na Zemi.



²Většina živočichů a rostlin umí gravitaci rozpoznat. Například člověk má kromě pěti základních smyslů (zraku, sluchu, čichu, chuti a hmatu) ještě často opomíjený šestý smysl pro rovnováhu umístěný ve středním uchu. Tento smyslový orgán registruje, kam míří vektor tíhového zrychlení.

14.2. Dvojstranné odhady

Paradox mladého horkého Slunce lze dobře vysvětlit pomocí antigravitačních sil, které lokálně generují temnou energii, viz [137]. Podobně jako v oddílu 13.2 budeme nejprve předpokládat, že se během posledních 3.5 miliardy let vzdaluje Země od Slunce konstantní rychlostí

$$\bar{v} = 5.2 \text{ m/yr}, \quad (14.1)$$

což je řádově srovnatelné s Hubbleovou konstantou přepočtenou na délku 1 au (viz (13.3)). Nyní podrobně ukážeme, že \bar{v} je optimální v tom smyslu, že by Země dostávala od Slunce prakticky stejný tok energie, jako je sluneční konstanta L_0 definovaná rovností (13.1) během velice dlouhého časového intervalu 3.5 miliardy let. Speciální rychlosti (14.1) bude odpovídat optimální tok L_{opt} .

Abychom to dokázali (viz věta 14.1 níže), položíme

$$\tau = -3.5 \text{ Gyr}$$

a čas $t = 0$ bude opět odpovídat současnosti. Hlavní výsledky tohoto oddílu budeme formulovat ve tvaru matematických vět, aby bylo jasné, co přesně se předpokládá a co se tvrdí. Symbol $\forall t$ znamená pro všechna t .

Jelikož sluneční luminozita roste přibližně lineárně s časem a na počátku uvažovaného období byla jen 77 % dnešní hodnoty (viz obr. 11.2), definujeme odpovídající lineární funkci toku energie ze Slunce vztahem

$$L(t) = \left(1 - 0.23 \frac{t}{\tau}\right) L_0 \quad \forall t \in [\tau, 0], \quad (14.2)$$

tj. $L(0) = L_0$. Protože tok energie klesá se čtvercem vzdálenosti, lze vyslovit následující dosti překvapivé tvrzení.

Věta 14.1 (optimální rychlost vzdalování Země od Slunce). *Nechť*

$$L_{\text{opt}}(t) = \frac{L(t)R^2}{(R + \bar{v}t)^2}, \quad t \in [\tau, 0], \quad (14.3)$$

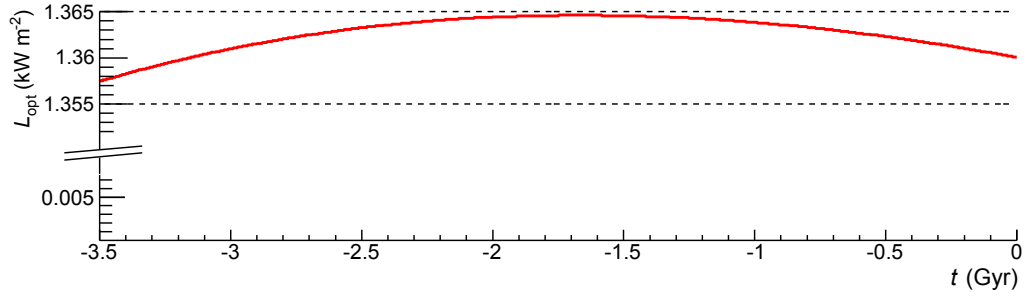
kde $R = 1 \text{ au}$ a \bar{v} je definováno rovností (14.1). Pak

$$|L_{\text{opt}}(t) - 1.36| < 0.005 \text{ (kW m}^{-2}\text{)} \quad \forall t \in [\tau, 0]. \quad (14.4)$$

Důkaz. Extrémně malou odchylku 0.005 kW m^{-2} na pravé straně nerovnosti (14.4) lze snadno odvodit analyticky vyšetřováním průběhu racionální funkce $L_{\text{opt}}(t)$, která je konkávní na celém intervalu $[\tau, 0]$. Příímým výpočtem zjistíme, že minima nabývá v levém krajním bodě τ , $L_{\text{opt}}(\tau) = 1.357387 \dots$ a maxima nabývá funkce L_{opt} v bodě $t^* \approx -1.7 \cdot 10^9 \text{ let}$, $L_{\text{opt}}(t^*) = 1.364574 \dots$ Proto platí dvojstranný odhad (srov. obr. 14.2)

$$1.355 < L_{\text{opt}}(\tau) = \min_{t \in [\tau, 0]} L_{\text{opt}}(t) < \max_{t \in [\tau, 0]} L_{\text{opt}}(t) < 1.365$$

a $L_{\text{opt}}(0) = L_0$. □



Obr. 14.2. Průběh téměř konstantní funkce $t \mapsto L_{\text{opt}}(t)$ na intervalu $[\tau, 0]$. Svislá osa je pro přehlednost podstatně zkrácena.

Tok sluneční energie

$$1.36 \pm 0.005 \text{ kW m}^{-2} \quad \forall t \in [\tau, 0]$$

by jistě zaručoval velice stabilní podmínky (14.4) pro rozvoj inteligentního života na Zemi během extrémně dlouhého časového intervalu 3.5 Gyr. Zdá se tedy, že temná energie má lokálně ve Sluneční soustavě správnou velikost, že dlouhodobě zaručovala téměř konstantní tok sluneční energie na Zemi a přispěla tak ke vzniku lidstva.

Temná energie daná kosmologickou konstantou tak představuje další argument pro podporu slabého antropického principu. Jinými slovy, základní fyzikální konstanty mají vhodnou velikost vedoucí ke vzniku života pouze tehdy, když jejich hodnoty leží uvnitř velice úzkých intervalů [137]. Navíc rychlost v (14.1) je optimální v tom smyslu, že jakákoliv mírně odlišná rychlost vzdalování by nedávala téměř konstantní tok energie vyjádřený racionální funkcí (14.3) na intervalu dlouhém 3.5 miliardy let. Zdá se být proto velice pravděpodobné, že skutečná rychlost vzdalování Země od Slunce kolísala (viz věty 14.2 a 14.3) kolem optimální hodnoty 5.2 m/yr např. v důsledku působení dalších planet. Existují totiž důkazy podporující hypotézu, že Země během své historie byla několikrát „sněhovou koulí“ (viz [70], s. 58) a jindy zase byla teplota v oceánech mnohem vyšší než dnes [169]. Přitom nezanedbatelnou roli jistě hrálo složení atmosféry a skleníkový efekt.

Úbytek sluneční svítivosti o několik málo procent způsoboval v minulosti doby ledové. Pokles větší než 5 % by přivodil totální zalednění celé planety. Jak již bylo řečeno v oddílu 13.2, snížení nebo nárůst sluneční konstanty L_0 o 5 % odpovídá mezikruží, jemuž se obvykle říká *ekosféra* a má poloměry $(0.95)^{1/2}$ au a $(1.05)^{1/2}$ au, které představují velice úzký interval 145.8–153.3 milionu km od Slunce (viz obr. 13.2).

Pro spojitě proměnnou rychlost vzdalování v na intervalu $[\tau, 0]$ definujeme podobně jako v (14.3) odpovídající tok energie

$$\mathcal{L}(v, t) = \frac{L(t)R^2}{\left(R - \int_t^0 v(\theta) d\theta\right)^2}, \quad t \in [\tau, 0], \quad (14.5)$$

kde $\tau = -3.5$ Gyr, $R = 1$ au, $L(t)$ je dáno vztahem (14.2) a integrál z rychlosti udává vzdálenost.

V případě, že neumíme přesně stanovit velikost nějaké veličiny, mohou být velice prospěšné tzv. *dvojstranné odhady* (viz např. [155]).

Věta 14.2 (dvojstranný odhad). *Leží-li rychlost vzdalování $v = v(t)$ Země od Slunce v intervalu od 4.26 m/yr do 6.14 m/yr pro každé $t \in [\tau, 0]$, pak se tok energie definovaný vztahem (14.5) mění nejvýše o 5 % hodnoty L_0 , tj.*

$$0.95L_0 \leq \mathcal{L}(v, t) \leq 1.05L_0 \quad \forall t \in [\tau, 0].$$

D ů k a z. Prímým výpočtem zjistíme, že pro konstantní rychlost $v_1 \equiv 4.26$ m/yr je racionální funkce $t \mapsto \mathcal{L}(v_1, t)$ rostoucí na $[\tau, 0]$, a tak podle (14.5) máme

$$0.95L_0 = \frac{L(\tau)R^2}{(R + v_1\tau)^2} = \mathcal{L}(v_1, \tau) \leq \frac{L(t)R^2}{(R + v_1t)^2} = \mathcal{L}(v_1, t) \quad (14.6)$$

pro každé $t \in [\tau, 0]$. Podobně pro konstantní rychlost $v_2 \equiv 6.14$ m/yr zjistíme, že funkce $t \mapsto \mathcal{L}(v_2, t)$ je klesající, a proto

$$\mathcal{L}(v_2, t) \leq \mathcal{L}(v_2, \tau) = \frac{L(\tau)R^2}{(R + v_2\tau)^2} = 1.05L_0. \quad (14.7)$$

Dáme-li nerovnosti (14.6) a (14.7) dohromady, pak pomocí (14.5) a předpokládaných odhadů $4.26 \leq v(t) \leq 6.14$ pro každé $t \in [\tau, 0]$ dostaneme

$$0.95L_0 \leq \frac{L(t)R^2}{(R + 4.26t)^2} \leq \frac{L(t)R^2}{\left(R - \int_t^0 v(\theta)d\theta\right)^2} \leq \frac{L(t)R^2}{(R + 6.14t)^2} \leq 1.05L_0. \quad \square$$

Důležitější je ale obrácené tvrzení. Má poněkud silnější předpoklady na rychlost.

Věta 14.3 (doplňkový dvojstranný odhad). *Jestliže průměrná rychlost vzdalování \bar{v} leží mimo interval $[4.26, 6.14]$ m/yr, potom existuje neprázdný podinterval $I \subset [\tau, 0]$ tak, že tok energie $\mathcal{L}(\bar{v}, t)$ je menší než 95 % nebo větší než 105 % hodnoty L_0 pro všechna $t \in I$.*

D ů k a z. Jestliže $\bar{v} < v_1 \equiv 4.26$ m/yr, pak podobně jako v (14.6) zjistíme, že

$$\mathcal{L}(\bar{v}, \tau) = \frac{L(\tau)R^2}{(R + \bar{v}\tau)^2} < \frac{L(\tau)R^2}{(R + v_1\tau)^2} = \mathcal{L}(v_1, \tau) = 0.95L_0.$$

Ze spojitosti racionální funkce $t \mapsto \mathcal{L}(\bar{v}, t)$ plyne existence neprázdného časového intervalu I_1 tak, že $\mathcal{L}(\bar{v}, t) < 0.95L_0$ pro všechna $t \in I_1$.

Analogicky lze pomocí (14.7) odvodit, že pro $\bar{v} > v_2 \equiv 6.14$ m/yr existuje neprázdný interval $I_2 \subset [\tau, 0]$ tak, že $\mathcal{L}(\bar{v}, t) > 1.05L_0$ pro všechna $t \in I_2$. \square

Průměrná rychlost \bar{v} ležící mimo interval $[4.26, 6.14]$ m/yr tedy odpovídá vskutku nehostinným podmínkám pro evoluci života do mnohobuněčných forem. Na Zemi by byl buď příliš silný mráz, nebo naopak obrovské horko, protože by se hodnota sluneční konstanty v nějakém období lišila o více než 5 % od své současné hodnoty L_0 . Předchozí dvě věty lze navíc snadno modifikovat i pro jiné hodnoty než právě 5 %.

Ještě poznamenejme, že lineární funkce $L(t) = (1 - 0.23t/\tau)L_0$ z (14.2) a obr. 11.2 se v některých modelech nahrazuje racionální funkcí (viz např. [15], s. 177)

$$\hat{L}(t) = \frac{L_0}{1 + 0.3t/\tau_0}, \quad t \in [\tau, 0],$$

kde $\tau_0 = -4.5$ Gyr. V tomto případě je optimální průměrná rychlost vzdalování Země od Slunce (zaručující téměř konstantní tok sluneční energie) rovna

$$\bar{v} = 4.36 \text{ m/yr}$$

a průměrná rychlost vzdalování by měla být v intervalu $[3.27, 5.21]$ m/yr, abychom zaručili, že odchylky od sluneční konstanty budou menší než 5 % podobně jako ve větách 14.2 a 14.3.

Podle [4], s. 218, se vesmír v důsledku temné energie rozpíná exponenciální rychlostí. Z obr. 8.7 je patrné, že Hubbleův parametr $H = H(t)$ je téměř konstantní během posledních 4.5 miliardy let, kdy existuje Sluneční soustava. Leží v intervalu $[H_0, \frac{5}{4}H_0]$. Za předpokladu, že by $H(t)$ bylo konstantní, tj. $H(t) \equiv H_0$, dostaneme ze vztahu (10.3), že $a(t) \approx a(0) \exp(H_0 t)$. Větu 14.1 lze modifikovat pro případnou exponenciální expanzi následovně. Pokud by průměrná rychlost vzdalování Země od Slunce byla $\bar{v} = 5.014$ m/yr, pak $L_{\text{opt}}(t) = 1.36 \pm 0.008 \text{ kW m}^{-2}$ pro všechna $t \in [\tau, 0]$, což je rovněž dosti podobné (14.1) a (14.4). Věty 14.2 a 14.3 by se také příliš nezměnily. Navíc z obr. 13.4 je patrné, že expanzní funkce $a = a(t)$ je během posledních 4.5 miliardy let téměř lineární. Proto rozpínání dané vztahem (14.5) lépe aproximuje skutečnost než expanze exponenciální propagovaná v [4].



14.3. Ochrání temná energie Zemi před rozpínajícím se Sluncem?

Předpoklady věty 14.3 nezaručují vhodné podmínky pro rozvoj života na Zemi. Z vět 14.2 a 14.3 lze dovodit, že nejpravděpodobnější rychlost expanze poloměru zemské dráhy leží v intervalu

$$H_0^{(\text{loc})} \in [0.426 H_0, 0.614 H_0].$$

Taková dlouhodobá lokální expanze je tedy temnou energií perfektně naladěná (viz [137]).

Jemně vyladěné tedy nemusí být jen základní fyzikální konstanty. Například průměrná povrchová teplota Slunce $T = 5770$ K je rovněž perfektně nastavená. Kdyby klesla o 1 %, tj. o pouhých 57.7°C , pak podle Stefanova–Boltzmannova zákona $L_0 = \sigma T^4$ s konstantou $\sigma > 0$ by sluneční konstanta L_0 klesla cca o 4 %, neboť $0.99^4 L_0 \approx 0.96 L_0$. Celková luminozita Slunce by pak také klesla o 4 %.

Často se tvrdí, že za půl miliardy let se voda v oceánech vypaří, protože výkon Slunce příliš stoupne³ (viz obr. 11.2). Rychlost (14.1) by nám ale zaručovala velice stabilní podmínky na Zemi po několik následujících miliard let. Pokud by se například tok sluneční energie vyvíjel tak, jak je dáno v (14.3), pak by ležel ve velice příznivém intervalu $1.33\text{--}1.36\text{ kW m}^{-2}$ v průběhu následujících 3.5 miliardy let. Funkce $t \mapsto L_{\text{opt}}(t)$ je totiž klesající v intervalu $[0, |\tau|]$ a ze vztahů (14.2) a (14.3) okamžitě plyne, že

$$L_{\text{opt}}(|\tau|) = 1.33\text{ kW m}^{-2}.$$

To by byly docela slušné vyhlídky do hodně vzdálené budoucnosti a život na Zemi by tak měl šanci se ještě dlouhodobě rozvíjet ve velice stabilních podmínkách.

Na druhé straně, temná energie a snížení atmosférického tlaku na Marsu způsobily, že Mars svou ekosféru opustil.⁴ Není proto vyloučeno, že se Mars mohl v důsledku antigravitace vzdalovat od Slunce rychleji, než se rozpínala ekosféra kolem jeho dráhy v důsledku rostoucího slunečního výkonu.

Až se za 5 miliard let vyčerpají v centrální oblasti Slunce zásoby vodíku, začne se Slunce měnit na červeného obra. Jeho poloměr by měl sahat až za současnou dráhu Venuše. Tehdy může být Země vzdálena od Slunce již kolem 180 milionů kilometrů, pokud by se vzdalovala rychlostí (14.1). Antigravitace tak může Zemi udržet v dostatečné vzdálenosti od narůstajícího Slunce.

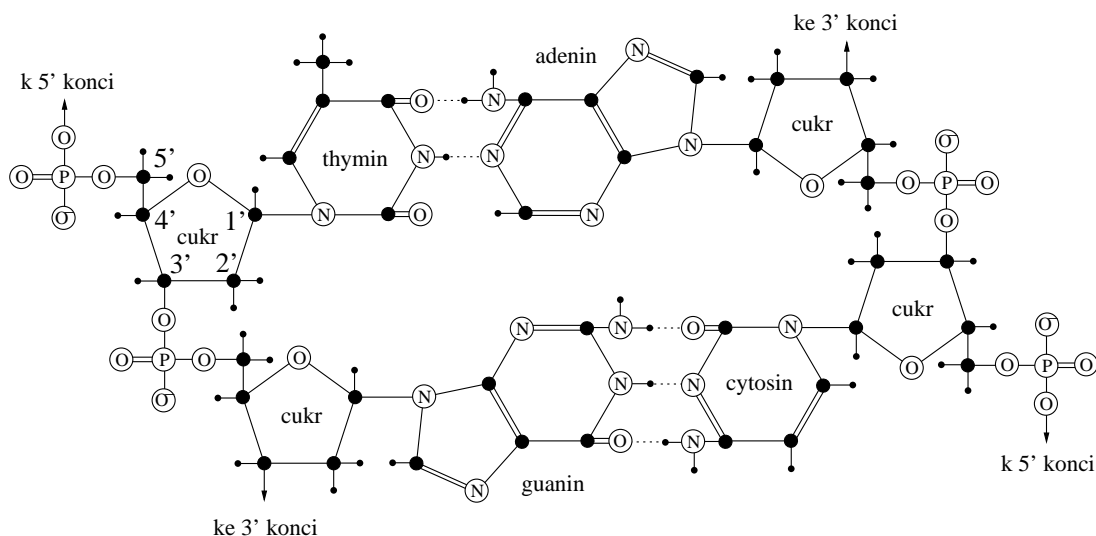


14.4. Pravděpodobnost vzniku života

Ve srovnání s nejstaršími hvězdami v naší Galaxii, jejichž věk se odhaduje na více než 13 miliard let, je Slunce relativně mladé. Na některých exoplanetách v obyvatelné zóně Mléčné dráhy tak měla příroda mnohem více času na experimenty, z nichž mohl vzniknout život. Předpokládá se, že inteligentní civilizace by mohla během několika

³Podle [238], s. 461, stoupne luminozita Slunce za 3 miliardy let na $1.33 L_\odot$. Za půl miliardy let tak může přesáhnout $1.05 L_\odot$.

⁴Představy o tom, že skleníkovým efektem snadno zařídíme na povrchu Marsu vhodné teplotní podmínky pro lidstvo jsou zatím asi příliš optimistické. Navíc je na Marsu v důsledku jeho slabého magnetického pole mnohonásobně vyšší úroveň kosmické radiace než na Zemi.



Obr. 14.3. Schematické znázornění struktury dvojšroubovice DNA: velké černé puntíky označují atomy uhlíku, malé puntíky atomy vodíku, plnou čarou jsou vyznačeny pevné chemické kovalentní vazby a přerušovanou čarou vodíkové můstky, které představují poměrně slabou vazbu mezi vodíkem a elektronovými orbitály sousedního atomu kyslíku O či dusíku N. Na obou okrajích je pevná kostra z cukerných fosfátů, která chrání genetickou informaci před poškozením. V ní se střídá fosfátová skupina PO_4 s cukrem deoxyribózou.

složitá bílkovina (známá z nemoci šílených krav), která neobsahuje nukleové kyseliny ani jimi není kódována. Rozmnožuje se tím, že mění podobné bílkoviny v nějakém organismu na sebe sama. Není proto vyloučeno, že podobné bílkoviny mohly stát na samém počátku života na naší planetě dříve, než se objevila RNA. Zhruba miliardu let po vzniku RNA se vyvinula DNA. Darwinova evoluční teorie o vzniku druhů přírodním výběrem v konkurenčním prostředí pak vysvětluje, jak počala dnešní vyspělá lidská civilizace.



15. Rozpínání Sluneční soustavy

*Představivost je mnohem
důležitější než znalosti.*

ALBERT EINSTEIN

15.1. Rychlé měsíce planet

V této kapitole uvedeme řadu příkladů naznačujících, že se pozvolné rozpínání projevuje i u dalších systémů ve Sluneční soustavě, což zřejmě odporuje klasickému zákonu zachování energie. Na základě předkládaných argumentů můžeme opět dojít k závěru, že se antigravitace patrně významně podílela na rozmístění dnešních trajektorií planet a jejich měsíců.



Obr. 15.1. Rychlý měsíček Phobos o rozměrech $27 \times 22 \times 19$ km oběhne Mars jednou za 7.65 hodiny, zatímco Mars se otočí kolem své osy jednou za 24.62 hodiny. Největší kráter Stickney o průměru 9 km se nalézá vpravo (foto NASA).

Dosud bylo ve Sluneční soustavě objeveno 19 měsíců Marsu, Jupiteru, Uranu a Neptunu, které obíhají pod tzv. *stacionární kruhovou dráhou* (*orbitou*), pro niž je doba oběhu tělesa kolem planety shodná s dobou jeho rotace kolem vlastní osy. Podle 3. Keplerova zákona (4.4) je poloměr stacionární dráhy roven

$$r_i = \left(\frac{Gm_i P_i^2}{4\pi^2} \right)^{1/3}, \quad (15.1)$$

kde m_i je hmotnost i -té planety a P_i je její siderická rotační perioda. Měsíce pod stacionární dráhou nazveme *rychlé*, protože jejich perioda oběhu je menší než P_i (viz obr. 15.1). Ze statistického hlediska je značně nepravděpodobné, že by všechny tyto měsíce byly zachycené, protože vesměs obíhají stejným směrem po kruhových drahách a jejich inklinace je téměř nulová. Z tohoto důvodu většina z nich obíhá své mateřské planety patrně už 4.5 miliardy let, i když mohly být kdysi součástí větších později rozpadlých těles.

Podle zákonů klasické mechaniky nutí slapové síly rychlé měsíce padat po spirále na nižší oběžné dráhy. Jejich rychlost se zvyšuje, jejich potenciální energie klesá a nepatrně se tak urychluje rotace mateřské planety, aby byl zachován celkový moment hybnosti. Podle [15], s. 96, jsou slapové síly na 1 kg měsíce úměrné m_i/r^3 , kde r je poloměr dráhy uvažovaného měsíce a $r < r_i$. Všimněme si, že podíl m_i/r^3 je stejného řádu pro všech 19 známých rychlých měsíců (viz poslední sloupec tabulky 15.1). V oddílu 15.4 odvodíme, že se měsíček Phobos (viz obr. 15.1) přibližuje k Marsu průměrnou rychlostí 1.9 cm za rok. Kdybychom tedy připustili, že se podobnou rychlostí 1–2 cm za rok přibližují i ostatní rychlé měsíce na nižších drahách (některé jsou větší než Phobos, jiné menší), pak by se za 4.5 miliardy let přiblížily o 45 000–90 000 km ke svým mateřským planetám. To ale není v souladu s poloměrem stacionární dráhy Uranu

$$r_7 = 82\,684 \text{ km}$$

a Neptunu

$$r_8 = 83\,512 \text{ km},$$

protože tyto dvě planety mají všechny rychlé měsíce na dosti vysokých orbitách 48 227–76 400 km (srov. též předposlední sloupec tabulky 15.1). Navíc poloměry stacionárních drah (15.1) byly v minulosti menší, protože planety rotovaly rychleji, tj. P_i bylo kdysi menší. Není vyloučeno, že rychlé měsíce udržuje na vysokých orbitách antigravitace, která působí proti slapovým silám.



15.2. Kde byla Larissa před miliardami let?

Měsíček Larissa obíhá Neptun ve vzdálenosti

$$d = 73\,548 \text{ km},$$

což je hodnota velice blízká poloměru stacionární dráhy r_8 . Neptun se otočí kolem své osy za 16.11 hodiny a Larissa jej oběhne za 13.32 hodiny. Rotaci Neptunu brzdí hlavně velký měsíc Triton, a tak před miliardami let bylo r_8 menší podle (15.1). Není tedy vůbec jasné, kde se Larissa tehdy nacházela, když se podle zákonů klasické mechaniky k Neptunu neustále přibližuje. Kdyby někdy byla nad stacionární dráhou,

Tabulka 15.1. Rychlé měsíce planet ve Sluneční soustavě. Symbol i označuje pořadové číslo planety, m_i je hmotnost planety v kg dělená 10^{24} , r_i je poloměr stacionární dráhy (15.1) v km, r je poloměr dráhy měsíce v km a odpovídající hodnoty m_i/r^3 úměrné slapovým silám na 1 kg hmotnosti měsíce jsou v kg/m^3 .

i	planeta	m_i	r_i	rychlý měsíc	r	r/r_i	m_i/r^3
4	Mars	0.64185	20 429	Phobos	9 377	0.459	778.6
5	Jupiter	1898.6	160 020	Metis	127 690	0.798	911.9
				Adrastea	129 690	0.810	870.4
7	Uran	86.81	82 684	Cordelia	49 770	0.602	704.3
				Ophelia	53 790	0.651	557.9
				Bianca	59 170	0.716	419.1
				Cressida	61 780	0.747	368.2
				Desdemona	62 680	0.758	352.6
				Juliet	64 350	0.778	325.9
				Portia	66 090	0.799	300.8
				Rosalind	69 940	0.846	253.8
				Cupid	74 800	0.905	207.5
				Belinda	75 260	0.910	203.7
				Pertida	76 400	0.924	194.7
8	Neptun	102.43	83 512	Naiad	48 227	0.577	913.2
				Thalassa	50 074	0.600	815.8
				Despina	52 526	0.629	706.8
				Galatea	61 953	0.742	430.8
				Larissa	73 548	0.881	257.5

tak by se od Neptunu vzdalovala. Její postupný pád opět pravděpodobně zpomaluje antigravitace, která svými odpudivými účinky působí v opačném směru a Larissu vlastně „nadrnsí“. V tomto případě se zdá, že účinek slapových sil je stejného řádu jako sil antigravitačních, které však mají opačné znaménko. Například Hubbleova konstanta (viz (11.2))

$$H_0 \approx 10 \text{ m yr}^{-1} \text{ au}^{-1} \quad (15.2)$$

přepočtená na vzdálenost d Larissy od Neptunu je

$$H_0 \approx 0.5 \text{ cm yr}^{-1} d^{-1},$$

což je hodnota skutečně srovnatelná s působením slapů. U našeho Měsíce je také účinek antigravitačních sil přibližně stejného řádu jako účinek slapů (srov. (12.20) a (12.21)).

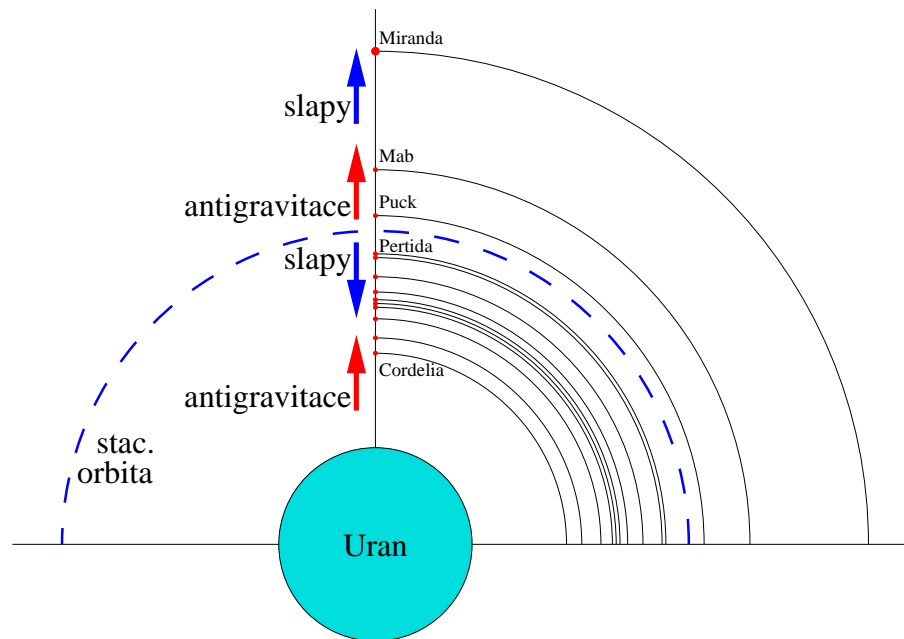
Podobnou úvahu jako pro Larissu by šlo udělat i pro měsíčky Uranu Pertidu a Belindu. Uran má ale rotační osu téměř v rovině ekliptiky v důsledku nějaké davné kolize, u níž není známo, kdy k ní došlo.



15.3. Měsíčky Uranu

Uveďme další argument podporující hypotézu existence antigravitačních sil generujících skrytou energii ve Sluneční soustavě. Průměrná vzdálenost sousedních měsíců pod stacionární dráhou Uranu je jen 2 663 km. Nad stacionární dráhou se vzdálenosti sousedů skokem zvětší (srov. obr. 15.2). Měsíček Puck má poloměr dráhy 86 010 km, následuje Mab s 97 700 km a Miranda s 129 390 km. Ptáte se proč? Odpověď je nasnadě. Pro rychlé měsíce se účinky slapových a antigravitačních sil vzájemně odečítají, zatímco pro měsíce nad stacionární dráhou se sčítají. Je tedy možné, že se měsíčky Puck, Mab a Miranda vzdalují od Uranu také působením antigravitace (viz obr. 15.2).

Na obr. 15.2 si ještě všimněme, že měsíček Pertida se nachází těsně pod stacionární dráhou a měsíček Puck těsně nad stacionární dráhou. Vzdálenost jejich drah je jen 9 610 km. Proč je za 4.5 miliardy let slapové síly neodsunuly dále od sebe? Na vině může být opět antigravitace, která postupně tlačí všechny měsíčky nad stacionární dráhu. Není proto vyloučeno, že měsíček Puck, popř. i Mab, byl kdysi pod stacionární dráhou Uranu a antigravitační síly jej vytlačily nad ni, protože slapové síly poblíž stacionární dráhy jsou malé. A tak za necelou miliardu let by mohla i Pertida obíhat nad stacionární dráhou, pokud bude rychlost jejího vzdalování řádově 1 cm/yr.



Obr. 15.2. Rychlé měsíce Uranu z tab. 15.1 a jejich sousedé nad stacionární orbitou. Působení slapových a antigravitačních sil se pod touto orbitou odečítá a nad ní sčítá. Vzdálenosti měsíků nad stacionární dráhou jsou tak podstatně větší než pod ní.

Analogické úvahy lze učinit i pro oběžnice Neptunu, kde nad stacionární dráhou je předběžně pojmenovaný měsíček S/2004 N1, jehož orbita má poloměr 105 283 km, za ním následuje Proteus s poloměrem orbity 117 646 km.



15.4. Padající Phobos

Phobos (někdy též nazývaný Fobos) je kromě našeho Měsíce nejvíce studovaným měsícem ve Sluneční soustavě, protože má rychle se měnící dobu oběhu. V důsledku slapových sil se neustále přibližuje po spirále k Marsu, jeho orbitální rychlost (cca 2.13 km/s) postupně narůstá a také nepatrně urychluje rotaci Marsu. Jeho úhlová oběžná rychlost je více než 3krát větší a ve stejném směru, než je rotace Marsu kolem vlastní osy.

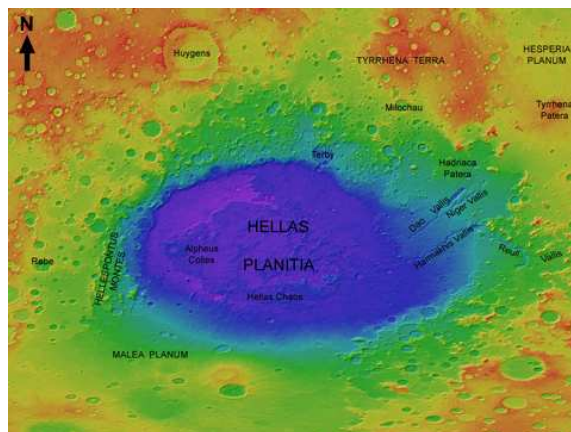
Phobos by měl Mars obíhat již poměrně dlouho, protože jeho dráha je téměř kruhová a její rovina je kolmá na rotační osu Marsu. Navíc Phobos směřuje stále k Marsu svou nejdelší osou.

Mars má poloměr 3 390 km. Poloměr dráhy Phobosu je

$$a = 9377 \text{ km}, \quad (15.3)$$

a tak obíhá nad povrchem Marsu ve vzdálenosti pouhých 5 987 km, což je nejméně ze všech měsíců ve Sluneční soustavě. Je velkou záhadou, jak se Phobos na tuto dráhu dostal (jen cca 11 000 km pod stacionární dráhou). Protože kolem Marsu neobíhají žádná velká tělesa, samotný Mars nemohl svým gravitačním polem Phobos zachytit.

Nabízí se tedy možnost, že Phobos byl součástí dvojplanetky, jejíž lehčí složka během přiblížení k Marsu opustila gravitační pole Marsu. Pak by ale měl Phobos eliptickou dráhu patrně s velkou excentricitou a blízko ekliptiky, kde se pohybuje většina asteroidů [229]. Podlouhlá eliptická dráha by se ale jen obtížně vešla pod velice nízkou stacionární orbitu o poloměru 20 429 km. Phobos by se pak těžko mohl dostat na téměř kruhovou dráhu s inklinací 1° k rovině rovníku Marsu. Poznamenejme, že sklon rovníku Marsu k jeho oběžné dráze je 25.19° (tj. je podobný jako pro Zemi 23.45°).



Obr. 15.3. Velká prohlubeň Hellas Planitia na Marsu je impaktního původu. Má průměr přes 2 000 km, hloubku až 8.2 km a stáří kolem 4 miliard let (foto NASA).

Další, pravděpodobnější možností je, že Phobos vznikl akrecí úlomků (podobně jako náš Měsíc) po dopadu velkého tělesa na povrch Marsu (viz např. obr. 15.3). Veškeré velké krátery a prohlubně na Marsu jsou velice staré a i Phobos má zhruba 4 miliardy let starý povrch posetý krátery. Jeho dráhu v minulosti tak jistě měnila dopadající tělesa (viz obr. 15.1), slapy a též antigravitace. Zdá se tedy, že Phobos mohl obíhat Mars již před miliardami let a měl tak dostatek času, aby zaujal svoji současnou kruhovou dráhu.

Původní odhady odvozené z předpokládaných účinků slapových sil dávaly odhady rychlosti přiblížování Phobosu k Marsu přes 5 cm za rok. Milan Burša [33] odvozuje hodnotu 2.68 cm za rok. Tato hodnota se však dále snižovala na současně akceptovanou hodnotu

$$\dot{a} = -1.9 \text{ cm/yr}, \quad (15.4)$$

kde tečka označuje časovou derivaci.

Podívejme se nyní podrobněji, jak lze tuto rychlost odvodit. Polohy Phobosu se od roku jeho objevu v roce 1877 (viz oddíl 4.5) pečlivě sledují — srov. přehledový článek [189]. Za tu dobu oběhl Phobos Mars už více než 150 000krát. Odtud lze velice přesně stanovit současnou úhlovou rychlost rotace (též tzv. střední pohyb, protože Phobos má vázanou rotaci). Za den Phobos urazí úhel 1128.844407° a za siderický rok ($= 365.25636$ dne)

$$\omega = 412\,317.5991^\circ \text{ yr}^{-1}. \quad (15.5)$$

Určit časovou derivaci $\dot{\omega}$ je ale mnohem méně přesné a navíc tyto odhady neustále klesají. Například v roce 1945 se věřilo, že $\dot{\omega} = 0.001882^\circ \text{ yr}^{-2}$ (viz [98], s. 674). V roce 1989 M. Burša [33] uvádí, že Phobos se za století urychlil o 17.7° , tj. $\dot{\omega} = 0.00177^\circ \text{ yr}^{-2}$. V roce 2010 se R. A. Jacobson [98] přiklání k ještě menší hodnotě

$$\dot{\omega} = 0.00127^\circ \text{ yr}^{-2}. \quad (15.6)$$

Podle 3. Keplerova zákona je a^3/T^2 konstantní. Tedy

$$3a^2\dot{a}T^2 - 2T\dot{T}a^3 = 0,$$

kde perioda T splňuje rovnost

$$\omega = \frac{360^\circ}{T}.$$

Odtud plyne, že $\dot{\omega}T = -\dot{T}\omega$, a tak dosazením z (15.3), (15.5) a (15.6) dostaneme (srov. (13.17))

$$\dot{a} = \frac{2a\dot{T}}{3T} = -\frac{2a\dot{\omega}}{3\omega} = -1.9 \text{ cm/yr}.$$

Phobos se tedy k Marsu přibližuje, protože je na příliš nízké orbitě, kde slapové síly, které přibývají se třetí mocninou vzdálenosti, již začínají převládat nad anti-gravitací. Planetologové odhadují, že přibližně za 30–80 miliónů let by Phobos měl dopadnout na povrch Marsu nebo by jej měly slapové síly roztrhat, jakmile se ocitne pod tzv. Rocheovou mezí [108]. Uvažované newtonovské modely dávají přesto mnohakilometrovou odchylku od pozorované polohy Phobosu (viz např. [16], [98], [194]). Na vině může být opět nezahrnutí účinků antigravitace.

Již nyní se plánuje umístit na marsovský měsíček Phobos zařízení schopné detekovat laserový signál vyslaný ze Země pro určování změn vzájemné vzdálenosti s přesností na milimetry [277].



15.5. Opožd'ující se Neptun

Dalším tajemstvím je, jak se mohl obrovský Neptun zformovat v dosti velké vzdálenosti $R=30$ au od Slunce, kde jsou pohyby těles vesměs velice pomalé (viz [15], s. 534) a kde byl původní plynňý disk velice řídký. Aby Neptun dosáhl hmotnosti kolem 10^{26} kg v průběhu prvních 100 milionů let, musel by každou sekundu nabírat v průměru 30 miliard kg materiálu ve velice řídkém prostředí.

Pokud bychom uvažovali například jen poloviční rychlost rozpínání z (15.2) podobně jako v kapitole 12, 13 a 14, pak Neptun mohl vzniknout před $t = 4.5$ miliardami let o několik astronomických jednotek blíže Slunci na dráze o poloměru r . Vzhledem ke vztahu (10.3) lze předpokládat exponenciální expanzi $R = r \exp(\frac{1}{2}H_0 t)$. Odtud a z (15.2) vyplývá, že

$$r = R \exp(-\frac{1}{2}H_0 t) = R \exp\left(-\frac{5 \cdot 4.5 \cdot 10^9}{150 \cdot 10^9}\right) = R e^{-0.15} = 25.82 \text{ au}.$$

Kdyby expanze byla lineární, dostali bychom velice podobnou hodnotu $r = 25.5$ au.

Pro nepatrný nárůst vzdálenosti ΔR za jeden oběh Neptunu kolem Slunce dostaneme podle 3. Keplerova zákona

$$\frac{(R + \Delta R)^3}{(P + \Delta P)^2} = \frac{R^3}{P^2},$$

kde ΔP je odpovídající nárůst oběžné doby $P = 164.79$ roku. Roznásobením a zanedbáním členů vyššího řádu v ΔP a ΔR zjistíme podobně jako v (13.17), že

$$\frac{2\Delta P}{P} \approx \frac{3\Delta R}{R}. \quad (15.7)$$

Pokud budeme opět uvažovat jen poloviční rychlost z (15.2), potom ze (15.7) dostaneme, že se Neptun za jeden oběh kolem Slunce zpozdí o zcela nepatrný úhel $\alpha \approx \tan \alpha$,

$$\alpha \approx \frac{\Delta P}{P} \frac{2\pi R}{P} = \frac{2\pi \Delta P}{P} \approx \frac{3\pi \Delta R}{R} = 0.01'', \quad (15.8)$$

kde $\Delta R = RP \cdot 5 \text{ m yr}^{-1} \text{ au}^{-1} = 24\,718.5 \text{ m}$. Takový drobný nevysvětlený posun (15.8) bohužel nemůžeme potvrdit pomocí Galileova ručně zakresleného pozorování Neptunu [113] z roku 1612 (viz též M. L. Lalande (1795)), ale moderními prostředky lze mírné zpoždění Neptunu stejného řádu pozorovat [259] (viz též [219]). Pro porovnání uveďme, že úhlový průměr Neptunu je $2.3''$.

Původně se astronomové domnívali, že zpožd'ování je zapříčiněno další vnější planetou, která ovšem nebyla nalezena. Hmotnost Pluta se ukázala být příliš malá na to, aby takto měnila dráhu Neptunu. Na přelomu 19. a 20. století se obě tělesa k sobě přiblížila na vzdálenost cca 15 au (srov. obr. 4.5). Když pak Clyde Tombaugh

v roce 1930 (na základě výpočtu P. Lowella z roku 1915) objevil Pluto, byl od něj Neptun vzdálen již 30 au. Na tak velkých vzdálenostech je gravitační vliv Pluta vskutku zanedbatelný.

Jinou možností pozvolného vzdalování Neptunu od Slunce po spirální dráze je působení antigravitačních sil. Vztah (15.8) vlastně ukazuje, o jak nesmírně malé efekty se jedná na krátkých časových intervalech (viz též (12.21)).

Migraci Neptunu a dalších planet se pokouší vysvětlit pomocí různých rezonancí i populární newtonovský Nice model (vytvořený na univerzitě ve francouzském městě Nice). Model předpovídá, že Uran a Neptun migrovaly před miliardami let směrem od Slunce a navíc si prohodily své dráhy. Aby zůstala zachována celková energie soustavy při migraci, posunul se těžký Jupiter blíže ke Slunci (viz např. [276], s. 435). Tento scénář má ale řadu nedostatků. Uvedme jen ty nejpodstatnější:

a) Je známo, že klasický problém N těles má jediné globální řešení pro dané počáteční podmínky, pokud tato tělesa nekolidují. Autoři [276] ovšem neprokázali, že zpětná integrace ze současného stavu do dávné minulosti po miliardách let způsobí prohození Uranu a Neptunu a že dostaneme výchozí počáteční podmínky, abychom se mohli přesvědčit, že Nice model není špatně. K tomu lze použít větu 5.1.

b) Řešení klasického problému N těles je l'apunovsky nestabilní. Jinými slovy, extrémně malé změny počátečních podmínek způsobují po miliardách let obrovskou chybu konečného stavu. Dlouhodobá numerická integrace tak není oprávněná.

c) Předpokládá se absolutní platnost Newtonovy teorie gravitace na intervalu dlouhém 4.5 miliardy let. Ignoruje se vliv temné energie, konečné rychlosti šíření gravitační interakce, chyba modelu apod.

d) Nemá vysvětleno, jak mohly přežít prohození Uranu a Neptunu jejich bohaté rodiny měsíců.

e) Neprovádí se žádná analýza numerických ani jiných chyb, které vznikají během simulace. Numerická chyba roste exponenciálně [281].

Rezonance samozřejmě hrály důležitou roli ve vývoji Sluneční soustavy a někdy ovlivňovaly dráhu Neptunu. Antigravitace však působila neustále a dodávala obrovské množství temné energie potřebné na migraci všech planet (srov. (13.24)).



15.6. Soustava Neptun–Triton

Pomocí samotných slapových sil lze jen obtížně vysvětlit obrovský orbitální moment hybnosti soustavy Neptun–Triton (viz obr. 15.4). Triton je pravděpodobně zachycený měsíc, protože obíhá Neptun v opačném směru než Neptun rotuje [95]. Jeho dráha se nazývá *retrogradní*. Triton brzdí rotaci Neptunu (podobně jako náš Měsíc brzdí



Obr. 15.4. Velký měsíc Triton o průměru 2705 km obíhá Neptun (vlevo dole) v opačném směru, než Neptun rotuje (foto NASA).

rotaci Země), ale protože obíhá v opačném směru, slapové síly jej nutí padat na nižší dráhy. Moment hybnosti vlastní rotace Neptunu má totiž opačné znaménko než orbitální moment hybnosti soustavy Neptun–Triton. Podle zákona zachování momentu hybnosti by tak měla vzdálenost Tritonu od Neptunu klesat.

Je ale velkou záhadou, jak mohlo být tak obrovské těleso o průměru 2705 km zachyceno ve vzdálenosti větší,¹ než je jeho současná vzdálenost 354 760 km. Triton patrně obíhá Neptun velice dlouho, protože výstřednost jeho dráhy je téměř nulová

$$e = 0.000\,016.$$

Je to vůbec nejmenší excentricita ze všech známých těles ve Sluneční soustavě. Při záchytu tělesa je totiž příslušná dráha skoro jistě protáhlá elipsa a Tritonu jistě trvalo miliardy let, než získal kruhovou orbitu.

Opět existuje vcelku jednoduché vysvětlení. Na Triton patrně neustále působí odpudivá antigravitační síla a není vyloučeno, že je dokonce větší než slapové síly, které tlačí Triton k Neptunu. Tímto způsobem mohla soustava Neptun–Triton získat obrovský pozorovaný orbitální moment hybnosti.



¹Pro srovnání uvedme, že náš Měsíc vznikl patrně z úlomků po velké srážce na dráze o poloměru cca 20 000 km od Země před více než 4 miliardami let, a pak odcestoval do vzdálenosti 384 402 km (viz kapitola 12).

15.7. Další kandidáti na projevy temné energie ve Sluneční soustavě

Dlouhodobé působení antigravitace ve Sluneční soustavě zanechalo celou řadu dalších stop, které jsou zaznamenány v nejrůznějších fyzikálních charakteristikách planet a dalších těles [143].

Například rotace Merkuru kolem osy je velice pomalá (59 dní), což mohla způsobit srážka s obrovskou planetezimálou ve velice raném stadiu vývoje. Merkur ale nemá žádnou tektonickou činnost, která by omlazovala jeho 4.5 miliardy let starý povrch rovnoměrně posetý krátery. Jinou možností proto je, že pomalá rotace je důsledkem temné energie, protože Merkur byl kdysi blíže Slunci, a pak díky antigravitačním silám pozvolna putoval na vyšší dráhu s hlavní poloosou cca 57.9 milionů km. Protože slapové síly ubývají se třetí mocninou vzdálenosti od Slunce, působí na Merkur $(149.6/57.9)^3 \approx 17$ krát větší silou na jednotku hmotnosti než na Zemi. Pokud by navíc byl Merkur např. jen 40 milionů km od Slunce v době svého vzniku, což je v souladu s (15.2), slapové síly od Slunce by byly ještě $(57.9/40)^3 \approx 3$ krát větší než dnes. Celkem tedy dostáváme $3 \cdot 17 = 51$ krát větší slapové působení na jednotku hmotnosti, než jaké působí nyní na Zemi. To by významně zbrzdilo rotaci Merkuru, který má cca 100krát menší moment setrvačnosti než Země.

Pokud byla kdysi Země blíže Slunci (viz kapitola 13 a 14), nemohla být Venuše od něj vzdálena současných 108 milionů km, protože by měla nestabilní dráhu. Byla k němu tedy také blíže. Merkur a Venuše nemají měsíce, protože by jejich orbity byly blíže Slunci nestabilní.

Jestliže byl Mars podstatně blíže Slunci, než je nyní (viz kapitola 11), mohl být také Jupiter blíže Slunci. Jinak by Mars narostl do větší velikosti. Má totiž jen desetinu hmotnosti Země, protože mu mnohem hmotnější Jupiter ubíral stavební materiál. Jupiter ale i Saturn, Uran a Neptun také mohly snáze nasbírat svoji ohromnou hmotnost blíže Slunci. Růst jejich oběžných dob destabilizoval pásy asteroidů, což vedlo k bombardování vnitřních planet.

Podle [15], kapitola 14.4 a s. 534, máme důkazy o tom, že také Kuiperův pás komet vznikl blíže Slunci. Antigravitace (srov. (15.2)) opět mohla za 4.5 miliardy let posunout Kuiperův pás o mnoho astronomických jednotek dále od Slunce. Podobné argumenty lze učinit pro asteroidy typu Sedna, která se mohou přibližovat až k Oortově oblaku. Mají malý sklon k ekliptice a jejich vznik není dosud objasněn.

Sondy Pioneer se opoždějí za polohou vypočítanou podle Newtonovy teorie gravitace již o půl dne. Tento tzv. „Pioneer efekt“ ale není způsoben antigravitací, protože se jedná o velice krátkodobý jev ve srovnání se stářím Sluneční soustavy. Sondy Pioneer brzdí pravděpodobně tepelné záření radioaktivního zdroje, který je na sondách nesymetricky umístěn. Uvažuje se i o brzdění meziplanetárním prachem.

16. Rozpínání samotných galaxií

*Jedno měření,
žádné měření.*

Základní fyzikální poučka

16.1. Expandují samotné galaxie v důsledku antigravitace?

Kladná odpověď na tuto otázku je založena na 10 nezávislých argumentech, které uvádíme v jednotlivých oddílech.

Za prvé nemáme žádný důvod předpokládat, že by se antigravitace nějakým způsobem vyhýbala vnitřku galaxií, když její projevy zjišťujeme jak na velkých kosmologických vzdálenostech (viz kapitola 10), tak i uvnitř Sluneční soustavy (viz kapitoly 11–15).



16.2. Galaktická expanze

Z nedávné doby máme řadu pozorování dokládajících expanzi samotných galaxií. Například R. J. Bouwers a kol. [24] zjistili, že galaxie pozvolna nepatrně rostou. Rovněž I. Trujillo se svým kolektivem [275] odhalili, že rozměr velmi hmotných galaxií se zvyšuje s časem. Částečně lze tento nárůst vysvětlit mezigalaktickým prachem, který na galaxie padá v důsledku gravitace, a též galaktickým kanibalizmem. Galaxie v kosmologických vzdálenostech ale mají více hvězd na jednotku objemu.

Podle [62] byly superhusté galaxie celkem běžné v raném vesmíru pro červený posuv $z > 1.5$ a nyní jsou v našem okolí velice vzácné. Také v článku [240] se poukazuje na to, že rané galaxie byly menší a hustší krátce po svém vzniku. Podle [32] je hustota některých galaxií pro $z > 1$ dokonce srovnatelná s hustotou dnešních kulových hvězdokup, tj. v průměru několik hvězd na pc^3 (ve středu hvězdokupy řádově sto

hvězd na pc^3 , srov. obr. 16.3). Na základě tohoto výčtu (viz též [49], [75], [274] atd.) se tedy lze domnívat, že antigravitace podstatně přispěla k výše uvedenému rozpínání, a tím i řídnutí samotných galaxií. Podobně jako v případě Sluneční soustavy může být rychlost rozpínání samotných galaxií menší než Hubbleova expanze, ale může mít stejný řád.



16.3. Rozpínání Mléčné dráhy

Podle [236] je naměřená hustota hvězd v galaxiích pro velký červený posuv $z \approx 3$ zhruba 8krát větší než v galaxiích v našem okolí. Tyto galaxie v odpovídající vzdálenosti cca 11 miliard světelných roků (viz obr. 8.7) jsou tedy v každém směru přibližně dvakrát menší, než by byly nyní.

Aplikujme nyní tato pozorování na naši Galaxii, tj. Mléčnou dráhu¹, jejíž průměr je kolem sto tisíc světelných let,

$$D = 10^5 \text{ ly.} \quad (16.1)$$

Pokusme se ukázat, že současné velikosti D lze zhruba dosáhnout Hubbleovou expanzí. Předpokládejme, že Galaxie expandovala z nějaké menší protogalaxie o průměru $d = D/2$ během posledních 11 miliard let. Současná hodnota Hubbleovy konstanty je

$$H_0 \approx 68 \text{ km s}^{-1} \text{Mpc}^{-1} \approx 20 \text{ km s}^{-1} \text{Mly}^{-1},$$

neboť $1 \text{ pc} = 3.262 \text{ ly}$. Její přeškálovaná hodnota na velikost Galaxie tedy je

$$H_0 = 2 \text{ km s}^{-1} D^{-1}. \quad (16.2)$$

Protože rychlost světla je $c = 300\,000 \text{ km/s}$, vychází pro $t = 11 \cdot 10^9$ let podle (16.1) a (16.2) současná extrapolovaná velikost Galaxie přibližně

$$d \exp(H_0 t) = d \exp\left(\frac{2 \cdot 11 \cdot 10^9}{300\,000 \cdot 10^5}\right) = d e^{11/15} \approx 1.04D,$$

což je vskutku hodnota srovnatelná se skutečnou hodnotou D . Uvážíme-li, že Hubbleův parametr byl kdysi větší než H_0 (viz obr. 8.7), můžeme dostat odhadovaný průměr Galaxie blízký skutečnému průměru D i s poloviční Hubbleovou expanzí, popř. s menším rozměrem původní protogalaxie. Současná rychlost zvětšování naší Galaxie je tedy řádově srovnatelná s H_0 , i když je patrně o něco menší.

¹Mléčná dráha má poetické pojmenování v mnoha jazycích, např. Řeka ohně (starohebrejsky), Zimní cesta (švédsky), Stříbrná řeka (korejsky), Cesta bílého slona (thajsky).

Z naměřené metalicity Slunce, struktury Oortova oblaku a několika dalších argumentů se v [102] a [230] usuzuje, že Slunce od svého vzniku před 4.6 miliardy let postupně migrovalo o několik kpc směrem od středu Galaxie na současnou vzdálenost 8.3 kpc. To je opět hodnota srovnatelná s rychlostí Hubbleovy expanze. Pokud by se Slunce posunulo např. o 2 kpc, pak by odpovídající rychlost migrace byla (srov. (10.2))

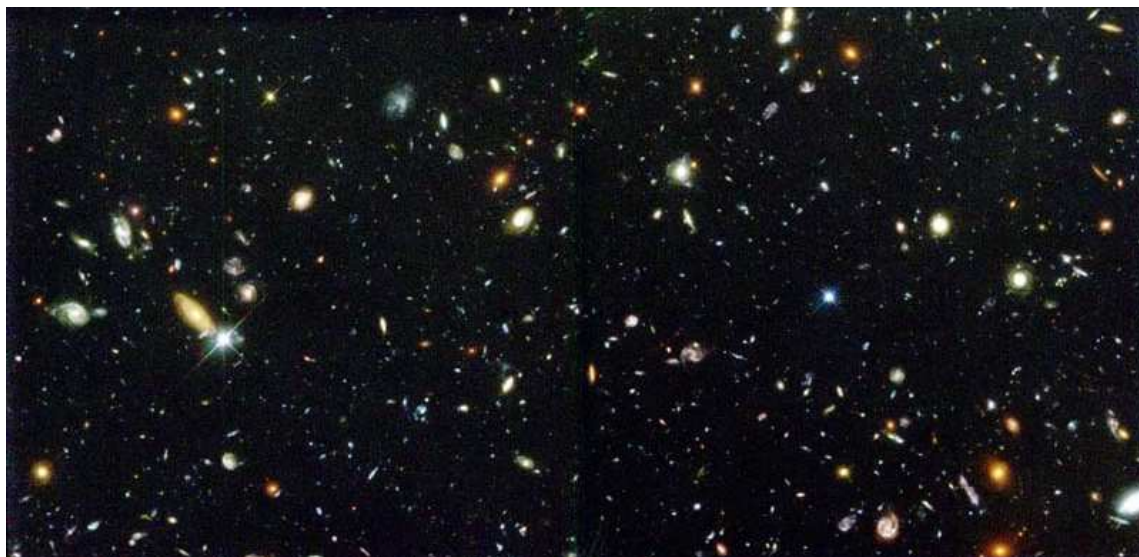
$$H_0^{(\text{loc})} = \frac{2 \text{ kpc}}{4.6 \text{ Gyr} \cdot 8.3 \text{ kpc}} = \frac{1}{19 \text{ Gyr}} = 0.71 H_0. \quad (16.3)$$

I kdyby se Sluneční soustava posunula jen o 1 kpc nebo naopak o 5 kpc, stále se bude jednat o hodnotu řádově srovnatelnou s H_0 .



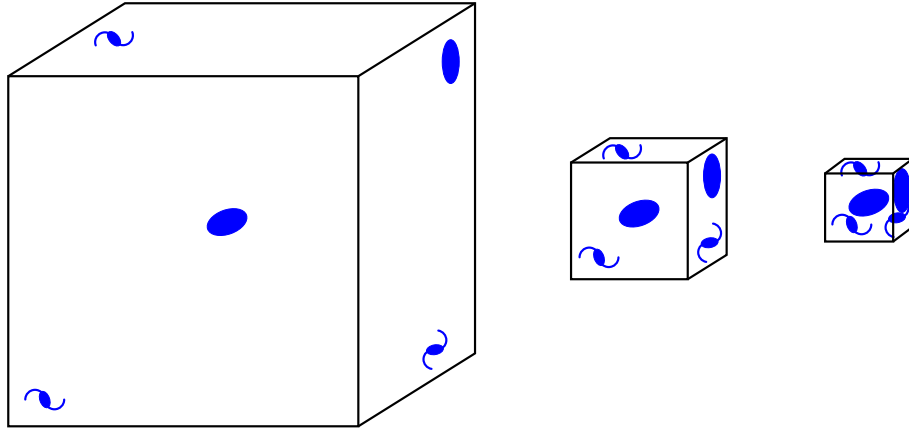
16.4. Rozložení galaxií v minulosti

Hustota rozložení galaxií v prostoru před 10–13 miliardami let byla mnohem větší než v současnosti, protože byl vesmír menší. Například pro červený posuv $z \approx 3$, který zhruba odpovídá známým Hubbleovým hlubokým polím HDF, HDFS, XDF, byl prostor v každém směru $(z + 1)$ krát menší a v jednotkovém objemu měl tedy v průměru $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$ krát více galaxií. Protože však protogalaxie byly tehdy menší, jejich zvýšené natěsnání nepozorujeme (viz obr. 16.1).



Obr. 16.1. Hubbleovo hluboké pole má napříč $2.5'$. Obsahuje nejvíce galaxií s červeným posuvem $z \approx 3$ (R. D. Blandford, 1999; foto NASA).

Dále použijeme bezprostřední geometrický argument založený na důkazu sporem. Předpokládejme na okamžik, že galaxie mají konstantní objem (tj. v průběhu času neexpandují), že vzájemně nekolidují a že vesmír je homogenní a izotropní pro každý pevný časový okamžik. Pravá část obr. 16.2 ilustruje, co bychom viděli v kosmologických vzdálenostech, kdyby galaxie měly stále stejnou velikost. Vlevo je schematicky nakresleno 5 galaxií v jednotkové krychli pro $z = 0$. Pro $z = 2$ by tudíž v jednotkové krychli v průměru bylo $5 \cdot (z + 1)^3 = 5 \cdot 3^3 = 135$ namačkaných galaxií, protože se prostřední krychle z obr. 16.2 vejde do jednotkové krychle vlevo 27krát. Podobně zjistíme, že pro $z = 4$ by v jednotkové krychli bylo $5 \cdot 5^3 = 625$ těsně k sobě přiléhajících galaxií. Takové natěsnání se ale nepozoruje, neboť galaxie byly tehdy mnohem menší. Navíc byly objeveny galaxie i pro $z \approx 10$. V tomto případě by počet galaxií v jednotkové krychli byl více než 1000krát větší než dnes a galaxie by se mohly dotýkat či dokonce prolínat, kdyby měly neměnnou velikost. To je však ve sporu s pozorováním.



Obr. 16.2. Vlevo je jednotková krychle, v níž je schematicky znázorněno rozložení galaxií v našem okolí pro červený posuv $z = 0$. Předpokládejme, že galaxie nemění svou velikost. V tomto případě je rozložení galaxií v kosmologických vzdálenostech pro $z = 2$ znázorněno uprostřed a pro $z = 4$ vpravo. Takový obraz natěsnaných galaxií však astronomové nepozorují.



16.5. Rychlost tvorby hvězd

Podle [24] a [267] je pozorovaná rychlost tvorby hvězd (angl. star formation rate) v galaxiích, které jsou v kosmologických vzdálenostech, úměrná $(1 + z)^{1.9 \pm 0.1}$. Například pro červený posuv $z \approx 2.3$ je 10krát vyšší než v našem okolí. Tato extrémně vysoká

rychlost může být opět vysvětlena vyšší hustotou hmoty uvnitř galaxií pro velká z , než je nyní pro $z \approx 0$.

Jedna z největších známých galaktických kup SPT-CLJ 2344-4243 (Phoenix) se nachází ve vzdálenosti $z = 0.6$. Má úctyhodnou hmotnost $2.5 \cdot 10^{15} M_{\odot}$, kde $M_{\odot} = 1.989 \cdot 10^{30}$ kg je hmotnost Slunce. V centrální galaxii probíhá tvorba hvězd rychlostí $740 M_{\odot}$ za rok. Některé hodně vzdálené galaxie staré přibližně 13 miliard let mají rychlost tvorby hvězd ještě vyšší. Kupříkladu v galaxii HFLS3 se hvězdy rodí 2000krát častěji než v Mléčné dráze.



16.6. Aktivita galaktických jader

Podle [246] je pozorovaná aktivita galaktických jader v kosmologických vzdálenostech mnohem větší, než je tomu v našem okolí. To lze rovněž objasnit větší hustotou hmoty uvnitř galaxií pro velký červený posuv z , i když centrální černé díry byly kdysi v průměru menší.

Je známo velké množství kvasarů s červeným posuvem $z \geq 6$ (viz například J1148+5251, J1319+0950). Většina z nich byla nalezena pomocí soustavy submilimetrových interferometrů ALMA, která pracuje s úctyhodnou přesností $0.6''$, což odpovídá 3 kpc ve vzdálenosti $z = 6$ pro současně přijímané hodnoty kosmologických parametrů. Největší zářivý výkon $1.8 \cdot 10^{13} L_{\odot}$, kde $L_{\odot} = 3.846 \cdot 10^{26}$ W je luminozita Slunce, vykazuje kvasar J2310+1855, což je o dva řády více, než má běžná galaxie. Zdá se tedy, že hustota uvnitř vzdálených galaxií byla vysoká a pak v důsledku anti-gravitace pozvolna klesala. Svítivost kvasarů se mohla také snižovat, když si kvasar „čistil“ své okolí. Oba tyto procesy patrně probíhaly současně.



16.7. Staré trpasličí galaxie

První katalog ručně kreslených tvarů galaxií pochází od Williama Herschela. Později k němu přibyl katalog mlhovin Charlese Messiera. Galaxie se klasicky třídí podle Edwina Hubblea na eliptické, čočkovité, spirální bez příčky, spirální s příčkou² a nepravidelné. Malé trpasličí galaxie (jako např. Magellanova mračna) jsou vesměs nepravidelné, zatímco silný gravitační potenciál obřích galaxií má tendenci vyrovnávat

²Téměř žádné galaxie nemají příčku pro červený posuv $z > 1$, zatímco téměř 80 % spirálních galaxií pro $z \approx 0$ příčku má. Navíc jejich výduť pozvolna narůstá. Ukazuje se, že čím má spirální galaxie větší výduť, tím je také větší její centrální černá díra.

jakoukoliv nerovnoměrnost a vytvářet tak symetrické struktury, pokud se v blízkosti nenachází jiná galaxie. Zatím není známo, proč tomu tak je. Převážná většina velkých rotujících galaxií má dvě spirální ramena a zhruba vykazuje středovou symetrii. Výjimečně však existují galaxie se třemi rameny (viz např. NGC 5054)³ i čtyřmi a více spirálními rameny. Čím hlouběji se díváme do raného vesmíru, tím jednodušší tvary galaxií pozorujeme. Jinými slovy, čím blíže současnosti, tím složitější struktury se utvářejí. A tak v našem okolí nacházíme galaxie slupkovité, prstencové, vločkovité apod.

V těsné blízkosti naší Galaxie však existuje několik trpasličích galaxií (např. LEO IV), kde se začaly formovat hvězdy již před 13 miliardami let. O 300 milionů let později však tvorba hvězd ustala. Rozpínání každé takové trpasličí galaxie v důsledku příslušných antigravitačních sil tak mohlo přispět k postupnému snižování hustoty látky, která během času klesla pod určitou kritickou mez nutnou pro tvorbu hvězd.



16.8. Kulové hvězdokupy

V naší Galaxii se nachází asi 150 kulových hvězdokup. Mají velice dobře katalogizovaná data o svých polohách, rychlostech apod. Některé se k našemu Slunci přibližují, jiné se od něj vzdalují. Jsou to velice staré soustavy obsahující statisíce až miliony hvězd (viz obr. 16.3). Čím jsou starší, tím jsou obecně dále od centra Galaxie.

Střední radiální rychlost⁴ všech 150 kulových hvězdokup v naší Galaxii je kladná, což naznačuje, že se tyto hvězdokupy v průměru od nás vzdalují. Mléčná dráha tak může „bobtnat“ podobně jako mořská houba nebo kynoucí těsto. Podle naměřených hodnot z [83] vychází střední radiální rychlost vzdalování od Slunce 1 km/s na vzdálenost 1 kpc, což je dokonce více než Hubbleova konstanta. Odkud se ale bere energie na toto rozpínání, uvažíme-li, že každá hvězdokupa má řádově cca 10^{36} kg? Opět se zdá, že na vině je antigravitace.

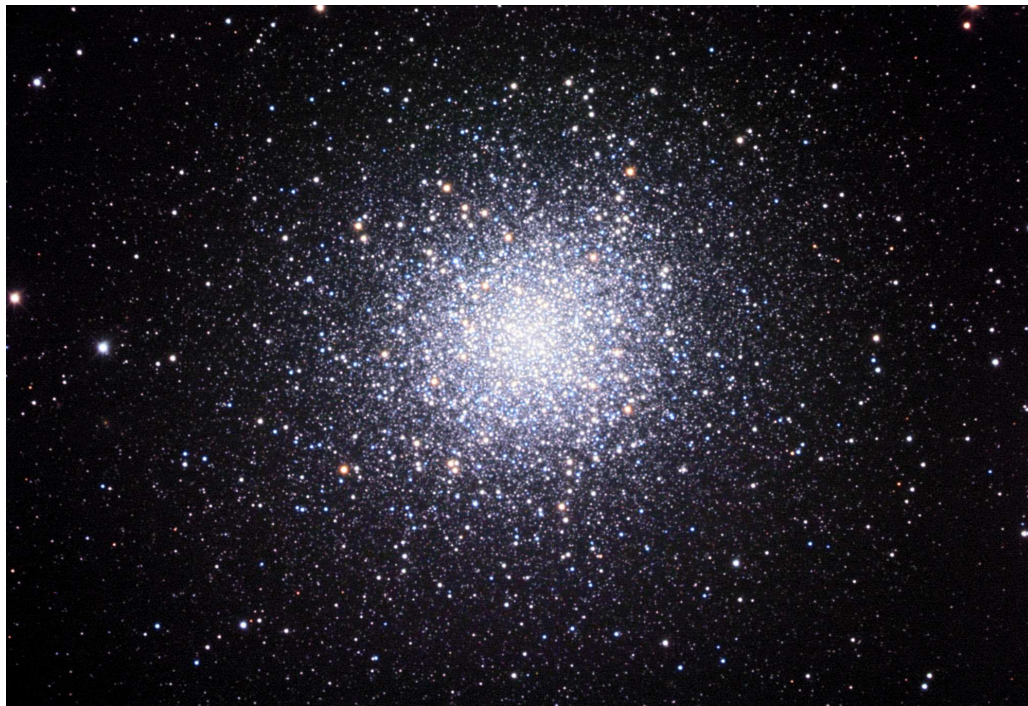


16.9. Gravitermální katastrofa

Téměř všechny otevřené a kulové hvězdokupy se zdají být nestabilní, jak ukázal Pavel Kroupa [119]. Lehčí hvězdy mají tendenci se vzdalovat od středu na úkor

³Poznamenejme, že problém tří stejně hmotných těles pohybujících se po kružnici v odstupu po 120° je nestabilní. Gravitate na velkých vzdálenostech se díky konečné rychlosti svého šíření chová jinak, než popisuje Newtonova teorie gravitace, na niž jsme zvyklí na krátkých časových škálách ve Sluneční soustavě.

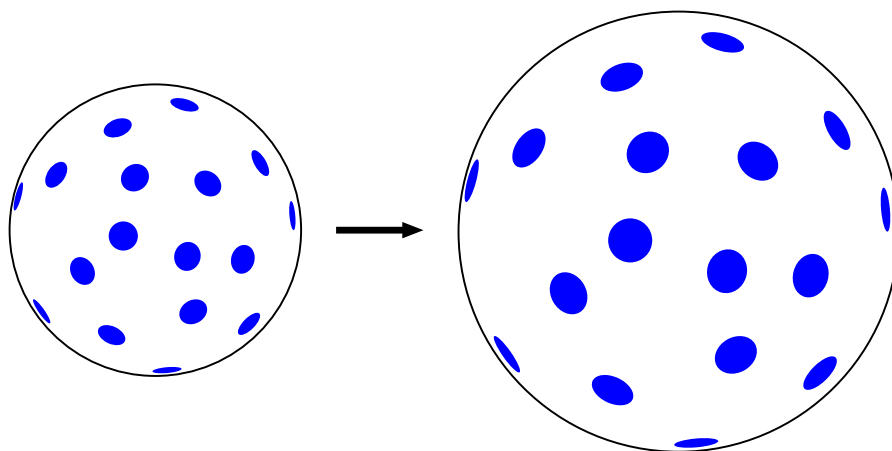
⁴Tangenciální složky rychlostí zatím neumíme spolehlivě určit s dostatečnou přesností.



Obr. 16.3. Kulová hvězdokupa M13 v souhvězdí Herkula

těch hmotnějších, které se postupně kumulují kolem středu hvězdokupy. Dochází tak k hmotnostní segregaci. Při vícenásobných kolizích může být občas nějaká lehká hvězda dokonce „vystřelena“ i mimo hvězdokupu (hovoříme o *vypařování hvězd* z hvězdokup). Přitom se opět okolní hvězdy posunou blíže ke středu, protože jim ubude potenciální energie. Tento proces končí tzv. *gravitermální katastrofou* (viz [72]).

Antigravitace však přispívá k průměrnému vzdalování všech hvězd od středu. Působí tak proti gravitermální katastrofě uprostřed hvězdokupy a celý proces zpomaluje. Některé kulové hvězdokupy existují již více než 13 miliard let a gravitermální katastrofa se u nich zcela neprojeví. Přitom pozorovaná frekvence úniku hvězd z hvězdokup je vyšší, než předpovídá klasická věta o viriálu (viz oddíl 7.2), která ovšem existenci antigravitačních sil neuvažuje. Antigravitace, která velice pozvolna ale neustále zvyšuje celkovou energii (tj. kinetickou + potenciální) každého vázaného systému více volných těles tak způsobuje, že každá hvězdokupa v průměru nepatrně expanduje.



Obr. 16.4. Dvojměrný model expandujícího vesmíru s kladnou křivostí a rozpínajícími se galaxiemi. V [187], s. 719, se rozpínání samotných galaxií neuvažuje.

16.10. Exoplaneta WASP-18b

Dalším příkladem lokálního působení antigravitace uvnitř naší Galaxie je exoplaneta WASP-18b, která oběhne svou mateřskou hvězdu o hmotnosti $1.25M_{\odot}$ po téměř kruhové dráze o poloměru 3 miliony km jednou za 0.94 dne. Protože se hvězda otočí kolem své osy jednou za 5.64 dne [29], má podle 3. Keplerova zákona její stacionární dráha poloměr cca 10 milionů km, tj. exoplaneta obíhá hvězdu pod stacionární dráhou (srov. vztah (15.1)). Podle [87] by exoplaneta měla v důsledku slapových sil dopadnout po spirální dráze na svou mateřskou hvězdu dříve než za milion let. Hvězda však existuje již kolem 700 milionů let [258]. Je tedy záhadou, jak se mohla exoplaneta o hmotnosti deseti Jupiterů na svou dráhu vůbec dostat a proč by měla v tak krátké geologické době dopadnout na mateřskou hvězdu. Tento paradox lze opět vysvětlit tím, že antigravitace působí v opačném směru než slapové síly, a tak pád exoplanety vlastně brzdí. Z vývoje orbitálních parametrů budeme za nějaký čas umět odhadnout, jak rychle se exoplaneta přibližuje ke hvězdě a kolik energie této exoplanety dokáže odčerpat slapy.

Argumenty uváděné v oddílech 16.1–16.10 ukazují, že také samotné galaxie se rozpínají (viz obr. 16.4), i když patrně o něco menší rychlostí, než jaká odpovídá Hubbleovu parametru. Antigravitační síly tedy působí v naší Galaxii lokálně i mimo Sluneční soustavu. Mohou tak přispívat k expanzi obyvatelných zón (jako v případě Země), když svítivost mateřské hvězdy postupně narůstá. V tomto smyslu jsou pak obyvatelné zóny stabilnější, protože mohou existovat delší dobu (viz kapitola 14).



17. Co je záhadným zdrojem temné energie?

Nikdy se nepřestávejme ptát.

ALBERT EINSTEIN

17.1. Gravitační aberace

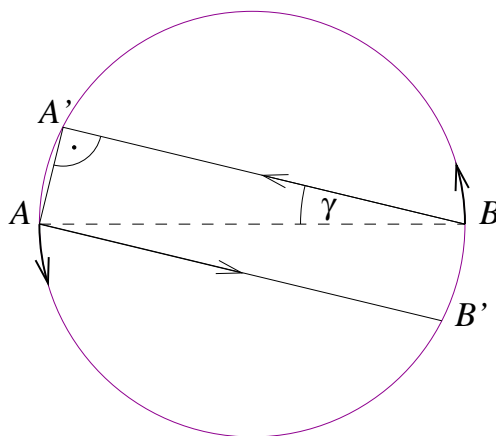
V kapitolách 11 až 16 jsme uvedli celou řadu příkladů, které hovoří ve prospěch hypotézy, že antigravitace nepůsobí jenom globálně, ale i lokálně. To naznačuje, že na základě dnešního stavu poznání nemusí zákon zachování energie platit nebo nevíme, odkud se energie bere. Nyní ukážeme, že temná energie nutná pro zrychlující se rozpínání vesmíru může (alespoň částečně) pocházet z nepatrně malé ale kladné hodnoty gravitační aberace, jež je důsledkem kauzality a konečné rychlosti šíření gravitační interakce.

Uvažujme nejprve jen dvě tělesa A a B o stejných hmotnostech, která kolem sebe obíhají symetricky vzhledem k svému společnému těžišti. Pokud A přitahuje B a B přitahuje A ve svých okamžitých polohách (tj. *rychlost gravitační interakce* c_G je nekonečná), pak podle Newtonovy teorie gravitace leží příslušné gravitační síly v jedné přímce a jsou v rovnováze.

Rychlost gravitační interakce c_G je ale ve skutečnosti jistě jen konečná. Proto je těleso B přitahováno tělesem A směrem k některé jeho předchozí poloze A' tak, jak je nakresleno na obr. 17.1. Podobně je těleso A přitahováno tělesem B směrem k předchozí poloze B' . Pak ovšem vzniká dvojice přitažlivých nerovnovážných sil, která na tento systém trvale působí, pozvolna mu zvyšuje moment hybnosti, a tím i celkovou energii. Úhel ABA' (resp. BAB') nazveme *úhlem gravitační aberace*. Z Thaletovy věty plyne, že trojúhelník AAB' na obr. 17.1 je pravoúhlý a platí

$$|A'B| < |AB|. \quad (17.1)$$

Podle (17.1) jsou tedy přitažlivé síly v tomto postnewtonovském modelu nepatrně větší, než kdyby působily podél přepony AB .



Obr. 17.1. Schematické znázornění dvou gravitačně interagujících těles o stejné hmotnosti. Úhel gravitační aberace $\gamma = \angle ABA'$ je extrémně malý.

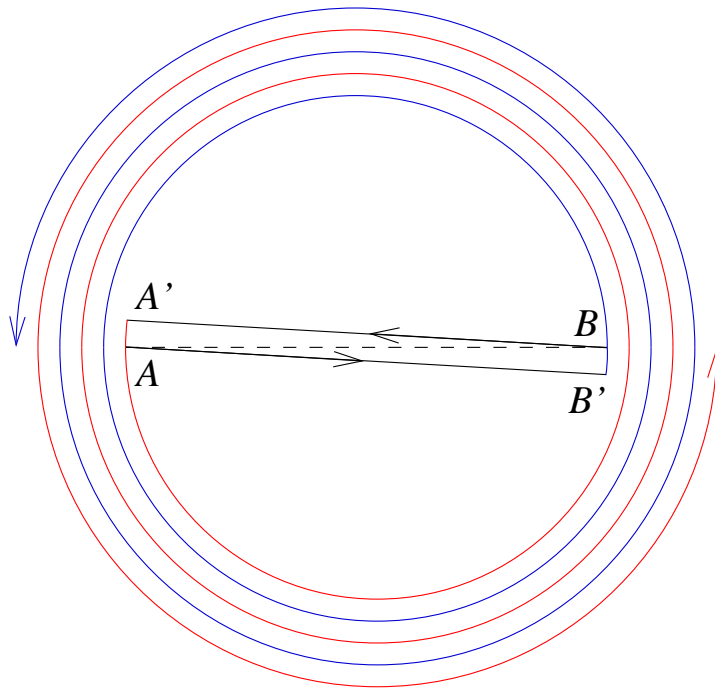
Poznamenejme, že ilustrační obr. 17.1 není vlastně nakreslen správně. Libovolně malá hodnota úhlu gravitační aberace γ uvažovaného systému totiž zvyšuje nejenom orbitální moment hybnosti soustavy (jak plyne z (9.1)), ale prodlužuje i periodu oběhu. Odpovídající trajektorie tvoří velice pomalu se rozvírající spirály (viz obr. 17.2).

Tento jednoduchý příklad (diskutovaný již A. Eddingtonem [57] na s. 94 a 204) ukazuje, proč je narušen klasický zákon zachování energie pro konečnou rychlost šíření gravitační interakce. Kdyby narušen nebyl, pak by trajektorie těles byly pro vhodné počáteční podmínky neměnné kružnice o konstantním poloměru. Pro rozvírající se spirální dráhy ale celková energie roste. Celková kinetická energie obou těles sice klesá, ale potenciální energie roste dvakrát rychleji (srov. (13.23)).

Příklad lze poměrně snadno modelovat soustavou obyčejných diferenciálních rovnic se zpožděním (viz (17.4)–(17.5) níže). Vyšetřovaný problém lze zobecnit i na případ více těles o nesterajných hmotnostech. Opět se ukazuje, že takovému systému pozvolna narůstá celková (tj. kinetická + potenciální) energie [124], s. 243.

Systém rovnic se zpožděním navíc modeluje realitu lépe než klasický Newtonův systém obyčejných diferenciálních rovnic (5.8), protože nám umožňuje uvažovat gravitační aberaci a generovat očekávané spirální trajektorie (viz např. kapitola 12 a 13). Navíc pro nulovou gravitační aberaci dostáváme klasickou Newtonovu mechaniku. Kladná gravitační aberace má repulzivní charakter podobně jako kladná kosmologická konstanta.

Popsaný mechanismus přispívá také k expanzi vesmíru a může (alespoň částečně) vysvětlit záhadu temné energie. Skutečný úhel gravitační aberace musí být nutně kladný. Nulová aberace je totiž v rozporu s principem kauzality. Mysleme si na okamžik, že těleso A z obr. 17.2 exploduje. Pak se druhé těleso B musí pohybo-



Obr. 17.2. Trajektorie odpovídající dvěma stejně hmotným tělesům, která na sebe gravitačně působí, tvoří dvojitou spirálu. Vzdálenosti sousedních trajektorií jsou ve skutečnosti mnohonásobně menší. Rovněž aberační úhly ABA' a BAB' jsou extrémně malé, leč kladné.

vat ještě nějakou dobu po nezměněné trajektorii, než k němu prostřednictvím gravitačního pole dorazí informace o změně trajektorie tělesa A . Proto musí být aberační úhly ABA' a BAB' na obr. 17.2 kladné.

Steven Carlip se v [38] pokouší odvodit, že gravitační aberace γ tělesa o rychlosti v je v obecné teorii relativity shora odhadnuta podílem v^3/c^3 , tj.

$$\gamma = o\left(\frac{v^3}{c^3}\right), \quad (17.2)$$

zatímco úhel světelné aberace je podle (2.12) přibližně roven

$$\alpha = \frac{v}{c}. \quad (17.3)$$

Přitom předpokládá, že

- a) gravitační interakce má stejnou rychlost jako světlo,
- b) kosmologická konstanta je nulová,
- c) některé nelineární členy, které neumí odhadnout, jsou nulové,
- d) platí zákon zachování energie a zákon zachování momentu hybnosti.

Proto ani nemůže dostat spirální trajektorie tak, jak je schematicky nakresleno na obr. 17.2.

Rychlost vzdalování a úhel gravitační aberace závisí na hmotnostech, rychlostech a polohách (i minulých) volných těles, která na sebe gravitačně působí [124]. Gravitační aberace má tedy nezanedbatelný vliv na rychlost rozpínání vesmíru. Proto je také třeba nahlížet na kosmologickou konstantu jen na jakousi veličinu zprůměrovanou přes všechny hmotné objekty a nikoli jako na základní fyzikální konstantu (jakou je např. gravitační konstanta G).



17.2. Postnewtonovský model aneb jak se generuje temná energie

Podívejme se nyní, jak lze gravitační aberaci matematicky modelovat tím, že modifikujeme soustavu diferenciálních rovnic (5.8). Výsledný problém zahrnující konečnou rychlost šíření gravitační interakce c_G mezi dvěma tělesy bude nyní popsán soustavou (17.4)–(17.6) obyčejných diferenciálních rovnic se zpožděním.

Uvažujeme jen dva hmotné body m_1 a m_2 ve dvourozměrném či trojrozměrném prostoru, který vybavíme eukleidovskou normou (vzdáleností) $|\cdot|$. Zavedeme-li zpoždění do gravitačních interakcí, lze klasickou newtonovskou soustavu (5.8) pro $N = 2$ přepsat na soustavu obyčejných diferenciálních rovnic pro dvě vektorové trajektorie r_1 a r_2 :

$$\ddot{r}_1(t) = G \frac{m_2[r_2(t - d_2(t)) - r_1(t)]}{|r_2(t - d_2(t)) - r_1(t)|^3}, \quad (17.4)$$

$$\ddot{r}_2(t) = G \frac{m_1[r_1(t - d_1(t)) - r_2(t)]}{|r_1(t - d_1(t)) - r_2(t)|^3}, \quad (17.5)$$

kde d_1 a d_2 jsou dvě proměnná zpoždění (tj. závislá na čase) splňující jisté přirozené podmínky (viz (17.7) níže) a počáteční podmínky

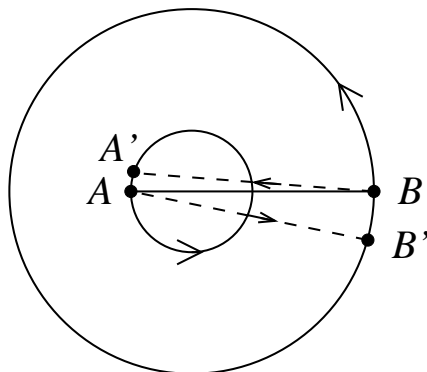
$$r_i(t) = p_i(t), \quad \dot{r}_i(t) = v_i(t), \quad t \in [t_0, 0], \quad i = 1, 2. \quad (17.6)$$

Zde $t_0 \leq 0$ je vhodné pevné číslo a vektory p_i a v_i jsou dané funkce charakterizující předchozí polohy a rychlosti.

Tento jednoduchý postnewtonovský model sice nebere v úvahu gravitační vlny (které zatím nebyly detekovány), ale zahrnuje obecně nenulovou gravitační aberaci.

Pokud $c_G = \infty$, pak $t_0 = d_1 = d_2 = 0$ a systém (17.4)–(17.6) se redukuje na klasický problém dvou těles (viz kapitola 5). Pro $c_G < \infty$ splňují funkce zpoždění (angl. delay) vztahy (srov. obr. 17.3)

$$d_1(t) = \frac{|r_1(t - d_1(t)) - r_2(t)|}{c_G}, \quad d_2(t) = \frac{|r_2(t - d_2(t)) - r_1(t)|}{c_G}, \quad (17.7)$$



Obr. 17.3. Znázornění gravitační interakce mezi dvěma tělesy o nestejných hmotnostech $m_1 > m_2$

tj. každé d_i je třeba počítat iteračně např. pomocí klasické Banachovy věty o pevném bodě [151].

Předpokládejme nyní, že

$$m_1 R_1 = m_2 R_2, \quad (17.8)$$

kde R_1 a R_2 jsou vzdálenosti od newtonovského těžiště. Položme

$$p_1 = (R_1, 0), \quad p_2 = (-R_2, 0),$$

a

$$v_1 = \left(0, \frac{\sqrt{Gm_2 R_1}}{R_1 + R_2}\right), \quad v_2 = \left(0, -\frac{\sqrt{Gm_1 R_2}}{R_1 + R_2}\right).$$

Tyto hodnoty nám zaručují přesné kruhové dráhy pro $t_0 = 0$ v (17.6) a rychlost $c_G = \infty$. Používají se ke stanovení počátečních podmínek (17.6) pro případ

$$c_G < \infty.$$

To ovšem vyžaduje uchovávat staré hodnoty r_1 a r_2 během výpočtu díky nekonvenčním počátečním podmínkám.

Velkou výhodou počítačových simulací je ale to, že snadno můžeme provádět velké množství testů pro různé hodnoty vstupních parametrů ze vztahů (17.4)–(17.7).

Například šíření gravitační interakce c_G v předloženém postnewtonovském modelu lze libovolně měnit, a tak nemusí souhlasit se skutečnou (zatím nezměřenou) hodnotou. Je to jen vstupní parametr.

Příklad 17.1. Analytické řešení problému (17.4)–(17.7) pro $c_G < \infty$ není známo. Numericky získané trajektorie r_1 a r_2 pro $m_1 = m_2 > 0$ a $c_G \leq c$ jsou schematicky znázorněny na obr. 17.2. Zdají se být velice nerealistické, protože tvoří dvě velice rychle se rozvíjející spirály, což neodpovídá astronomickým pozorováním. Model (17.5)–(17.7) však dává velice realistické výsledky pro $c_G \gg c$. Takové řešení se samozřejmě liší od řešení systému (17.4)–(17.5) s počátečními podmínkami $r_i(0) = p_i(0)$, $\dot{r}_i(0) = v_i(0)$, $i = 1, 2$, pro $c_G = \infty$.

Příklad 17.2. Největší úhel gravitační aberace vychází numericky pro $m_1 \approx m_2$ (srov. obr. 17.2). Ve Sluneční soustavě takové objekty neznáme. Pro Zemi a Měsíc je poměr $m_1 : m_2$ roven 81 : 1 a pro soustavu Pluto–Charon 7 : 1, což je vůbec nejmenší takový poměr ve Sluneční soustavě mezi většími tělesy.

Uvažujme tedy opět binární soustavu Země–Měsíc s hmotnostmi (12.4) ve vzdálenosti 384 402 km od sebe. Abychom dostali přídatnou rychlost vzdalování odvozenou v (12.21), je třeba pro uvažovaný postnewtonovský model vzít $c_G = 4.287 \cdot 10^{15}$ m/s. V tomto případě je úhel gravitační aberace v bodě B představujícím na obr. 17.3 Měsíc roven

$$\gamma = \frac{v}{c_G} \approx 2.424 \cdot 10^{-13} \text{ rad}, \quad (17.9)$$

kde $v = |\dot{r}_2| \approx 1$ km/s a obě trajektorie tvoří pomalu se rozvíjející spirály. Poznamenejme, že světelná aberace Měsíce je mnohem větší, $\alpha = v/c = 0.7''$ (viz (6.2)), a aberační úhel Země je 81krát menší.

Není obtížné zobecnit předchozí problém (17.4)–(17.7) na libovolný počet $N \geq 2$ interagujících těles. To lze udělat podobně jako v oddílu 5.4.

Příklad 17.3. Numericky expandující trajektorie dostaneme také pro 3 tělesa, která jsou ve vrcholech rovnostranného trojúhelníku a všechna 3 mají stejnou postupně klesající rychlost. Zcela analogický jev dostaneme pro situaci znázorněnou na obr. 17.2, kde je třetí těleso vloženo doprostřed úsečky AB . Rozvírající se trajektorie dostaneme také pro systém dvou dvojhvězd stejných hmotností.

Další příklady uvádíme v [124]. Konečná rychlost šíření gravitační interakce například přispívá k nižšímu počtu srážek hvězd. Tím, že hvězdy na sebe vzájemně gravitačně reagují se zpožděním, je pravděpodobnost jejich srážky menší, než kdyby působily na sebe okamžitě (viz [124], s. 242). K numerické aproximaci byla použita Rungeova–Kuttova metoda vysokého řádu přesnosti přesnosti. Populární symplektické metody se pro tyto účely nehodí, protože zachovávají energii a navíc mají nižší řád aproximace.



17.3. Rychlost gravitační interakce

V roce 1805 Pierre Laplace usoudil na základě detailního rozboru pohybu Měsíce, že skutečná newtonovská rychlost šíření gravitační interakce c_G musí být alespoň $7 \cdot 10^6 c$ (viz [166], kapitola VII, s. 642). Van Flandern [65] ještě zvýšil tento odhad na $2 \cdot 10^{10} c$, jinak by totiž dvě tělesa nemohla obíhat kolem společného těžiště po stabilních drahách. Jejich momenty hybnosti by nebyly v rovnováze, pokud by $c_G = c$, jak předpokládá obecná teorie relativity (viz (17.10)).

Na druhé straně v roce 1905 Henri Poincaré¹ v článku [214], s. 1507, předpověděl, že pro rychlost šíření gravitačních vln c_G platí²

$$c = c_G, \quad (17.10)$$

kde c je rychlost světla ve vakuu, tj. dříve než ke stejnému závěru dospěl Albert Einstein. Vzniká ovšem otázka, co tato rovnost vůbec znamená. Platí např. na dvacet desetinných míst? Podobně jako v oddíle 14.1 je třeba si opět uvědomit, že základní fyzikální konstanty nejsou reálná čísla s nekonečným desetinným rozvojem. Pokud by se rychlosti c a c_G jen nepatrně lišily (byť třeba jen o jedno promile), pak bude dosti obtížné ztotožnit zdroj gravitačních vln (např. při výbuchu supernovy) s jejich optickým protějškem. Nadsvětelná rychlost gravitační interakce může vysvětlovat, proč jsou některé spirální galaxie tak perfektně symetrické. Pro rychlost (17.10) by komunikace mezi konci spirálních ramen prostřednictvím gravitace trvala statisíce let. Také není jasné, jaká je rychlost gravitační interakce v látce (sklo, vnitřek Slunce apod.), kde světlo vykazuje disperzi.

Rychlost gravitační interakce bychom mohli určit u dvojhvězd se známou vzdáleností d obou složek takto. Pokud jedna hvězda exploduje, pak stačí změřit dobu τ , do které druhá hvězda začne měnit svoji původní dráhu. Soudobá dopplerovská technika totiž umožňuje měřit změny radiální rychlosti již od 1 m/s. Odtud lze pak stanovit

$$c_G = \frac{d}{\tau}.$$

V současnosti probíhá nebo se připravuje několik nákladných projektů (GEO, LIGO, NGO, VIRGO, ...) pro změření rychlosti gravitačních vln a určení směru, odkud přicházejí. Zatím ale žádné detekovány nebyly, a tak ani jejich skutečná rychlost není známa.

Gravitační interakce se chová podstatně jinak než interakce elektromagnetická. Všeobecně se soudí, že gravitační síla je jen přitažlivá, zatímco elektromagnetická síla

¹Známý Einsteinův vztah $E = mc^2$ z roku 1905 Poincaré publikoval [213] o pět let dříve jen s tím rozdílem, že na levé straně měl hustotu energie a na pravé straně specifickou hustotu.

²Poznamenejme ale, že ne všechny fyzikální interakce mají stejnou rychlost šíření. Například slabá interakce je zprostředkována intermediálními bosony W^+ , W^- a Z^0 , které mají přibližně 80–90krát větší hmotnost než proton a nemohou se tedy pohybovat rychlostí světla.

může být přitažlivá i odpuzivá. Antigravitace má ale též odpuzivý charakter, i když velice malý. Přitom to není žádná nová pátá síla, ale jen vedlejší efekt gravitační síly způsobený konečnou rychlostí gravitační interakce. Hlavní rozdíl mezi gravitační a elektromagnetickou interakcí je však v aberačních jevech.

Předpokládejme na okamžik, že hvězda na obr. 6.3 asymetricky exploduje a že rychlosti elektromagnetických vln a gravitačních vln jsou stejné (17.10), jak předpokládá obecná teorie relativity. Pak se oba typy příslušných vlnoploch budou od ní šířit stejnou rychlostí. Úhel světelné aberace α přitom bude relativně velký, viz (17.3). Dále si představme, že dalekohled na obr. 6.3 je doplněn přístrojem, který umí změřit směr, odkud gravitační vlny přicházejí. Pak zjistíme, že přicházejí ze stejného směru jako elektromagnetické vlny, pokud platí (17.10), a aberace gravitačních vln proto bude také α . Přitažlivá síla hvězdy ale paradoxně působí z nepatrně jiného směru, jinak by žádná soustava dvou těles nebyla dlouhodobě stabilní. Kdyby totiž $\alpha = \gamma$, pak by se Země vzdálila od Slunce o 150 miliónů km za 400 let (viz [168], s. 350).

Podle newtonovské mechaniky je úhel gravitační aberace γ nulový. Pokud ale platí princip kauzality, měl by být skutečný úhel gravitační aberace γ kladný, i když extrémně malý (viz (17.9)). Uvažujme např. soustavu Slunce–Jupiter, jejíž těžiště podle (5.1) leží mimo Slunce. Obě tělesa tak svým silným gravitačním polem neustále deformují prostoročas kolem sebe a musí si se zpožděním vzájemně vyměňovat informaci o svých polohách. Protože $c_G < \infty$, je Slunce přitahováno Jupiterem směrem k předchozí poloze Jupitera a Jupiter je zase přitahován Sluncem rovněž směrem k nějaké předchozí poloze Slunce (viz obr. 17.3). Podle příkladu 17.2 by měl Jupiter ze všech planet největší rychlost vzdalování přepočtenou na 1 au. To je také důvod, proč za sebou mohl zanechat nevyčištěný pás asteroidů mezi Marsem a Jupiterem (srov. [15], s. 513).

Položme si ještě otázku:

Je Země přitahována ke Slunci přesně tím směrem, kde je vidíme, nebo míří vektor této gravitační síly nepatrně mimo jeho střed?

V důsledku uvedených vlastností gravitační aberace nejsou světelné paprsky přicházející k nám od Slunce rovnoběžné s vektorem newtonovské gravitační síly mezi Sluncem a Zemí. Tyto paradoxní jevy jsou způsobeny tím, že se skutečné úhly světelné a gravitační aberace vzájemně liší. Země má 333 000krát menší hmotnost než Slunce, a tak se pohybuje v jeho téměř stacionárním gravitačním poli, i když je lokálně neustále deformuje. V tomto případě se jev gravitační aberace projevuje poměrně málo. Proto $\alpha \gg \gamma > 0$ a Slunce nás nepřitahuje v tom směru, kde je vidíme. Jak tyto paradoxní údaje interpretovat a zjistit, zda nejsou v rozporu s kauzalitou, je diskutováno v článkách [38] a [174]. Podrobněji se o těchto úkazech a jejich interpretaci pojednává též v [65].



17.4. Platí zákon zachování energie?

V kapitolách 11–15 jsme předvedli řadu příkladů, které lze interpretovat tak, že se Sluneční soustava v důsledku antigravitace pozvolna rozpíná rychlostí řádově srovnatelnou s Hubbleovou konstantou. To je zřejmě ve sporu se zákonem zachování energie (srov. (13.24)) a zákonem zachování momentu hybnosti. Vesmíru tak celková energie pozvolna, ale zato neustále narůstá.

Říká se, že zdroj temné energie, která způsobuje zrychlující se rozpínání vesmíru, není zatím znám. Existuje velké množství nejrozumnějších hypotéz (např. proměnné fundamentální fyzikální konstanty, energie vakua, působení kvintesence), které se pokoušejí vysvětlit záhadu temné energie. Jejich přehled je podán např. v [3]. Také Richard Panek [195] uvádí na s. 212 téměř 50 modelů temné energie. V této kapitole jsme předložili jinou hypotézu, která je založena na pojmu gravitační aberace a která navíc vysvětluje, *odkud se bere energie na zrychlené rozpínání vesmíru*.

Naše Galaxie i Sluneční soustava představují jedinečnou astrofyzikální laboratoř pro testování, zda platí či neplatí zákon zachování energie a zda konečná rychlost šíření gravitační interakce produkuje jako vedlejší produkt hledanou energii na všeobecné rozpínání. Na řadě konkrétních příkladů jsme ukázali, že tato energie vzniká nejenom globálně, ale i lokálně, např. v soustavě Slunce–Země se energie neustále vytváří. Myšlenka lokální expanze vesmíru se poprvé objevila již v roce 1933 v článku [179] a bude ji třeba dále ověřovat.

Poznamenejme ještě, že existují těsné binární pulzary, jejichž doba oběhu se naopak zkracuje. V tomto případě systém ztrácí pohybovou energii vyzařováním gravitačních a elektromagnetických vln, v důsledku slapů, brzděním o mezihvězdné prostředí apod. Vzniklé síly pak převládnu nad antigravitací. Rovněž různé rezonance mohou způsobit mnohem větší efekty ve srovnání s antigravitací, jejíž projevy jsou na krátkých časových škálách skutku nepatrné (viz např. (12.21), (13.2), (15.4) a (15.8)). Antigravitace však působí neustále v jakémkoliv gravitačně vázaném systému, ať už jde o asteroidy, měsíce, planety, hvězdy, galaxie, kupy galaxií a jejich nadkupy či obíhající se kupy galaxií. Pozvolna zvyšuje jeho celkovou (kinetickou + potenciální) energii. Tím přispívá k migraci planet a jejich měsíců na dlouhých časových škálách, způsobuje, že se hvězdokupy postupně „vypařují“ [119], působí proti gravitermální katastrofě galaktických kup i hvězdokup [72], snižuje frekvenci kolizí galaxií a hvězd [124], pozvolna rozpíná „kosmickou pavučinu“, stabilizuje Sluneční soustavu aj. Antigravitace také pomohla vytvořit na Zemi vhodné podmínky pro život po dobu několika miliard let, během nichž sluneční výkon stále narůstá (kapitola 13 a 14).



18. Co je vesmír

*Kosmolog nikdy nepochybuje,
ale často se mýlí.*

LEV LANDAU

18.1. Neeukleidovské modely vesmíru

Roku 1584 Giordano Bruno napsal pojednání [31], kde mj. vyslovil domněnku, že vesmír je nekonečný. Isaac Newton a mnozí další si vesmír představovali jako eukleidovský prostor \mathbb{E}^n pro $n = 3$.

V roce 1900 si však Karl Schwarzschild (viz [249], s. 66) asi jako vůbec první



Obr. 18.1. Karl Schwarzschild (1873–1916)

uvědomil, že vesmír by mohl být neeukleidovský¹ a dokonce konečný, tj. mající konečný objem. Představoval si ho jako trojrozměrnou varietu² (srov. obr. 18.2)

$$\mathbb{S}_r^3 = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{E}^4 \mid x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = r^2\} \quad (18.1)$$

pro $r > 0$, což je vlastně trojrozměrný povrch čtyřrozměrné koule o poloměru r . Varieta \mathbb{S}_r^3 má objem (viz [91], s. 55)

$$V = 2\pi^2 r^3$$

a v každém bodě a každém směru³ má stejnou křivost $1/r$ (podobně \mathbb{E}^3 má v každém bodě a každém směru nulovou křivost). To umožňuje modelovat vysokou homogenitu a izotropii vesmíru na velkých prostorových škálách.

Pro libovolné $n = 1, 2, \dots$ definujeme *sféru* (*nadsféru*) o poloměru $r > 0$ vztahem

$$\mathbb{S}_r^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{E}^{n+1} \mid x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = r^2\}.$$

Je-li $r = 1$, pak pro jednoduchost budeme psát jen \mathbb{S}^n . Na sféře \mathbb{S}^n platí známá neeukleidovská eliptická geometrie, což je obdoba sférické geometrie pro sféru \mathbb{S}^2 (viz oddíl 2.10).

Nejkratší spojnice dvou bodů variety se nazývá *geodetika*. V eukleidovském prostoru je to úsečka. Nejkratšími spojnici dvou bodů na sféře \mathbb{S}^n jsou oblouky hlavních kružnic. Geodetiky na sféře nemusí být určeny jednoznačně, např. nejkratších drah mezi severním a jižním pólem na sféře \mathbb{S}^2 je nekonečně mnoho a jsou reprezentovány poledníky.

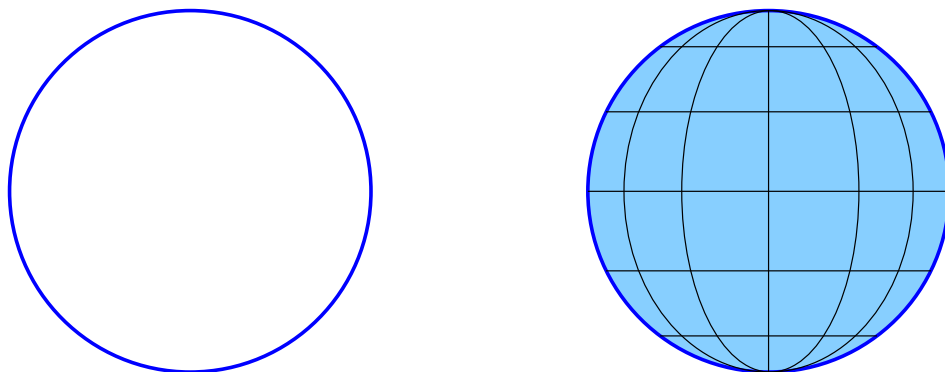
Každé dvě různé hlavní kružnice na sféře \mathbb{S}^n (tj. „přímky“ v eliptické geometrii) se protínají ve dvou protilehlých bodech. Proto v eliptické geometrii neexistují rovnoběžky. Trojúhelník, jehož strany jsou nejkratší oblouky hlavních kružnic, má součet úhlů větší než 180° . Například trojúhelník, který vznikne průnikem sféry \mathbb{S}^2 a oktantu v \mathbb{E}^3 má součet úhlů 270° .

Kružnice o poloměru R na sféře \mathbb{S}^n má obvod menší než $2\pi R$, protože poloměr kružnice měříme délkou oblouku hlavní kružnice v \mathbb{S}^n . Z pravé části obr. 18.2 je

¹Neeukleidovské geometrie vznikly v první polovině 19. století během mnoha pokusů porozumět axiomatické výstavbě eukleidovské geometrie — zejména při dokazování nezávislosti pátého Eukleidova postulátu o rovnoběžkách. Mezi jejich zakladatele patří Carl Friedrich Gauss, Nikolaj I. Lobačevskij, János Bolyai, Bernhard Riemann, Sophus Lie, Felix Klein a mnozí další. Historie rozvoje neeukleidovských geometrií je podrobně popsána v přehledovém článku [36].

²Poznamenejme, že *n-rozměrná varieta* (angl. manifold) je množina bodů takových, že pro každý její bod existuje otevřené okolí, které lze spojitě zobrazit na otevřenou množinu v \mathbb{E}^n , přičemž i inverze je spojitá. Příkladem variety je graf paraboly, jednodílný i dvojdílný hyperboloid, povrch anuloidu aj. Na druhé straně, sjednocení nadroviny $x_1 = 0$ a osy x_1 v \mathbb{E}^n není varietou pro $n > 1$. Ani množina racionálních čísel varietou není.

³Křivost sféry \mathbb{S}_r^3 v daném bodě a daném směru je rovna převrácené hodnotě poloměru příslušné oskulační kružnice.



Obr. 18.2. Jednotková kružnice vlevo je sféra $\mathbb{S}^1 = \{(x, y) \in \mathbb{E}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$. Povrch jednotkové koule vpravo je sféra $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{E}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

patrně, že rovník má délku 2π pro poloměr $R = \pi/2$ měřený od severního (či jižního) pólu ve směru poledníků sféry \mathbb{S}^2 . Rovněž plocha kruhu na \mathbb{S}^2 , povrch a objem koule v \mathbb{S}^3 , ... jsou ve stejném pořadí menší než πR^2 , $4\pi R^2$, $4\pi R^3/3$, ... Standardní vztahy známé z eukleidovské geometrie tedy na sféře \mathbb{S}^n neplatí (srov. též obr. 8.2).

Připomeňme si nyní definici metriky (vzdálenosti).

Definice 18.1. Funkce $\rho : M \times M \rightarrow \mathbb{E}^1$ se nazývá *metrika* na varietě M , jestliže platí:

1. $\rho(A, B) \geq 0 \quad \forall A, B \in M$,
2. $\rho(A, B) = 0 \iff A = B$,
3. $\rho(A, B) = \rho(B, A) \quad \forall A, B \in M$,
4. $\rho(A, B) \leq \rho(A, C) + \rho(C, B) \quad \forall A, B, C \in M$ (trojúhelníková nerovnost).

Kupříkladu v eukleidovském prostoru \mathbb{E}^n je vzdálenost definována pomocí zobecněné Pythagorovy věty

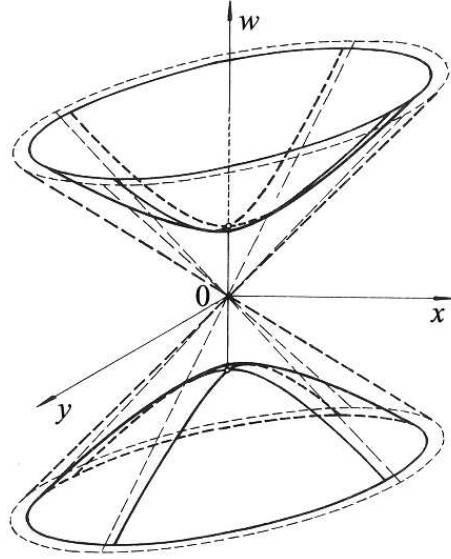
$$\rho(A, B) = \sqrt{\sum_{j=1}^n (a_j - b_j)^2} \quad \forall A = (a_1, \dots, a_n), B = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{E}^n.$$

Vzdálenost mezi dvěma body A a B na nadsféře \mathbb{S}^n je dána délkou příslušné geodetiky spojující A a B .

Karl Schwarzschild [249], s. 67, dokonce uvažoval i o vesmíru s hyperbolickou geometrií na *pseudosféře*, která se pro lepší vizualizaci obvykle znázorňuje hyperbolickou nadplochou pro $r > 0$ (srov. obr. 18.3)

$$\tilde{\mathbb{H}}_r^3 = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{E}^4 \mid x^2 + y^2 + z^2 - w^2 = -r^2\} \quad (18.2)$$

s Minkowského metrikou, kterou definujeme v (18.6). Zdůrazněme, že w ve vztahu (18.2) je prostorová souřadnice a **není to čas**, jak by se mohlo zdát z často



Obr. 18.3. Dvojdílný hyperboloid $x^2 + y^2 - w^2 = -1$ s imaginárním „poloměrem“ i , jak se uvádí ve starších publikacích.

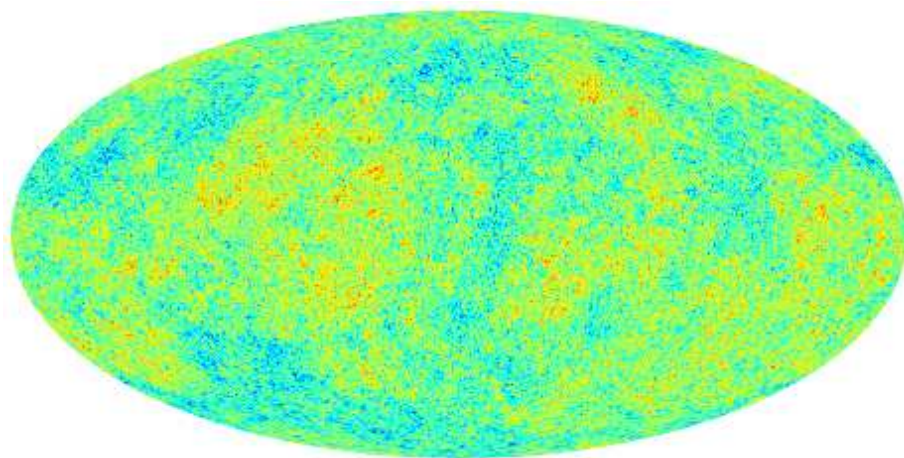
užívaného a matoucího označení $t = w$ (viz např. [286], s. 95). Kdyby totiž w byl čas, pak by příslušná prostorová varieta $w = \text{konst.}$ měla dimenzi jen 2. V případě $r = 1$ budeme opět pro jednoduchost vynechávat dolní index r .

Ukažme si nyní, jak lze sféru \mathbb{S}_r^3 formálně transformovat na část dvojdílné hyperbolické nadplochy $\tilde{\mathbb{H}}_r^3$. Zavedeme-li hypersférické souřadnice (tj. přirozené zobecnění standardních sférických souřadnic)

$$\begin{aligned} x &= r \sin \chi \sin \theta \cos \phi, \\ y &= r \sin \chi \sin \theta \sin \phi, \\ z &= r \sin \chi \cos \theta, \\ w &= r \cos \chi, \end{aligned}$$

pak pro $\chi, \theta \in [-\pi/2, \pi/2]$ a $\phi \in [0, 2\pi]$ podle (18.1) a vztahu $\cos^2 \phi + \sin^2 \phi = 1$ je $(x, y, z, w) \in \mathbb{S}_r^3$. Použijeme-li jednoduché transformace $w \mapsto iw$, $r \mapsto ir$ a $\chi \mapsto -i\chi$ (viz [199], s. 299; [227], s. 826) a uvážíme-li, že $\cos \chi = \cosh i\chi$ a $\sin \chi = -i \sinh(i\chi)$, pak dostaneme $iw = ir \cos(-i\chi) = ir \cosh(-i^2\chi)$, což dává $(x, y, z, w) \in \tilde{\mathbb{H}}_r^3$, kde

$$\begin{aligned} x &= r \sinh \chi \sin \theta \cos \phi, \\ y &= r \sinh \chi \sin \theta \sin \phi, \\ z &= r \sinh \chi \cos \theta, \\ w &= r \cosh \chi. \end{aligned}$$



Obr. 18.4. Fluktuace v teplotě ≈ 2.73 K reliktního záření odpovídající červenému posuvu $z=1089$. Záření vzniklo v době, kdy byl vesmír 1090krát menší a měl průměrnou teplotu téměř 3000 K (foto sonda Planck).

Body (x, y, z, w) určené těmito vztahy leží na hyperbolické nadploše $\tilde{\mathbb{H}}_r^3$, jak lze ověřit pomocí (18.2) a vztahů $\cos^2 \phi + \sin^2 \phi = 1$ a $\cosh^2 \chi - \sinh^2 \chi = 1$.

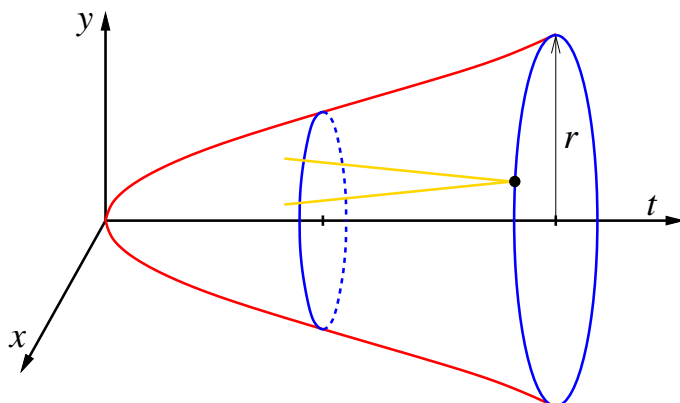


18.2. Izotropie a homogenita vesmíru

Podle *Einsteinova kosmologického principu* (viz [183]) je vesmír na velkých prostorových škálách pro pevný čas homogenní a izotropní. *Homogenita* je vyjádřena translační symetrií (tj. vesmír má v každém bodě stejnou hustotu, tlak apod.), zatímco *izotropie* je vyjádřena rotační symetrií (tj. v žádném bodě nejsou preferované směry a pozorovatel není schopen rozlišit jeden směr od druhého pomocí lokálních fyzikálních měření).

Gravitace v mírně nehomogenním prostředí má však tendenci vytvářet dlouhá vlákna. Například existuje dlouhé vlákno galaxií (angl. *Sloan Great Wall*) dlouhé 1.37 miliardy světelných let. To znamená, že skutečný vesmír není homogenní ani na velkorozměrových škálách, na nichž připomíná spíše jakousi kosmickou pavučinu. Relikt ní záření se také od dokonalé izotropie nepatrně liší, což zjistila nejprve sonda COBE, pak WMAP a nedávno ještě sonda Planck (viz obr. 18.4). Navíc je mírně polarizované. Ve standardním kosmologickém modelu se však homogenita a izotropie vesmíru předpokládá, protože jinak by se model značně zkomplikoval a těžko bychom něco spočítali.

Matematické modely vesmíru, které splňují kosmologický princip, jsou až na velikost pouze tři: sféra \mathbb{S}_r^3 , eukleidovský prostor \mathbb{E}^3 a pseudosféra \mathbb{H}_r^3 . Jim po řadě odpo-



Obr. 18.5. Červeně je vyznačen model prostoročasu, žlutě model pozorovatelného vesmíru a modře odpovídající prostor $\mathbb{S}^1_{r(t)}$, tj. model vesmíru s kladnou křivostí a poloměrem $r = r(t)$ v čase t . Vše je zredukováno o 2 prostorové dimenze.

vídá index křivosti 1, 0 a -1 vystupující ve Friedmannově rovnici (10.5). Tyto variety mají maximální grupu symetrií, která se definuje pomocí šesti lineárně nezávislých Killingových polí (viz např. [115], [287]). Dosti obtížně si lze však představit hyperbolickou geometrii pseudosféry \mathbb{H}^3_r , která je pouze pro lepší vizualizaci reprezentována různými modely, např. hyperbolickou nadplochou $\tilde{\mathbb{H}}^3_r$. Podrobněji se tomu budeme věnovat v oddílech 18.4 a 18.5.



18.3. Nejednoznačnost pojmu vesmír

Termín vesmír se v kosmologii používá v různých významech: skutečný prostoročas, skutečný prostor (tj. prostoročas pro pevný čas) a pozorovatelný vesmír, který vlastně vidíme jen v projekci na nebeskou sféru. To jsou 3 zcela odlišné objekty. Jejich matematické modely jsou také 3 naprosto rozdílné variety (viz obr. 18.5). Dohromady je to tedy 6 různých objektů, pro něž zatím bohužel nemáme ustálenou českou terminologii. První tři obsahují skutečnou hmotu, zatímco další tři jsou jen abstraktní matematické idealizace.

V souladu s Einsteinovým kosmologickým principem z předchozího oddílu budeme pod *vesmírem* rozumět řez skutečným prostoročasem odpovídající pevnému časovému okamžiku (tj. vesmír bude izochrona v prostoročasu pro $t = \text{konst.}$). Například pro kladný index křivosti je odpovídající matematický model vesmíru nadplocha \mathbb{S}^3_r pro pevné $r = r(t) > 0$, což je trojrozměrná varieta ve čtyřrozměrném prostoru \mathbb{E}^4 (srov. obr. 18.2). Model odpovídajícího prostoročasu v \mathbb{E}^5 má dimenzi 4 a model pozorovatelného vesmíru má dimenzi 3 (srov. obr. 18.5).

Všech 6 výše uvedených objektů, pro které se v literatuře běžně užívá jen jeden termín „vesmír“, je třeba důsledně rozlišovat, jinak může dojít k řadě nedorozumění. Kupříkladu při zjišťování křivosti vesmíru se někdy studuje součet úhlů ve velkém pomyslném trojúhelníku v pozorovatelném vesmíru. Pozorovatelný vesmír ale není homogenní, protože má pro různé červené posuvy z různou hustotu, a je to tedy zcela odlišný objekt než vesmír jako samotný prostor. Zcela nesprávně se tak někteří kosmologové pokoušejí ve viditelném vesmíru odhadovat úhly α, β, γ ve vyšetřovaném trojúhelníku a počítat jejich součet $\alpha + \beta + \gamma$. Tímto způsobem nelze potvrdit eliptickou (sférickou), eukleidovskou či hyperbolickou geometrii vesmíru. Vyšetřovaný trojúhelník se musí uvažovat ve vesmíru, ze kterého ale vlastně vidíme jen bezprostřední okolí (striktně vzato pouze jediný bod, v němž se právě nacházíme), což stanovení úhlů znemožňuje.

Zdůrazněme ještě, že pozorovatelný vesmír překvapivě nelze modelovat trojrozměrným eukleidovským prostorem. Celá situace je nakreslena na obr. 18.5, pokud ubereme 2 prostorové dimenze. Vidíme, že pozorovatelný vesmír lze modelovat kuželem, který se směrem k počátku souřadnic deformuje. Místo sfér $\mathbb{S}_{r(t)}^3$ stačí uvažovat jen jejich hlavní kružnice $\mathbb{S}_{r(t)}^1$ se středem na časové ose, které obsahují sledovanou galaxii (srov. věty 18.2 a 18.3).

Odhaduje se, že reliktní záření vzniklo v době $t_1 = 380\,000$ let po Velkém třesku a že stáří vesmíru je $t_0 = 13.82$ Gyr (viz např. [60], [211]). Potom pro naměřený červený posuv $z = 1089$ obdržíme

$$\frac{t_1 a(t_0)}{t_0 a(t_1)} = \frac{t_1}{t_0} (z + 1) = \frac{380\,000 \cdot 1090}{13.82 \cdot 10^9} = \frac{1}{33.3},$$

kde první rovnost přímo plyne (viz [187], s. 730; [199], s. 96) z definice červeného posuvu. Odtud dostáváme, že

$$33.3 \cdot \frac{a(t_0)}{t_0} = \frac{a(t_1)}{t_1}, \quad (18.3)$$

a tak průměrná rychlost rozpínání vesmíru na intervalu $(0, t_1)$ byla 33.3krát větší než na intervalu $(0, t_0)$. To také naznačuje, že expanzní funkce měla mnohem větší derivaci v blízkosti počátku než v současnosti (viz obr. 13.4 a 18.5).

Bylo by chybou se domnívat, že známá mapa reliktního záření z obr. 18.4 zobrazuje celý vesmír, jak vypadal 380 000 let po Velkém třesku. Mapa znázorňuje jen dvojrozměrný řez trojrozměrné variety odpovídající vesmíru pro $z \approx 1089$. Pro $k = 1$ byl poloměr vesmíru 1090krát menší, než je dnes. Poloměr byl stejný jako poloměr jakékoliv hlavní kružnice (např. rovníku) v okamžiku vyslání reliktních fotonů. Vše navíc pozorujeme jen v projekci na nebeskou sféru. Například reliktní záření vzniklé kdysi v našem okolí na mapě reliktního záření není. Rovněž zde není reliktní záření z míst, kde se dnes nalézají všech 10^{12} galaxií z pozorovatelného vesmíru. Na každé

z těchto galaxií bychom v současnosti pozorovali obecně jinou mapu fluktuací reliktního záření. Na Zemi máme tedy představu jen o tom, jak vypadala jen zcela nepatrná část raného vesmíru.

Často se také píše, že vesmír nemá žádný střed. To je podobné jako tvrdit, že kružnice nemá střed. Kružnice samozřejmě střed má, i když do ní nepatří. Proto i model vesmíru \mathbb{S}_r^3 má svůj střed v počátku souřadnic prostoru \mathbb{E}^4 (viz (18.1) a (18.2)). Střed nafukujícího se balónku v modelu rozpínajícího se vesmíru je pak reprezentován Velkým třeskem na počáteční časové vrstvě (viz obr. 18.5 a 20.4). Sféru

$$\mathbb{S}_{r(t)}^3 = \{(x_1, x_2, y_1, y_2) \in \mathbb{E}^4 \mid x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2 = r^2(t)\}$$

se vzrůstajícím poloměrem $r = r(t)$ lze pomocí substituce $x = x_1 + ix_2$ a $y = y_1 + iy_2$ ztotožnit s pouhou kružnicí v komplexním oboru

$$\mathbb{K}_{r(t)}^1 = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid |x|^2 + |y|^2 = r^2(t)\},$$

kde \mathbb{C} je množina komplexních čísel (Gaussova rovina). Takto jednoduše lze v čase t modelovat náš vesmír, pokud má kladnou křivost. V tomto případě nejvzdálenější bod vesmíru od Země (tzv. *horizont*) leží na průsečíku všech hlavních kružnic sféry \mathbb{S}_r^3 , které procházejí Zemí. Jeho vzdálenost od nás je $\pi r \approx 3r$, tj. je přibližně $3\times$ dále, než je současný poloměr vesmíru.

Na závěr tohoto oddílu ještě zdůrazněme, že *Země je ve středu pozorovatelného vesmíru*, který je konečný. Horizont pozorovatelného vesmíru je ale zcela jiný objekt (viz obr. 18.4) než výše zmíněný horizont vesmíru.



18.4. Hyperbolický prostor

V tomto oddíle se budeme věnovat Lobačevského hyperbolické geometrii na pseudosférách. Představit si hyperbolickou geometrii je však mnohem obtížnější než eliptickou geometrii na sférách. Hlavním důvodem je skutečnost, že maximálně symetrické hyperbolické variety nelze na rozdíl od sfér izometricky⁴ vložit do eukleidovských prostorů dimenze o jednu vyšší (viz (18.1)).

Již v roce 1901 David Hilbert dokázal (viz [89]), že v trojrozměrném prostoru \mathbb{E}^3 neexistuje úplná hladká plocha s konstantní zápornou Gaussovou křivostí definovanou jako součin křivostí ve dvou kolmých hlavních směrech (viz [220]). Poznamenejme, že sféra \mathbb{S}_r^2 má kladnou Gaussovu křivost $r^{-2} = r^{-1} \cdot r^{-1}$, protože všechny

⁴*Izometrie* je spojitě zobrazení $f : M \rightarrow M$, jehož inverze existuje a je také spojitá, zachovávající na varietě M vzdálenosti. Jinými slovy $\rho(f(A), f(B)) = \rho(A, B)$ pro všechna $A, B \in M$, kde ρ je metrika na M .

(hlavní) oskulační kružnice mají poloměr r . Přehled dvojrozměrných variet v \mathbb{E}^3 se zápornou konstantní Gaussovou křivostí je podán v [178]. Všechny ale mají hrany (srov. obr. 18.7) nebo vrcholy, což porušuje požadovanou hladkost modelu vesmíru.

Hilbert tak vlastně dokázal, že neexistuje izometrické vložení (angl. isometric embedding) hyperbolické roviny \mathbb{H}^2 do trojrozměrného prostoru \mathbb{E}^3 , zatímco sféru \mathbb{S}^2 takto vložit do \mathbb{E}^3 lze [115]. Podobně známou Kleinovu láhev (tj. dvojrozměrnou neorientovatelnou uzavřenou plochu) nelze vložit do \mathbb{E}^3 , ale lze ji vložit do \mathbb{E}^4 . Dodejme, že její trojrozměrný (obvykle předváděný skleněný) model není varieta, protože tato plocha protíná sama sebe. Proto je velice obtížné si udělat nějakou intuitivní představu o maximálně symetrických hyperbolických varietách.

Začneme proto jednoduchým modelem hyperbolické roviny \mathbb{H}^2 . V eukleidovské rovině zvolme kružnici k o poloměru 1. Model hyperbolické roviny se nachází pouze uvnitř této hraniční kružnice, která však už do hyperbolické roviny nepatří (viz obr. 18.6). Geodetiky (tj. „přímky“ v hyperbolické geometrii) jsou podobně jako v oddílu 18.1 opět reprezentovány kruhovými oblouky, jejichž konce jsou navíc kolmé ke k . Přitom oblouky mohou degenerovat na úsečky, jako např. vyznačený průměr na obr. 18.6 vpravo. Snadno lze zjistit, že dvěma různými body A a B prochází právě jeden kruhový oblouk, který je ve svých limitních koncových bodech $P \in k$ a $Q \in k$ kolmý na k . Vzdálenost dvou bodů A a B je pak dána vztahem (viz [201], s. 36)

$$d(A, B) = \left| \ln \frac{AQ \cdot BP}{AP \cdot BQ} \right|, \quad (18.4)$$

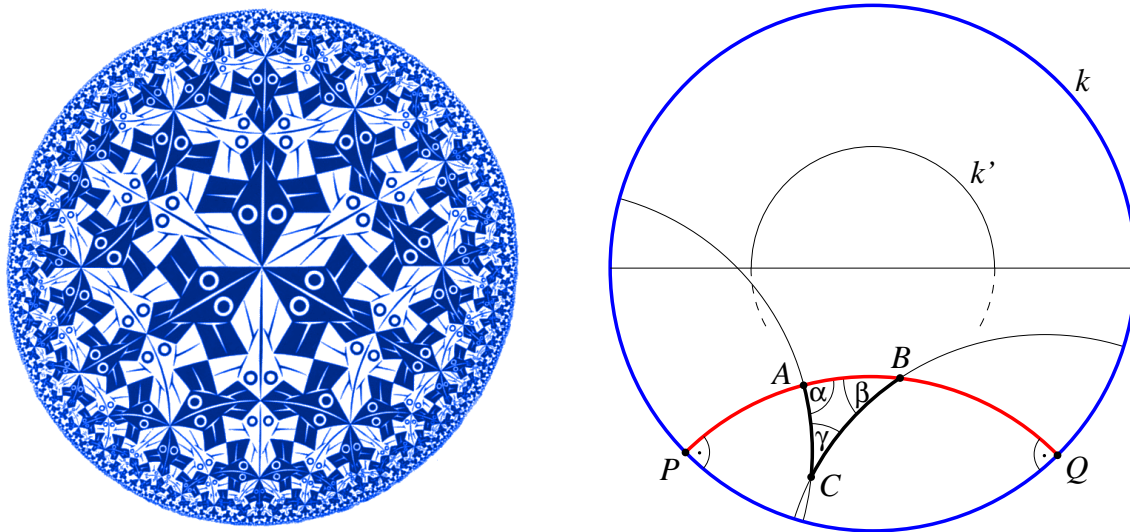
kde \ln je přirozený logaritmus a AP , AQ , BP a BQ označují standardní eukleidovské vzdálenosti v rovině.

Lze ukázat, že takto definovaná funkce splňuje podmínky 1–4 z definice 18.1. Vidíme, že d je nezáporná funkce a že $d(A, B) = 0$ právě tehdy, když $A = B$. Symetrie $d(A, B) = d(B, A)$ je také zřejmá. Dokázat trojúhelníkovou nerovnost $d(A, B) \leq d(A, C) + d(B, C)$ je ale technicky poněkud náročnější.

Kružnice o poloměru R v metrice (18.4) má poloměr větší než $2\pi R$. Protože je hraniční kružnice k jednotková ve standardní eukleidovské metrice, pak soustředná kružnice k' o poloměru $R' = 1$ v hyperbolické metrice (18.4) má délku 7.384... místo obvyklých $2\pi = 6.283...$ (viz obr. 18.6).⁵ Je to vlastně podobné měření délky kružnice nakreslené na ploše kolem sedlového bodu. Délka jednotkové kružnice o libovolném středu v hyperbolické rovině je vždy stejná v metrice (18.4).

Křivka, která má konstantní eukleidovskou vzdálenost od hyperbolické přímky, není přímka (tj. geodetika) v hyperbolické rovině, viz [36], s. 88. Poznamenejme ještě, že existují i jiné reprezentace hyperbolické roviny (viz např. [201], s. 38).

⁵Kdybychom zvolili body P, A, B, Q na vodorovném průměru kružnice k z obr. 18.6 tak, že A je ve středu, $P, Q \in k$, $B \in k'$ a $R' = AB$ je poloměr kružnice k' , pak podle (18.4) platí $1 = \ln(1 \cdot (1 + R')/(1 \cdot (1 - R')))$. Odtud plyne, že kružnice k' má v eukleidovské metrice poloměr $R' = (e - 1)/(e + 1) = 0.462...$, kde $e = 2.718...$ je Eulerovo číslo.



Obr. 18.6. Všechny ryby na Escherově obrazu hyperbolické roviny mají v metrice (18.4) shodnou velikost. Obrazně řečeno, pokud byste v hyperbolické rovině plavali, ryby ve vašem bezprostředním okolí se vám budou jevit stále stejně velké. Můžete plavat libovolným směrem libovolně daleko, protože hraniční kružnice k je nekonečně vzdálená. Na obrázku vpravo jsou znázorněny nejkratší spojnice reprezentované kruhovými oblouky, které jsou v koncových bodech kolmé k hraniční kružnici k . Součet úhlů v trojúhelníku ABC je $\alpha + \beta + \gamma < 180^\circ$.

V práci [36] se uvádí šest dosti odlišných reprezentací hyperbolické roviny \mathbb{H}^2 ilustrujících, jak hyperbolickou geometrii modelovat. Přitom každý model má jinou metriku. Jeden z nich je na obr. 18.3, jiný známý model je Poincarého disk (viz [77], s. 475–476), který připomíná situaci z obr. 18.6.

Uvažujme nyní obecnou dimenzi n . Pro $a = (a_1, \dots, a_n)$, $b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{E}^n$ označme *skalární součin*

$$(a, b) = \sum_{j=1}^n a_j b_j$$

a nechť $\|a\| = \sqrt{(a, a)}$. Hyperbolická geometrie se obvykle znázorňuje varietou (viz obr. 18.3 pro $n = 2$ a vztah (18.2) pro $n = 3$)

$$\tilde{\mathbb{H}}_r^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{E}^{n+1} \mid \|x\|^2 - x_{n+1}^2 = -r^2\}, \quad (18.5)$$

kde $r > 0$ a místo standardní eukleidovské metriky v \mathbb{E}^{n+1} se uvažuje *Minkowského metrika*

$$\mu(A, B) = (\|a - b\|^2 - (a_{n+1} - b_{n+1})^2)^{1/2} \quad (18.6)$$

pro $A = (a_1, \dots, a_{n+1})$, $B = (b_1, \dots, b_{n+1}) \in \tilde{\mathbb{H}}_r^n$. I když vztah (18.5) obsahuje rozdíl čtverců, je funkce μ nezáporná, jak bude patrné z následující věty. Připomeňme znovu, že souřadnice x_{n+1} není čas, jak je běžné v teorii relativity, ale obyčejná prostorová souřadnice. Varieta $\tilde{\mathbb{H}}_r^n$ zřejmě není souvislá. Skládá se ze dvou zrcadlově symetrických nadploch, které pro jednoduchost ztotožníme předpisem $x \equiv -x \in \tilde{\mathbb{H}}_r^n$, abychom se mohli zabývat jen tou komponentou, pro niž $x_{n+1} > 0$. Opět budeme psát jen $\tilde{\mathbb{H}}^n$, pokud $r = 1$.

Věta 18.1. *Funkce μ je metrika na $\tilde{\mathbb{H}}^n$.*

D ů k a z. Je třeba ověřit podmínky 1–4 z definice 18.1. Nejprve dokážeme, že pro $A, B \in \tilde{\mathbb{H}}^n$ je hodnota $\mu(A, B)$ nezáporná. Ze vztahu (18.6) dostaneme

$$\begin{aligned} (\mu(A, B))^2 &= \|a\|^2 - 2(a, b) + \|b\|^2 - a_{n+1}^2 + 2a_{n+1}b_{n+1} - b_{n+1}^2 \\ &= 2(a_{n+1}b_{n+1} - (a, b) - 1), \end{aligned} \quad (18.7)$$

kde jsme podle (18.5) využili toho, že

$$a_{n+1}^2 = \|a\|^2 + 1 \quad \text{a} \quad b_{n+1}^2 = \|b\|^2 + 1, \quad (18.8)$$

což je vlastně vztah pro součet dvou čtverců. Čili

$$a_{n+1}^2 b_{n+1}^2 = (\|a\|^2 + 1)(\|b\|^2 + 1) = (\|a\|\|b\| + 1)^2 + (\|a\| - \|b\|)^2. \quad (18.9)$$

Odtud a z Cauchyovy–Schwarzovy nerovnosti $|(a, b)| \leq \|a\|\|b\|$ pro kladná a_{n+1} a b_{n+1} vyplývá, že

$$a_{n+1}b_{n+1} \geq \|a\|\|b\| + 1 \geq |(a, b)| + 1 \geq (a, b) + 1. \quad (18.10)$$

Vidíme, že pravá strana v (18.7) je nezáporná, a tak je odmocnina v (18.6) nezáporná.

Dále ukážeme, že $\mu(A, B) = 0$ právě tehdy, když $A = B$. Je-li $\mu(A, B) = 0$, pak pomocí (18.7) obdržíme

$$(a, b) + 1 = a_{n+1}b_{n+1}.$$

Podle (18.10) tedy platí rovnost

$$a_{n+1}b_{n+1} = \|a\|\|b\| + 1.$$

Odtud a z (18.9) plyne, že $\|a\| = \|b\|$, a podle (18.8) máme $a_{n+1} = b_{n+1} > 0$. Z definice metriky (18.6) je tak patrné, že $a = b$, což dává $A = B$.

Z definice (18.6) ihned odvodíme i obrácenou implikaci, tj. platí $\mu(A, A) = 0$.

Symetrie $\mu(A, B) = \mu(B, A)$ je evidentní a důkaz trojúhelníkové nerovnosti probíhá standardním (i když technicky poněkud náročnějším) způsobem pomocí vztahů (18.7) až (18.10). \square

Přestože vztah (18.6) obsahuje rozdíl čtverců, dokázali jsme, že μ je nezáporná funkce na varietě $\tilde{\mathbb{H}}^n$. Funkci μ lze vztahem (18.6) přirozeně rozšířit i dovnitř kužele $x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq x_{n+1}^2$ (srov. obr. 18.3), kde ale není metrikou. Hodnota $\mu(A, B)$ totiž může být nulová pro $A \neq B$ a neplatí zde běžná trojúhelníková nerovnost. Pro některé trojice bodů dokonce platí obrácená trojúhelníková nerovnost⁶

$$\mu(A, B) \geq \mu(A, C) + \mu(B, C)$$

(viz [201], s. 420), takže se místo metrika často říká jen *pseudometrika*.

Ve starší literatuře se občas chápe dvojdielný hyperboloid $x^2 + y^2 - w^2 = -1$ z obr. 18.3 jako pseudosféra s imaginárním „poloměrem“ i. Poznamenejme ještě, že v teorii relativity se kuželové ploše $x^2 + y^2 = t^2$ a též nadploše $x^2 + y^2 + z^2 = t^2$ pro čas $t = w$ říká *světelný kužel* pro jednotkovou rychlost světla. Je to množina bodů A , pro něž $\mu(A, 0) = 0$.

Každá z obou komponent $\tilde{\mathbb{H}}^n$ reprezentuje graf konvexní (resp. konkávní) funkce v \mathbb{E}^{n+1} . Přesto je ale na modelu pseudosféry $\tilde{\mathbb{H}}^n$ součet úhlů v trojúhelníku, jehož strany jsou nejkratší spojnice (geodetiky) v Minkowského metrice (18.6), menší než 180° . Důkaz je uveden v [36], s. 88.



18.5. Maximálně symetrické variety

V tomto oddílu podáme přehled některých matematických výsledků týkajících se těch nejsymetrickějších variet \mathbb{S}^n , \mathbb{E}^n a \mathbb{H}^n , tj. těch, které mají maximální počet symetrií [115]. Kulovou plochu \mathbb{S}^2 zřejmě nelze izometricky narovnat do roviny \mathbb{E}^2 (viz [147]). Sféru \mathbb{S}^n lze však izometricky vložit do \mathbb{E}^{n+1} . Podívejme se nyní zevrubněji na to, jak lze do sebe izometricky vkládat sféry a pseudosféry.

Věta 18.2. *Pro $r \leq R$ lze sféru \mathbb{S}_r^n izometricky vložit do \mathbb{S}_R^{n+1} .*

Důkaz je konstruktivní, ale předvádět jej nebudeme, i když je snadný. Například na obr. 18.2 vpravo jsou dvě kružnice odpovídající rovnoběžkám $\pm 60^\circ$ izometricky vloženy do dvojrozměrné sféry \mathbb{S}^2 . Každou sféru lze tedy izometricky vložit do větší sféry, pokud zvýšíme dimenzi o jedničku. Jinými slovy, řezy sféry \mathbb{S}_r^n nadrovinami $x_{n+1} = C$, kde C je konstanta a $|C| < r$, jsou sféry dimenze $n - 1$.

Podobně řezy variety $\tilde{\mathbb{H}}_r^n$ nadrovinami $x_{n+1} = C$, kde C je konstanta a $|C| > r$, jsou sféry dimenze $n - 1$. Pro pseudosféry platí podobná věta jako pro sféry.

Věta 18.3. *Pro $r \leq R$ lze pseudosféru $\tilde{\mathbb{H}}_r^n$ izometricky vložit do $\tilde{\mathbb{H}}_R^{n+1}$.*

Ukažme nyní, jaké vztahy platí mezi eukleidovským prostorem⁷ a pseudosférou (viz [26], s. 3).

⁶S ostrou obrácenou trojúhelníkovou nerovností souvisí známý paradox dvojčat [201].

⁷Pro $n = 1$ lze \mathbb{E}^1 izometricky vložit do \mathbb{H}^1 a naopak. Netriviální hyperbolické geometrie jsou tak jen v dimenzích $n > 1$.

Věta 18.4. *Prostor \mathbb{E}^n lze izometricky vložit do \mathbb{H}^{n+1} .*

Opačná izometrická vložení ale nejsou tak jednoduchá. V roce 1955 Danilo Blanuša dokázal, že hyperbolickou rovinu \mathbb{H}^2 lze izometricky vložit do prostoru \mathbb{E}^6 (viz [19]). Pokud bychom se tedy proměnili na šestirozměrnou bytost v \mathbb{E}^6 (s eukleidovskou metrikou), mohli bychom obdivovat v celé kráse půvabnou symetrii pseudosféry \mathbb{H}^2 , podobně jakožto trojrozměrné bytosti se kocháme nádhernou symetrií sféry \mathbb{S}^2 . Zatím není známo, zda lze dimenzi 6 snížit. Blanušovo tvrzení ale zobecnil David Brander [26] takto:

Věta 18.5. *Pro $n > 1$ lze pseudosféru \mathbb{H}^n izometricky vložit do \mathbb{E}^{6n-6} .*

Opět není známo, zda lze dimenzi $6n - 6$ snížit. Varietu \mathbb{S}^3 , resp. \mathbb{H}^3 , která eventuálně modeluje náš vesmír pro pevný čas, lze tedy podle předchozí věty izometricky vložit do eukleidovského prostoru \mathbb{E}^4 , resp. \mathbb{E}^{12} , tj.

$$\mathbb{S}^3 \hookrightarrow \mathbb{E}^4, \quad \mathbb{H}^3 \hookrightarrow \mathbb{E}^{12}. \quad (18.11)$$

Zde symbol \hookrightarrow označuje izometrické vložení. Ve 12rozměrném eukleidovském prostoru budou vzdálenosti na \mathbb{H}^3 skutečné a nezkreslené. Pseudosféra \mathbb{H}^3 je tedy dosti exotický objekt a jakožto 12rozměrné bytosti bychom se mohli přesvědčit o její maximální symetrii. Vizualizace pseudosféry \mathbb{H}^3 tak, aby nedošlo k deformaci vzdáleností, je proto nesmírně obtížná. Na druhé straně je mnohem snazší si představit variety \mathbb{E}^3 a \mathbb{S}^3 , které jsou dalšími kandidáty pro popis vesmíru, v němž nejsou žádné privilegované body ani směry.

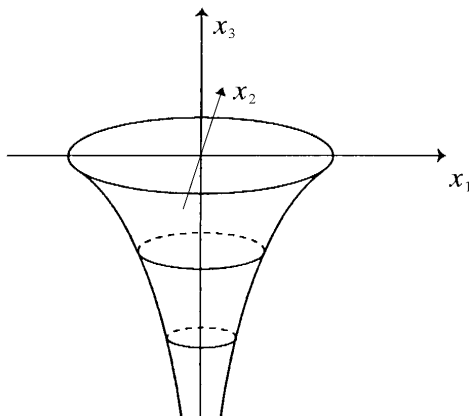
V [153] je dokázána věta, že každá n -rozměrná varieta v \mathbb{E}^{n+1} , která má v každém bodě a v každém hlavním směru stejnou křivost, je nutně sféra \mathbb{S}_r^n nebo nadrovina v \mathbb{E}^{n+1} . Protože pseudosféru \mathbb{H}^n nelze vložit do \mathbb{E}^{n+1} pro $n > 1$, předpoklady věty nejsou pro ni splněny.

Plocha na obr. 18.7 má zápornou konstantní Gaussovu křivost -1 . Vznikne rotací *traktrix*⁸ kolem osy x_3 , která je pro $x_1 \in (0, 1]$ definována rovnicí

$$x_3 = \ln \frac{1 - \sqrt{1 - x_1^2}}{x_1} + \sqrt{1 - x_1^2}.$$

Existují i jiná, např. parametrická vyjádření [153], s. 530. Na rozdíl od pseudosféry \mathbb{H}^2 má podle [178], s. 33, příslušná rotační plocha konečný povrch i objem, jak již věděl Christian Huygens v roce 1639 (viz [171], s. 324). Každý její bod je sedlový. Říká se jí někdy také pseudosféra podobně jako nadploše (18.5), která má ale nekonečný objem. Horní kruhová hrana na obr. 18.7 do této variety nepatří a varietu nelze za ni hladce prodloužit tak, aby Gaussova křivost zůstala (-1) . Nemůžeme se tedy v této

⁸Traktrix (vlečnou křivku) si lze představit tak, že na papír s nakreslenými osami x_1 a x_3 položíme hodinky na řetízku tak, aby hodinky ležely na ose x_1 a volný konec napnutého řetízku splýval s počátkem souřadnic. Posouváme-li tento volný konec po ose x_3 v záporném směru, hodinky se k ní budou přibližovat, aniž ji kdy dosáhnou.



Obr. 18.7. Plocha vzniklá rotací křivky traktrix má ve všech bodech konstantní Gaussovu křivost (-1) . Vidíme, že křivosti v hlavních směrech se liší, a vnější pozorovatel tedy zjistí, že plocha není izotropní. Zjistí to i vnitřní pozorovatel např. v blízkosti horní hrany.

ploše neomezeně pohybovat „vzhůru“, a proto není izotropní. Také kdybychom na ní zvolili bod a kolem něj opsali nesmírně malou kružnici, mohla by nastat situace, že by kružnice procházela vlastním středem pro $x_3 \ll 0$. Dvojměrné bytosti žijící na této varietě by tak poznaly, že jejich prostor není izotropní. Jako kandidát zakřiveného prostoru popisujícího náš vesmír se někdy také uvádí torus, jednodílný hyperboloid (připomínající svým tvarem chladicí věž v temelínské elektrárně) apod. Tyto variety ale nejsou ve všech bodech a ve všech hlavních směrech stejně zakřivené. Vlastnostem geodetik na hyperbolických varietách se věnuje Maryam Mirzakhaniová⁹ ve své dizertaci vypracované na Harvard University v roce 2004.

Dodejme ještě, že jednodílný hyperboloid $x^2 + y^2 - w^2 = 1$ má všude zápornou Gaussovu křivost a dvojdílný hyperboloid z obr. 18.3 ji má všude kladnou. Gaussova křivost ale nerozlišuje na varietě mezi směry, zatímco tzv. sekcionální křivost ano.¹⁰ Maximálně symetrické variety \mathbb{S}_r^n , \mathbb{E}^n a \mathbb{H}_r^n mají pro $r > 0$ konstantní sekcionální křivost $1/r^2, 0, -1/r^2$, kterou nazveme *prostorovou křivostí*.

Variety \mathbb{E}^3 a \mathbb{H}_r^3 mají nekonečný objem. Vesmír ale nemohl být po svém vzniku nejprve konečný a pak se skokem změnit na nekonečný. Navíc si lze jen těžko představit, že by skutečný nekonečný vesmír měl v daném okamžiku po Velkém třesku ve všech bodech stejnou teplotu, tlak, hustotu¹¹ apod., jak požaduje kosmologický princip. To by se informace musela šířit nekonečnou rychlostí. Proto se nejpravděpodobnějším modelem našeho vesmíru jeví sféra \mathbb{S}_r^3 .



⁹V roce 2014 jako první žena v historii získala Fieldsovu medaili za matematiku (obdobu Nobelovy ceny). Je snachou současného předsedy České astronomické společnosti Jana Vondráka.

¹⁰Sekcionální křivost variety v daném bodě je funkcí dvou lineárně nezávislých vektorů v a w a vyjadřuje Gaussovu křivost dvojrozměrné podvariety s tečnými vektory v a w (viz [115], s. 143).

¹¹Tyto veličiny by navíc měly nabývat libovolně velkých hodnot v nekonečně mnoha bodech těsně po Velkém třesku.

19. Kritika standardního kosmologického modelu

*Kritizovat je snadné,
těžší je něco vytvořit.*

Ústřední motto

19.1. Standardní matematický kosmologický model

Cílem této kapitoly je ukázat, že předkládaná množství temné hmoty a temné energie mohou být dosti zkreslena chybou matematického modelu rozpínání vesmíru. V současnosti se v kosmologii nejvíce preferuje tzv. Λ CDM model (angl. Lambda Cold Dark Matter model), který vychází z Friedmannovy rovnice (10.5). Alexander Friedmann [66] ji v roce 1922 odvodil z Einsteinových rovnic pro maximálně symetrický vesmír, který je izotropní pro každý pevný časový okamžik (kapitola 18). Jde



Obr. 19.1. Alexander Friedmann (1888–1925)

o nelineární obyčejnou diferenciální rovnici 1. řádu pro neznámou dostatečně hladkou *expanzní funkci* $a = a(t) > 0$ popisující rozpínání vesmíru

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G\rho}{3} + \frac{\Lambda c^2}{3} - \frac{kc^2}{a^2}, \quad (19.1)$$

kde $\rho = \rho(t) > 0$ označuje střední hustotu látky ve vesmíru v čase t , G gravitační konstantu, Λ kosmologickou konstantu, c rychlost světla ve vakuu, k/a^2 je prostorová křivost a k je index křivosti ($k = 0$ odpovídá \mathbb{E}^3 a $k = 1$ nadsféře \mathbb{S}_r^3 s obecně proměnným poloměrem $r = r(t) = a(t)$). Poznamenejme ale, že Friedmann neuvážoval v [66] případ $k = 0$.

Pomocí rovnice (19.1) Friedmann popsal dynamické chování vesmíru jako alternativu proti Einsteinovu stacionárnímu vesmíru. V roce 1924 publikoval další článek, kde připouští i záporný index křivosti $k = -1$, ale rovnici (19.1) odvozuje pouze pro zápornou hustotu hmoty (viz [67], s. 2006) a není tedy jasné, jak takovýto předpoklad splnit.¹ Naštěstí lze rovnici (19.1) studovat i pro $k = -1$ a $\rho \geq 0$. Pro $k = -1$ se vesmír pro pevný čas t modeluje maximálně symetrickou hyperbolickou varietou \mathbb{H}_r^3 (viz kapitola 18). Ve standardním kosmologickém modelu tak index křivosti nabývá pouze hodnot

$$k \in \{-1, 0, 1\}.$$

Pro sestavení rovnice (19.1) vlastně Friedmann využil jen složku 00 metrického tenzoru a tenzoru energie a hybnosti. Pomocí stopy složek 11, 22 a 33 lze odvodit ještě lineární diferenciální rovnici 2. řádu pro expanzní funkci [100]

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right)a + \frac{\Lambda c^2}{3}a, \quad (19.2)$$

kde p je tlak. Všimněme si, že tato rovnice nezávisí explicitně na indexu křivosti k .

Jak již bylo řečeno v oddílu 10.4, kladnou kosmologickou konstantu Λ přidal Albert Einstein do rovnic obecné teorie relativity v roce 1917, aby zabránil gravitačnímu kolapsu a zachránil tak svůj model stacionárního vesmíru [59]. Pro rovnici (19.1) ale výsledné řešení není stabilní, tj. nepatrná odchylka od $a(t) \equiv \text{konst.}$ způsobí buď gravitační kolaps, anebo naopak expanzi [187], s. 746.

I když byla obecná teorie relativity vytvořena, aby vysvětlila rozmanité paradoxy Newtonovy teorie gravitace pro velké rychlosti, hmotnosti, hustoty apod., lze Friedmannovu rovnici (19.1) pro $\Lambda = 0$ také formálně odvodit z Newtonovy teorie (srov. [183]).

Pro malé červené posuvy $z \ll 1$ je rychlost vzdalování galaxií v od naší Galaxie přibližně úměrná jejich vzdálenosti d , tj.

$$v \approx H_0 d, \quad (19.3)$$

¹Pro zápornou hmotu by součet úhlů v trojúhelníku na obr. 2.10 a) byl menší než 180° . Trojúhelník by měl strany vybouleny dovnitř.

kde H_0 je *Hubbleova konstanta* s fyzikálním rozměrem s^{-1} . Ve zprávě Planck Collaboration [211] se pro H_0 uvádí celá řada rozdílných hodnot, např. na s. 30

$$H_0 = 67.3 \pm 1.2 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1} \quad \text{a} \quad H_0 = 73.8 \pm 2.4 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}, \quad (19.4)$$

kteřé jsou patrně zatíženy velkými systematickými chybami. Jelikož ale v dávné minulosti byla rychlost rozpínání vesmíru větší (srov. obr. 8.7), zavádí se *Hubbleův parametr*

$$H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \quad (19.5)$$

tak, aby $H(t_0) = H_0$, kde t_0 je stáří vesmíru. Protože $H_0 > 0$ je expanzní funkce $a = a(t) > 0$ podle (19.5) v současnosti rostoucí.

Určit stávající hodnotu Hubbleova parametru $H(t)$ není snadné, neboť se vždy díváme do minulosti. V našem blízkém okolí je měření $H_0 = H(t_0)$ zkresleno lokálními pohyby galaxií. Na druhé straně, na základě dat z hodně vzdálených objektů je zase obtížné spolehlivě extrapolovat současnou hodnotu H_0 Hubbleovy konstanty (např. z hodnot reliktního mikrovlnného záření, které k nám putuje více než 13 miliard let, viz [210]).



19.2. Podivné chování kosmologických parametrů

Vydělme rovnici (19.1) čtvercem $H^2 = (\dot{a}/a)^2 \geq 0$ tak, jak se to běžně dělá, tj. bez předběžného varování se eventuálně dělí nulou, což může vést k rozmanitým paradoxům. Pak pro všechna t dostaneme rovnost pro tři bezrozměrné parametry

$$1 = \Omega_M(t) + \Omega_\Lambda(t) + \Omega_K(t), \quad (19.6)$$

kde

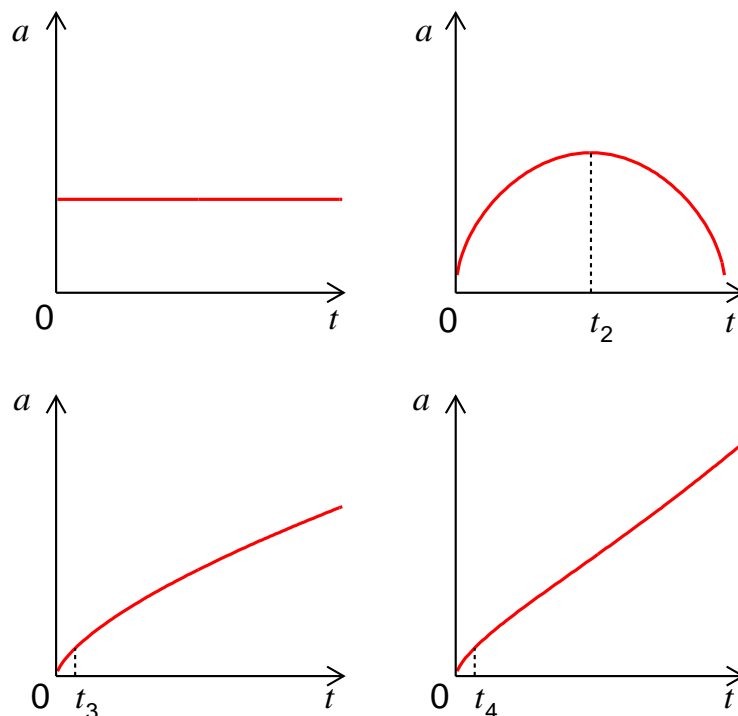
$$\Omega_M(t) = \frac{8\pi G\rho(t)}{3H^2(t)} > 0, \quad \Omega_\Lambda(t) = \frac{\Lambda c^2}{3H^2(t)}, \quad \Omega_K(t) = -\frac{kc^2}{\dot{a}^2(t)}, \quad (19.7)$$

Ω_M je parametr hustoty temné a baryonové hmoty, Ω_Λ je parametr hustoty temné energie a Ω_K je parametr hustoty prostorové křivosti² [91], s. 71; [199]. Funkci $\rho_c(t) = 3H^2(t)/(8\pi G)$ se z historických důvodů³ říká *kritická hustota*.

1. Podívejme se nejprve na chování kosmologických parametrů v případě Einsteina stacionárního vesmíru, kde $\dot{a}(t) = 0$ pro všechna t (srov. obr. 19.2). Pak z (19.5) máme $H(t) = 0$. I když se nic dramatického neděje, tedy je podle (19.7) parametr hustoty hmoty $\Omega_M(t) = \infty$ pro všechna t . Správně bychom měli psát, že není definován. Rozumně zavedené fyzikální veličiny by ale neměly nabývat nekonečných hodnot.

²Planck Collaboration [211] nazývá Ω_K curvature parameter.

³Pokud je totiž $\Lambda = 0$, pak $k = 0 \Leftrightarrow \rho = \rho_c$, $k = 1 \Leftrightarrow \rho > \rho_c$ a $k = -1 \Leftrightarrow \rho < \rho_c$.



Obr. 19.2. Expanzní funkce pro stacionární vesmír, cyklický vesmír, vesmír s nulovou kosmologickou konstantou a pro předpokládané rozpínání vesmíru s kladnou kosmologickou konstantou podle dnešních poznatků.

2. Uvažujme další klasický model tzv. cyklického nebo též oscilujícího či pulzujícího vesmíru, kdy se expanze vesmíru zastaví v čase $t_2 > 0$, a pak následuje období smršťování (viz obr. 19.2). Pak $\dot{a}(t_2) = 0$ a podle (19.7) pro $\Lambda > 0$ je parametr hustoty temné energie, která má rozpínání vesmíru urychlovat, roven $\Omega_\Lambda(t_2) = \infty$. Vesmír se přitom začne smršťovat. I v bezprostředním okolí bodu t_2 , kdy nedělíme nulou, je chování kosmologických parametrů přinejmenším zvláštní, protože jejich hodnoty rostou nade všechny meze.

3. V klasickém modelu vesmíru s nulovou kosmologickou konstantou a $k = -1$ se předpokládá, že expanzní funkce roste do nekonečna pro $t \rightarrow \infty$ a že je ryze konkávní pro $t > t_3 > 0$ (viz [187], s. 735, a obr. 19.2). Tedy derivace \dot{a} i její čtverec jsou klesající funkce. Podle (19.7) roste parametr hustoty prostorové křivosti $\Omega_K > 0$ pro $t \rightarrow \infty$, zatímco prostorová křivost k/a^2 se blíží k nule. Z bodů 1–3 je patrné, že všechny tři kosmologické parametry hustoty (19.7) nemají vhodné pojmenování.

4. Ještě podivnější chování parametru Ω_K dostaneme pro současně uznávaný průběh expanzní funkce. Podobně jako v předchozím bodě budeme uvažovat jen

$t > t_4 > 0$, kde t_4 je doba vzniku reliktního záření.⁴ Měření [225] nositelů Nobelovy ceny za rok 2011 naznačují, že expanzní funkce $a(t)$ je ryze konkávní v intervalu cca $(t_4, 9)$ Gyr. Pak přechází na ryze konvexní funkci⁵ v intervalu cca $(9, 14)$ Gyr, tj. funkce \dot{a} je nejprve klesající funkce a pak rostoucí (viz obr. 19.2). Odtud podle (19.7) plyne, že parametr hustoty křivosti $\Omega_K(t)$ není monotónní funkce pro $k \neq 0$, i když se vesmír neustále rozpíná. Přitom absolutní hodnota parametru hustoty prostorové křivosti $|\Omega_K|$ v intervalu $(t_4, 9)$ Gyr roste, zatímco křivost se blíží nule se vzrůstajícím časem.

V klasických modelech bez inflace se uvažuje, že $\dot{a}(0) = \infty$ (viz [187], s. 735, a obr. 19.2). Podle (19.7) by ale měl vesmír při svém zrodu parametr hustoty křivosti $\Omega_K(0)$ nulový, tedy téměř takový, jako má dnes. Jeho křivost pro $k \neq 0$ však byla v čase $t \approx 0$ naopak obrovská a s rostoucím časem se blíží k nule (viz např. známý model rozpínajícího se vesmíru pomocí nafukujícího se balónku z obr. 16.4).



19.3. Odvážné extrapolace

Ve standardním modelu se s oblibou provádějí nejrůznější „choulostivé“ limity $a \rightarrow 0$, $a \rightarrow \infty$, $t \rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$, ... (viz [3], [199]). Odtud se pak odvozuje např. stáří vesmíru $t_0 = 13.82$ Gyr na 4 platná místa,⁶ viz [211]. Přitom zatím byly změřeny s poměrně velkou chybou jen dva koeficienty $H_0 = H(t_0)$ (viz (19.4)) a $q_0 = q(t_0) \approx -0.6$ (viz (10.11)) v Taylorově rozvoji⁷ (10.10),

$$a(t) = a(t_0)(1 + H_0(t - t_0) - \frac{1}{2}q_0 H_0^2(t - t_0)^2 + \dots), \quad (19.8)$$

kde decelerační parametr $q = -\ddot{a}a/(\dot{a})^2$ závisí na druhých derivacích expanzní funkce (viz obr. 8.7).⁸ Povšimněme si např., že $q(t_2) = \infty$ pro cyklický vesmír z obr. 19.2. Původně se kosmologové domnívali, že se rozpínání vesmíru zpomaluje. Proto nezavedli akcelerační parametr, ale parametr decelerační (parametr zpomalení). První tři

⁴Upřesněme, že reliktní záření nevzniklo náraz, ale v intervalu dlouhém několik tisíců let.

⁵Podle teorie inflace se vesmír během krátkého okamžiku po Velkém třesku rozpínal exponenciálně. Expanzní funkce $a = a(t)$ v Λ CDM modelu tak má alespoň dva inflexní body v intervalu $(0, 14)$ Gyr. V prvním přechází ryze konvexní funkce na ryze konkávní a ve druhém je tomu naopak.

⁶Stáří některých malých hvězd (např. HD 140283, SM 0313) v naší Galaxii se přitom odhaduje alespoň na 13.6 Gyr nezávisle na kosmologických modelech [21]. Stačily se však tyto hvězdy zformovat za pouhých cca 200 milionů let po Velkém třesku? Oblaka molekulárního vodíku musela nejprve zchladnout na teplotu cca 10 K, která je podle Jeansových kritérií zapotřebí k tvorbě hvězd. Teplota reliktního záření tehdy byla $2.73(z + 1) \approx 50$ K, kde odpovídající $z \approx 17.5$ (viz [208]).

⁷Expanzní funkci $a = a(t)$ nelze rozvinout do Taylorovy řady na celém definičním oboru (viz [220], s. 623), protože již její první derivace roste nade všechny meze pro $t \rightarrow 0$, srov. (18.3). Proto ani nelze spolehlivě odhadnout velikost zbytku Taylorovy řady.

⁸Je-li $p = 0$ v rovnici (19.2), pak ze vztahů (19.7) dostaneme $q = \frac{1}{2}\Omega_M - \Omega_\Lambda$.

členy Taylorova rozvoje v bodě t_0 odpovídajícím současnosti však obecně nemohou dobře popisovat chování expanzní funkce v daleké minulosti (viz obr. 13.4).

Dále je třeba zdůraznit, že Friedmannova rovnice (19.1) byla odvozena pouze pro gravitační interakci. Krátce po vzniku vesmíru však jistě hrály nezanedbatelnou úlohu elektromagnetické síly téměř o 40 řádů větší a před tím ještě větší jaderné síly, které podstatně ovlivnily počáteční průběh expanzní funkce. I když se na urychlovacích snažíme studovat negravitační interakce, nevíme, jak se chovaly v extrémně silném gravitačním poli bezprostředně po Velkém třesku. Jinými slovy, Friedmannova rovnice (19.1) stěží může popisovat chování skutečného vesmíru pro malá $t > 0$.

Protože součin $\rho(t)a^3(t)$ je konstantní v době, kdy látka dominuje nad zářením, rovnice (19.1) nabývá tvaru

$$\dot{a}^2 = Aa^2 + B + \frac{C}{a} \quad (19.9)$$

s časově nezávislými konstantními koeficienty $A = \Lambda c^2/3$, $B = -kc^2$ a $C > 0$. Z takto jednoduché obyčejné diferenciální rovnice se pak dělají hluboké závěry o expanzi skutečného vesmíru v daleké minulosti i budoucnosti. Protože známe podmínku $\dot{a}(t_0)/a(t_0) = H_0$ odpovídající současnosti, lze rovnici (19.9) řešit v čase dopředu i dozadu. Přitom pro dobu, kdy záření dominuje nad látkou, se na pravou stranu rovnice (19.9) přidává ještě člen D/a^2 .

V současnosti se soudí, že expanzní funkce roste nade všechny meze, tj. $a(t) \rightarrow \infty$ pro $t \rightarrow \infty$. Podle (19.6) a (19.7) pro $k \leq 0$ platí $\frac{1}{3}\Lambda c^2 < H^2(t)$ pro libovolný čas. Odtud a z (19.5) plyne, že také časová derivace expanzní funkce roste nade všechny meze, je-li Λ kladná konstanta. Jinými slovy, v nekonečném vesmíru (hyperbolickém či eukleidovském) platí $\dot{a}(t) \rightarrow \infty$ pro $t \rightarrow \infty$.



19.4. Temná hmota versus hmota baryonová

Podle nedávných měření sondy Planck a metody baryonových akustických oscilací [210] a [211] je parametr hustoty hmoty standardního kosmologického modelu roven

$$\Omega_M \approx 0.32 = 0.27 + 0.05,$$

z čehož 27 % připadá na temnou hmotu a cca 5 % na baryonovou hmotu (z toho méně než 1 % na svítící látku). Existenci temné hmoty předpověděl v roce 1933 Fritz

Zwicky, když studoval obří galaktickou kupu ve Vlasech Bereniky. Pro viriálovou hmotnost kupy odvodil vztah (viz (7.14))

$$M = \frac{5R\bar{v}^2}{3G}, \quad (19.10)$$

kde \bar{v} je střední kvadratická rychlost galaxií vzhledem k těžišti kupy a R její poloměr. Můžeme ale na základě takto jednoduchého vzorečku (19.10) tvrdit, že v galaktické kupě z obr. 7.3 existuje temná hmota? V oddílech 8.3 a 8.4 uvádíme řadu argumentů naznačujících, že skutečná hmotnost může být o více než 50 % nižší než viriálová hmotnost (19.10) a že celková hmotnost kupy je nejvýše 5× větší než hmotnost její svítící látky. To výše uvedené množství temné hmoty podstatně snižuje a naopak zvyšuje množství baryonové látky.

Astronomická měření se neustále zpřesňují, a tak časem zjistíme, zda jsou současné odhady temné hmoty v pořádku či nikoliv. Například poměrně nedávno se zjistilo [278], že mezigalaktický prostor kupy obsahuje 30–50 % hvězd z celkového počtu všech hvězd kupy a alespoň 5krát větší množství nesvítící baryonové hmoty než svítící hmoty v galaxiích (viz [2], [20]). Pozorované vysoké rychlosti galaxií tak mají zcela přirozené vysvětlení [146].

Vera Rubinová postulovala temnou hmotu ve spirálních galaxiích, protože podle jejích výpočtů hvězdy na okrajích galaktických disků obíhaly příliš rychle. Koncem minulého století byly ale odhady počtu červených a hnědých trpaslíků v naší Galaxii značně podceněné. Tehdy se věřilo (viz [17], s. 93), že jen 3 % hvězd jsou červení trpaslíci, zatímco dnes je to kolem 70 % z celkového počtu všech hvězd, pomineme-li těžko detekovatelné hnědé trpaslíky. Předpokládat tedy v současnosti existenci 5–6krát většího množství temné hmoty než baryonové hmoty, aby se galaxie nerozpadly, se také zdá být dosti nadhodnocené. V kapitole 9 ukazujeme, že vysoké rychlosti hvězd na okraji Galaxie lze zcela přirozeně vysvětlit bez temné hmoty jen pomocí baryonové hmoty, viz např. nerovnost (9.6) či větu 9.1.



19.5. Temná energie versus kosmologická konstanta

Všeobecně panuje přesvědčení, že temná energie je jakási podivná substance, která je zodpovědná za zrychlující se rozpínání vesmíru. Podle hodnot naměřených sondou Planck [211] je parametr současné hustoty temné a baryonové hmoty téměř 32 % a parametr hustoty temné energie kolem 68 %, protože

$$\Omega_M \approx 0.3175, \quad \Omega_\Lambda \approx 0.6825, \quad \Omega_K \approx 0. \quad (19.11)$$

Neřekne se ale, jak se definují příslušná procenta, kdyby $\Lambda < 0$ nebo $\Omega_K < 0$. Budou záporná nebo se uvažují jejich absolutní hodnoty? K odvození vztahů (19.11) se používá metoda baryonových akustických oscilací [60] ve fluktuacích reliktního záření, které bylo po dobu více než 13 miliard let deformováno pomocí gravitačního čočkování galaxií a galaktických kup (viz obr. 8.3). Z těchto pozměněných dat se pak prostřednictvím rovnice (19.1) provádí extrapolace do současnosti. Pokud je ale temné hmoty podstatně méně než odpovídá šestinásobku hmotnosti baryonové hmoty (viz předchozí oddíl 19.4), potom ani hodnota $\Omega_\Lambda \approx 0.6825$ pro $t_0 \approx 13.82$ Gyr patrně není ve shodě s realitou. Přitom by se správně mělo říkat, že odhadované stáří vesmíru odvozené z Λ CDM modelu pro parametry (19.11) je $t_0 \approx 13.82$ Gyr. Skutečné stáří může být zcela odlišné.

Ze vztahu (19.11) vidíme, že součet naměřených hodnot $\Omega_M(t_0)$ a $\Omega_\Lambda(t_0)$ je roven přibližně jedné. To nás ale ještě neopravňuje tvrdit, že podle (19.6) a (19.7) je $k = 0$, a tudíž že skutečný vesmír je plochý (tj. nekonečný eukleidovský), jak se v dnešní době často uvádí. I kdyby byl součet

$$\Omega_M(t_0) + \Omega_\Lambda(t_0) = 1.00000000000000000001,$$

stále se bude jednat o ohraničený vesmír, který lze popsat sférou (18.1) s nepředstavitelně velkým poloměrem. Takový prostor je lokálně téměř eukleidovský, i když je stále jen konečný. Mezi konečným ohraničeným prostorem a nekonečným neohraničeným prostorem je ale obrovský rozdíl (srov. též závěr kapitoly 18). Navíc sféra \mathbb{S}_r^3 má úplně **jinou topologii** než proklamovaný plochý vesmír \mathbb{E}^3 .

V plochem vesmíru by se hodně vzdálené galaxie od sebe vzdalovaly nadsvětelnými rychlostmi [100] — dokonce libovolně velkými rychlostmi,⁹ pokud by byly od sebe dostatečně daleko. To ve vesmíru s kladným indexem křivosti nenastává.

Podle (19.1) má kosmologická konstanta Λ fyzikální rozměr m^{-2} . Hovoří se o ní jako o hustotě energie, která ale má v jednotkách SI zcela jiný rozměr, a sice $\text{kg m}^{-1}\text{s}^{-2}$. Všimněme si, že ve veličinách definujících parametr (viz (19.7))

$$\Omega_\Lambda(t) = \frac{\Lambda c^2}{3H^2(t)}$$

se kg vůbec nevyskytuje. Můžeme tedy vůbec hovořit o nějaké hustotě energie?

Snadno zjistíme, že výraz $\frac{c^4}{G} \cdot \text{m}^{-2}$ má fyzikální rozměr jako hustota energie $\text{kg m}^{-1}\text{s}^{-2}$. V soustavě $c = 1$ a $G = 1$ je to tak stejný rozměr, jako má Λ , protože můžeme kilogramy, sekundy a metry mezi sebou libovolně zaměňovat¹⁰ za

⁹Zde je důležité si uvědomit, že nejedná o inerciální systémy (srov. [288], s. 30)! Například pro konstantní hodnotu Hubbleova parametru je expanzní funkce exponenciální.

¹⁰V této soustavě jsou síla, výkon či rychlost bezrozměrné veličiny, energii ale i čas lze udávat v kilogramech apod.

použití vhodných multiplikativních konstant. Přejdem k těmto přirozeným jednotkám se samozřejmě řada výrazů zjednoduší. V rovnici (19.1) ale konstanty c a G jednotkové nejsou. Proto Λ nelze interpretovat jako hustotu energie v soustavě SI.

Jinou možností je uvažovat jen $c = 1$. V této soustavě lze definovat hustotu energie vztahem $\rho_\Lambda = \Lambda/(8\pi G)$, protože lze mezi sebou zaměňovat metry a sekundy. Opět se ale nejedná o hustotu energie v soustavě SI.

Proč by pouhá konstanta Λ měla věrně modelovat skutečnou expanzi vesmíru? Není to až příliš velké zjednodušení a hrubá aproximace?

Temná energie se zavedla do standardního kosmologického modelu, aby se vysvětlilo pozorované zrychlené rozpínání vesmíru a mohlo se tak eliminovat zjevné porušení zákona zachování energie. K tomuto jevu však může přispívat gravitační aberace (viz kapitola 17), která má také repulzivní charakter a svými účinky generuje energii nutnou ke zrychlené expanzi. Antigravitace je tak jakási skrytá síla (angl. dark force), která obecně působí odpudivou silou mezi pohybujícími se galaxiemi a jejich kupami a ovlivňuje tedy rozpínání vesmíru. Nedá se však popsat jedinou konstantou, protože závisí na poloze i na čase. Její zprůměrované účinky přes prostor nejsou popsány žádnou základní fyzikální konstantou, a tedy, je-li expanze vesmíru alespoň částečně důsledkem gravitační aberace, měla by se místo konstanty Λ uvažovat spíše funkce $\Lambda = \Lambda(t)$ (podobně jako Hubbleův parametr $H(t)$ také na čase závisí).

Standardní kosmologický model předpokládá, že se expanze vesmíru projevuje pouze globálně a nikoliv lokálně. Podle [53], [54], [156], [179], [296] se však vesmír rozpíná i lokálně a to rychlostí srovnatelnou s Hubbleovou expanzí H_0 , viz též kapitoly 11–15.



19.6. Hlavní nedostatky kosmologického modelu

V dnešní době je obtížné se orientovat v záplavě informací týkající se kosmologie. Důležité je umět rozlišovat, co je naměřená hodnota a co je hodnota vyplývající z modelu, co je jen líbivá numerická simulace či uměle obarvený obrázek a co je seriózní výpočet. Často neznáme ani způsob, jakým se k určitému tvrzení dospělo a šíříme je dále. Vzniká tak *kosmologický folkór*. Na závěr proto uveďme ještě jeden závažný argument proti Λ CDM modelu.

Každá rovnice matematické fyziky **bez výjimky** má svá ohraničení na velikosti vyšetřovaných objektů. Například standardní rovnice vedení tepla velice dobře aproximuje skutečnou teplotu v pevných látkách o rozměrech srovnatelných s jedním metrem, o čemž se lze přesvědčit měřením. Kdybychom ale rovnici vedení tepla použili na atomární úrovni v krychličce o hraně 10^{-10} m, dostaneme zjevné nesmysly, stejně tak jako v krychli o hraně 10^{10} m (tj. sedminásobku průměru Slunce), která by teoreticky okamžitě zkolabovala do černé díry. Totéž platí i pro rovnice pružnosti, polovodičové

rovnice, Navierovy–Stokesovy rovnice proudění, Maxwellovy rovnice atd. Podobně nemůžeme používat Keplerovy zákony na škálách 10^{-10} m nebo naopak Schrödingerovu rovnici na objekty o velikosti kočky. Při jakémkoliv výpočtu je proto třeba starat se o chybu modelu (viz obr. 5.8).

Při odvozování Friedmannových rovnic (19.1) a (19.2) se ale Einsteinovy rovnice použijí na celý vesmír. To se bere jako samozřejmost a nikdo se nezabývá otázkou, zda je vůbec oprávněné provádět takové smělé a ničím nepodložené extrapolace, když je zatím obecná teorie relativity „prověřena“ jen na mnohem menších prostoročasových škálách (zpomalování elektromagnetických vln v gravitačním poli Slunce [245], strhávání prostoročasu rotující Zemí — Lenseův–Thirringův precesní efekt [161], stáčení perihelia dráhy Merkuru [187] apod.). Přitom galaxie mají rozměr řádově 10^{10} au a pozorovatelný vesmír ještě alespoň o šest řádu více (srov. např. (10.8)).

V soudobé kosmologii se často setkáváme s následující argumentací. Galaxie se od sebe vzdalují, a proto musela být v minulosti veškerá hmota soustředěná v jednom bodě (viz např. [199], s. 70; [288], s. 17). Tato implikace je ale z matematického hlediska chybná. Jako protipříklad stačí uvažovat všude rostoucí expanzní funkci

$$a(t) = C_1 + C_2 e^{C_3 t}, \quad t \in (-\infty, \infty),$$

kde C_1, C_2, C_3 jsou kladné konstanty, která není nikde nulová — ani v limitě.

Žádné dva body ve vesmíru (na obr. 18.5 je znázorněn modře) nejsou kauzálně (tj. příčinně) spojeny. Naproti tomu pozorovatelný vesmír, který je na obr. 18.5 vyznačen žlutým kuzelem, je kauzálně spojen s naší přítomností reprezentovanou vrcholem kužele. Současná rychlost rozpínání vesmíru v čase t_0 by proto měla záviset na hustotě hmoty v minulosti, která expanzi gravitačně ovlivňuje, protože se gravitační interakce šíří konečnou rychlostí. Například baryonová látka rozpínání vesmíru brzdí a rychlost rozpínání vesmíru tak musí být ovlivněna její hustotou na všech předešlých časových vrstvách. Expanzní funkce by tak měla být popsána rovnicí, jejíž řešení závisí na historii vesmíru,¹¹ tj. všech hodnotách $a(t)$ pro $t \in (0, t_0)$. Friedmannova rovnice (19.1) ale tuto vlastnost nemá. Neobsahuje v sobě žádné zpoždění dané konečnou rychlostí šíření gravitace. Je to jen obyčejná diferenciální rovnice, jejíž řešení na intervalu (t_0, ∞) závisí pouze na hodnotě expanzní funkce v bodě t_0 a nikoliv na historii, tj. následná expanze vůbec nezávisí na tom, jak se vesmír do daného okamžitého stavu dostal. Jinými slovy, standardní Λ CDM model není v pořádku. Pak se nesmíme divit, že rozdíl naměřené a teoreticky odvozené hustoty energie vakua je 120 řádů (viz [3], s. 3, 109). Odtud je zřejmé, že energie vakua patrně není tou hlavní příčinou zrychlujícího se rozpínání vesmíru.



¹¹Vývoj mnoha dynamických systémů (v biologii, dopravě, robotice, teorii materiálů, telekomunikaci, ...) podstatně závisí na tom, jak se systém do svého okamžitého stavu dostal. Konkrétním příkladem je soustava (17.9)–(17.11) se zpožděným argumentem, který vyjadřuje příslušnou časovou prodlevu.

20. Zdánlivě nadsvětelné rychlosti ve vesmíru

*Ten, kdo prohlašuje, že pochopil kosmologii,
jen dokazuje, že nepochopil vůbec nic.*

Feynmannův výrok parafrázoval ANTONÍN VRBA

20.1. Pozorování nadsvětelných rychlostí

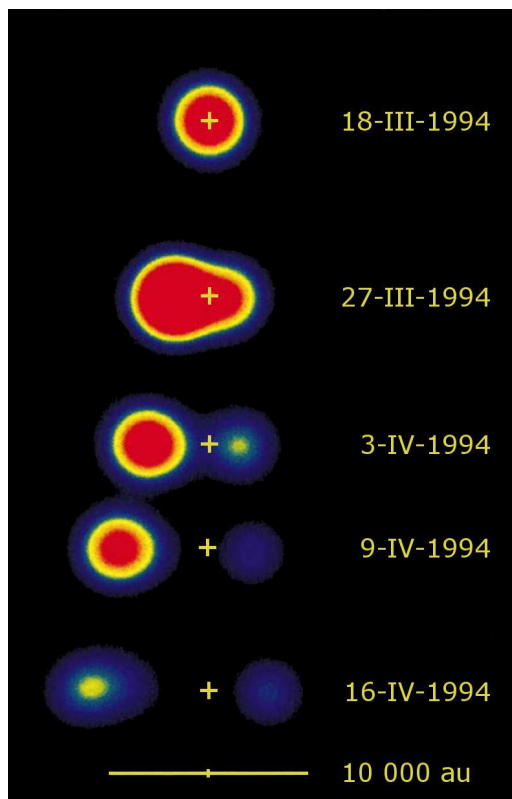
Podle Einsteinovy teorie relativity se žádný signál ani hmota nemůže pohybovat rychleji, než je rychlost světla ve vakuu

$$c = 299\,792\,458 \text{ m/s.} \quad (20.1)$$

Avšak v říjnu 1970 skupina radioastronomů při prověřování platnosti čtvrtého efektu [245] obecné teorie relativity zcela nečekaně objevila výtrysky plazmatu (jety) z kvasaru¹ 3C 279, jejichž rychlost vypočtená z úhlových měření převyšovala c , viz [198], s. 3. Tento jev nezávisle potvrdily (též pro sousední kvasar 3C 273) v únoru 1971 další dva týmy odborníků. Vzápětí se vytvořila řada hypotéz, jak tento paradox nadsvětelných rychlostí vysvětlit. Zastánci jedné teorie tvrdili, že vzdálenost kvasaru je z červeného posuvu jeho spektra odhadnuta nesprávně. Jiní argumentovali tím, že vesmír byl v době výronu plazmatu mnohem menší, neboť kvasar je od nás vzdálen několik miliard světelných let, a tudíž se měření zorného úhlu musí zcela jinak interpretovat.

Od roku 1970 byly nadsvětelné rychlosti pozorovány u řady dalších kvasarů, viz [186], [198], [216]. U některých vytryskovala oblaka mezihvězdné hmoty rychlostí značně převyšující rychlost světla, a to až desetkrát! U takto velké rychlosti se zdálo být velice nepravděpodobné vysvětlení opírající se o chybně určenou vzdálenost

¹Kvasary jsou velmi vzdálené objekty s velkým posuvem spektra směrem k červenému konci. Představují ranou vývojovou fázi galaxií. V jejich středu je pravděpodobně supermasivní černá díra o hmotnosti 10^6 až 10^{10} Sluncí.



Obr. 20.1. Výtrysky plazmatu z mikrokvasaru GRS1915+105, který je na obrázku označen symbolem +. Upraveno podle [186].

z červeného posuvu. Proto někteří vědci začali zpochybňovat samotnou teorii relativity, jiní zase určení Hubbleovy konstanty, která charakterizuje rozpínání vesmíru, apod. Pak ale přišel senzační objev (srov. [184], [185]) mikrokvasaru² GRS1915+105 vzdáleného od Země jen 40 000 světelných let ($\approx 3.78 \cdot 10^{17}$ km). Jeho výtrysky plazmatu podle úhlových měření opět převyšovaly rychlost světla. Podstatné ovšem bylo, že tento objekt je v naší Galaxii. K vysvětlení paradoxu nadsvětelných rychlostí se tedy již nemuselo brát v úvahu rozpínání vesmíru, protože vzdálenost tohoto mikrokvasaru od Země je prakticky konstantní. V práci [186] se navíc prokazuje, že nejde jen o světelný záblesk procházející výrony plazmatu, ale o pohybující se plazma.

Na obr. 20.1 vidíme, že za pouhých 29 dní od 18. března 1994 do 16. dubna 1994 se oba oblaky plazmatu od sebe vzdálily o $0.816''$, což v projekci odpovídá přibližně

²Mikrokvasar je dvojhvězda, jejíž jedna složka je černá díra o hmotnosti 6 až 10 Sluncí, která z druhé složky vytrhává plazma a obklopuje se tzv. akrečním diskem. Část plazmatu je patrně vlivem extrémně rychlé rotace černé díry dále vyvrhována obrovskou rychlostí ve dvou úzkých opačně orientovaných výtryscích kolmých na rovinu disku. Mechanismus jejich vzniku je stále předmětem intenzivního výzkumu.

10 000 au. Symbol + vyznačuje umístění zdroje, který leží v těžišti soustavy. Jeho polohu výtrysky plazmatu prakticky neovlivnily. Levý, jasnější oblak se od mikrokvasaru vzdálil zhruba o 6235 au a pravý o něco méně. Jak uvidíme v následujícím oddílu, tuto asymetrii lze vysvětlit tím, že osa příslušného výtrysku svírá se směrem pohledu ostrý úhel, tj. levý oblak plazmatu směřuje k nám. Z pohledu pozorovatele (viz obr. 20.1) se tak zdá, že sledovaný jev odpovídá na obloze rychlosti

$$v^* = \frac{6235 \cdot 149.6 \cdot 10^6}{29 \cdot 24 \cdot 3600} = 372\,292 \text{ (km/s)}, \quad (20.2)$$

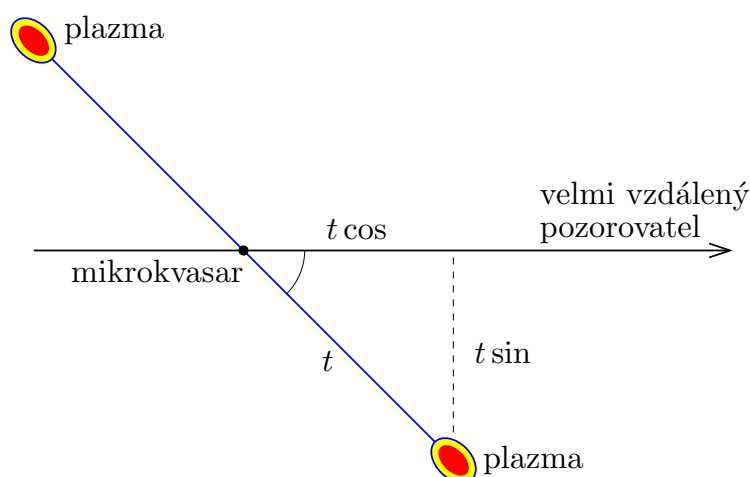
která zjevně převyšuje rychlost světla (20.1).



20.2. Matematické objasnění pozorovaného paradoxu

Předpokládejme, že mikrokvasar má od nás konstantní vzdálenost (jinak bychom museli používat vztahy pro relativistické sčítání rychlostí). Nechť $\alpha \leq 90^\circ$ označuje úhel, který svírá přímka mikrokvasar–pozorovatel a přímka, podél níž dochází k výtryskům plazmatu (viz obr. 20.2). Pro jednoduchost dále předpokládejme, že skutečná rychlost v výtrysků plazmatu je konstantní. Přitom její radiální, resp. tangenciální složka vzhledem k pozorovateli je zřejmě $v \cos \alpha$, resp. $v \sin \alpha$. Pak za čas t plazma dospěje do vzdálenosti vt od mikrokvasaru.

Pro $\alpha < 90^\circ$ se jeden výtrysk plazmatu vlastně přibližuje k pozorovateli. V čase t je o $vt \cos \alpha$ blíže než mikrokvasar. Proto doba t^* , po kterou pozorovatel sleduje



Obr. 20.2. Schematické znázornění vyšetřovaného jevu

výtrysk plazmatu z mikrokvasaru až do jeho momentální pozice na obr. 20.2, je menší než skutečná doba t . Tedy

$$t^* = t - \frac{v}{c} t \cos \alpha, \quad (20.3)$$

kde $(vt \cos \alpha)/c$ je čas, za který urazí světlo letící **konečnou** rychlostí c dráhu $vt \cos \alpha$. A právě v tom spočívá hlavní příčina paradoxu, neboť zdánlivá rychlost plazmatu pak podle (20.3) je

$$v^* = \frac{vt \sin \alpha}{t^*} = \frac{v \sin \alpha}{1 - (v/c) \cos \alpha} \quad (20.4)$$

a tento podíl může snadno být větší než c . Například pro mikrokvasar z obr. 20.1 se v [184] a [186] uvádí úhel $\alpha = 71^\circ$ a skutečná rychlost³ $v = 0.92c$. Odpovídající zdánlivá nadsvětelná rychlost podle (20.4) činí

$$v^* = 1.24c$$

a je plně v souladu se vztahem (20.2). Doba, po kterou oblak plazmatu skutečně putoval, je

$$t = 42.3 \text{ dny}$$

a světlo urazí vzdálenost $vt \cos \alpha$ z obr. 20.2 za 13.3 dní. Proto je doba jevu pozorovaného ze Země jen

$$t^* = 42.3 - 13.3 = 29 \text{ dní.}$$

Světlo z koncové fáze jevu k nám letělo o 13.3 dní méně než z počáteční fáze, protože již nepřekonává vzdálenost $vt \cos \alpha$.

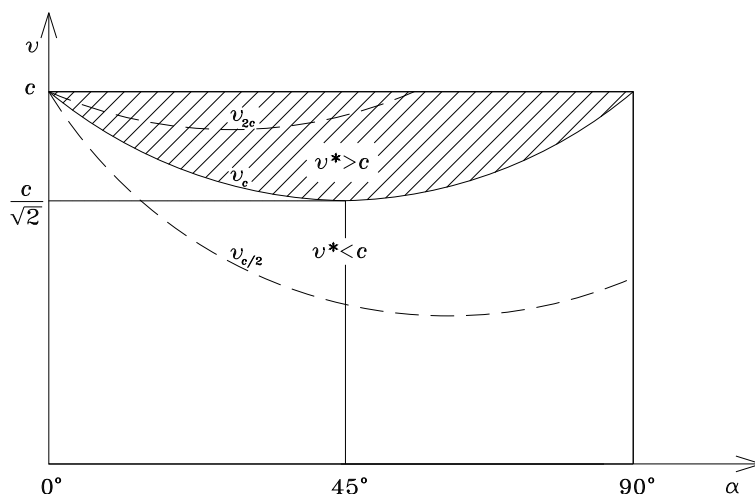
Povšimněme si, že funkce $v^* = v^*(\alpha, v)$ definovaná pravou stranou vztahu (20.4) na množině $[0, \frac{1}{2}\pi] \times [0, c)$ má v okolí bodu $(0, c)$ podstatnou singularitu. Vhodnou volbou úhlu α a skutečné rychlosti $v < c$ můžeme dokonce dospět k libovolně velké hodnotě zdánlivé rychlosti v^* . Například pro $\alpha = 8^\circ$ a $v = 0.99c$ dostaneme, že $v^* = 7c$. Naopak pro $\alpha = 90^\circ$ vztah (20.4) dává $v^* = v$, a proto žádnou nadsvětelnou rychlost nezískáme.

Na obr. 20.3 vidíme, pro které dvojice α a v je zdánlivá rychlost v^* větší či menší, než je rychlost světla. Příslušné rozhraní těchto dvou oblastí je dáno funkcí

$$v_c(\alpha) = \frac{c}{\sin \alpha + \cos \alpha},$$

kterou odvodíme z (20.4) tak, že pro pevné $v^* = c$ vyjádříme v jako funkci α . Čárkovaně jsou vyznačeny grafy funkcí v_{2c} , resp. $v_{c/2}$, které odpovídají zdánlivým rychlostem $v^* = 2c$, resp. $v^* = c/2$.

³Prakticky stejná rychlost výtrysků byla nalezena i u mikrokvasaru GRO J1655-40, který je od nás vzdálen jen 10000 světelných let — viz [186].



Obr. 20.3. Oblast zdánlivě nadsvětelných rychlostí je vyznačena šrafovaně.

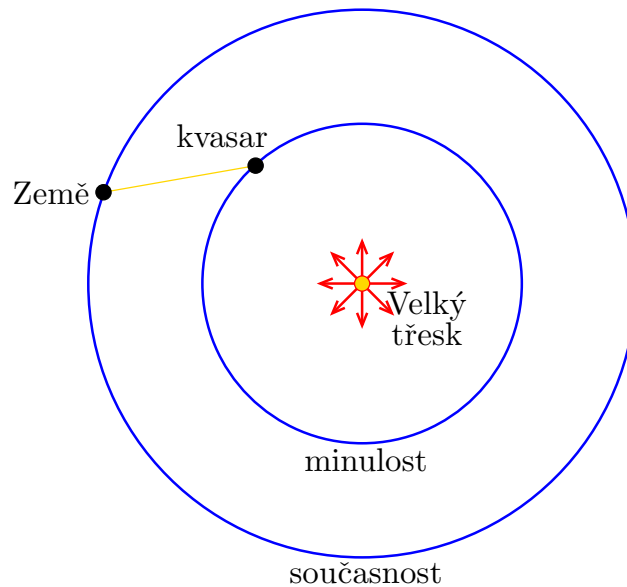


20.3. Nadsvětelné rychlosti v kosmologických vzdálenostech

Pro vysvětlení pozorovaných nadsvětelných rychlostí výronů plazmatu u vzdálených kvasarů (tj. objektů mimo naši Galaxii) je kromě vztahů (20.3)–(20.4) nutno vzít v úvahu další efekty. Zdánlivě nadsvětelné rychlosti mohou být teoreticky způsobeny gravitační čočkou, což může být např. mezilehlá galaxie, v jejímž okolí se podle teorie relativity zakřivuje světlo podobně jako ve spojné skleněné čočce (viz např. [88], [268]).

V dalším oddílu ukážeme, jak vlastní rozpínání vesmíru způsobuje vznik jevu, který nazveme časová čočka, jež má také vliv na pozorované nadsvětelné rychlosti výtrysků v kosmologických vzdálenostech. V krátkosti si připomeňme všeobecně přijímaný model našeho vesmíru s kladnou křivostí z kapitoly 18 (viz též [187], s. 724). V tomto idealizovaném modelu je vesmír (prostor) charakterizován jako trojrozměrný povrch (18.1) rozpínající se čtyřrozměrné koule o poloměru $r = r(t)$. Pro libovolný pevný časový okamžik t je tak rozpínání ve všech bodech a ve všech směrech stejné. Hovoříme o homogenním a izotropním modelu, v němž se ignorují veškeré lokální nepravidelnosti. To je důležitý zjednodušující předpoklad tzv. *Einsteinova kosmologického principu* z oddílu 10.3.

Vlastní rozpínání si můžeme představit jako nafukující se balónek, pokud ovšem ubereme jeden prostorový rozměr (viz [270], s. 201). Jestliže ubereme ještě jeden prostorový rozměr, dostaneme situaci z obr. 20.4. Zde je „vesmír“ kružnice, jejíž poloměr se zvětšuje s časem.



Obr. 20.4. Schematické znázornění rozpínání vesmíru. Projekce prostoročasu (srov. obr. 18.5) ve směru časové osy t představuje model vesmíru pomocí nafukujícího se balónku. Žlutě je vyznačena dráha fotonu směřujícího ze vzdáleného kvasaru na Zemi.



20.4. Princip časové čočky

Kvasary vzdálené od nás několik miliard světelných let vidíme nutně se zpožděním, daným konečnou rychlostí světla. Proto musíme důsledně rozlišovat „tehdejší“ skutečné rozměry, tj. velikosti, v době, kdy sledované fotony opustily okolí kvasaru a vesmír byl mnohem menší, a „dnešní“ zdánlivé rozměry charakterizující toto okolí ve chvíli, kdy jsme „pradávné“ fotony (viz čárkovaná čára na obr. 20.4) zachytili pozemským dalekohledem.

Zhruba řečeno, čím je pozorovaný objekt vzdálenější, tím byl jemu odpovídající vesmír menší, a proto tím větší se nám paradoxně jeví rozměry objektu pomocí úhlových měření. Tento jev nazveme *zvětšení časovou čočkou*. Zvětšení je definováno vztahem

$$Z = z + 1,$$

kde z je odpovídající červený posuv. Fungování časové čočky ilustrujme na třech konkrétních příkladech.

Příklad 20.1. Obr. 16.1 nám ukazuje vesmír, jak vypadal zhruba před 10 až 13 miliardami let. Je to známé Hubbleovo hluboké pole (angl. Hubble Deep Field), jehož střed má souřadnice přibližně $RA = 12\text{ h } 37\text{ min}$ a $DE = 62^\circ 13'$ a šířka snímku odpovídá nepatrnému úhlu $3'$. Podle obr. 8.7 byl odpovídající červený posuv $z \approx 3$. Galaxie se tehdy utvářely a byly proto menší než dnešní již vyvinuté galaxie (viz kapitola 16). Zde tedy došlo až ke čtyřnásobnému zvětšení $Z \approx 4$.

V roce 1998 byla získána fotografie tzv. Hubbleova jižního hlubokého pole (angl. Hubble Deep Field South), kde jsou některé galaxie ještě vzdálenější. V tomto případě je efekt zvětšení o něco větší než na obr. 16.1.

Příklad 20.2. Dalším příkladem fungování časové čočky je reliktní záření, které pochází z doby asi 380 000 let po Velkém třesku, kdy vznikly atomy a vesmír se stal pro fotony „průhledným“. Toto téměř homogenní a izotropní záření k nám přichází z celé oblohy ze vzdálenosti přes 13 miliard světelných let — tzv. horizontu pozorovatelného vesmíru. Vzniklo ale v době, kdy byl vesmír cca 1 000krát menší, než je dnes. Podle [60] je odpovídající červený posuv $z = 1089$. Odtud můžeme mj. odhadnout průběh expanzní funkce $r = r(t) = a(t)$ ze vztahu (18.3) v blízkosti počátku, tj. $1090 r(t_1) \approx r(t_0)$ pro $t_1 = 380\,000$ let, kde $r(t_0)$ je současná hodnota expanzní funkce. Rychlost rozpínání vesmíru byla tehdy obrovská. V době, kdy vzniklo reliktní záření, by na obr. 20.4 vesmír představovala jen nepatrná kružnice o poloměru přibližně tisíckrát menším, než je poloměr kružnice odpovídající současnosti. Příslušné zvětšení je dáno vztahem $Z = 1090 = r(t_0)/r(t_1)$.

Příklad 20.3. Konečně jako poslední „drastický“ příklad obrovského zvětšení pomocí časové čočky uveďme samotný Velký třesk, který se udál zhruba před necelými 14 miliardami let. Přestože proběhl ve zcela minimálním objemu, dnes se vlastně zdánlivě nachází na sféře s nepředstavitelně velkým poloměrem (ještě větším než v předchozím příkladu). K jeho detekci by byla zapotřebí reliktní neutrina či reliktní gravitační vlny.

A tak čím dále hledíme, tím je odpovídající pozorovaná sféra zdánlivě větší a větší, přestože byl vesmír menší a menší. To je hlavní princip fungování časové čočky. Skutečně se ale projevuje až pro hodně velké vzdálenosti (řádově miliardy světelných let). Sledované objekty z doby t vidíme totiž zvětšené $r(t_0)/r(t)$ -krát a hodnoty funkce $r = r(t)$ jsou „malé“ jen v blízkosti počátku. Proto se může stát, že nějakou velice vzdálenou galaxii pro $z \approx 1$, která od nás bude desetkrát dále než jiná bližší o stejné velikosti, neuvidíme desetkrát menší, ale jen cca pětkrát menší než bližší galaxii.

Poznamenejme ještě, že pozorované nadsvětelné rychlosti nikterak neodporují teorii relativity. Mohou být, zhruba řečeno, vysvětleny vztahy (20.3)–(20.4). U vzdálených objektů mimo naši Galaxii je nutno též přihlídnout k samotnému rozpínání vesmíru, které způsobuje efekt časové čočky. Přitom je nezbytné se zabývat otázkou správné interpretace velikosti naměřeného zorného úhlu při pohledu do hlubin vesmí-

ru. Krátce po Velkém třesku se vesmír mohl rozpínat skutečně nadsvětelnou rychlostí, protože odpovídající expanzní funkce zde má obrovskou derivaci (viz obr. 13.4). Pokud je například \mathbb{S}_r^3 správný model našeho vesmíru, pak podle (10.8) jeho poloměr $r = r(t)$ v průměru narůstal vysoce nadsvětelnou rychlostí $140 \text{ Gly}/14 \text{ Gyr} = 10c$.



20.5. Co bylo před Velkým třeskem?

Ve standardním kosmologickém modelu se předpokládá, že čas od svého počátku plyne zcela rovnoměrně. Proto často slycháme otázku (viz např. [187], s. 769): *Co bylo před Velkým třeskem?* Zde je důležité si uvědomit, že se libovolným směrem v pozorovatelném vesmíru vlastně díváme do obrovské prostoročasové singularity. Čím odlehlejší objekty pozorujeme, tím více se nám jeví, že čas plyne pomaleji. Kdyby byly obrovské hodiny umístěné např. ve vzdálenosti $z = 1$ od Země, pozorovali bychom, jak jde jejich vteřinová ručička dvakrát pomaleji. Zatím nejdále dohlédneme do vzdálenosti 380 000 let po Velkém třesku, kdy vzniklo reliktní záření odpovídající rudému posuvu $z = 1089$. V tomto případě bychom za pozemskou hodinu viděli, že se tamní vteřinová ručička posunula jen o $3.3 = \frac{3600}{1090}$ sekundy. Pokud někdy dohlédneme dále než $z = 1089$ (např. pomocí detektorů reliktních neutrin), bude se nám zdát, že příslušný čas plyne ještě pomaleji atd.

Singularita Velkého třesku tak deformuje nejenom prostor, ale i čas. V kosmologických modelech by se proto mělo přesně definovat, co je 1 sekunda v období alespoň 380 000 let po Velkém třesku. V současnosti se zavádí pomocí přechodu mezi dvěma hladinami základního stavu atomu cesia v klidu a při teplotě 0 K. Jak ale definovat sekundu v době, kdy žádné cesium neexistovalo? Většinou se zpětně v čase extrapolují hodnoty poločasů rozpadů známých částic. Přitom není jasné, zda to lze takto provádět např. pro extrémně silná gravitační pole těsně po Velkém třesku a hovořit o časech 10^{-43} s, kdy jen stěží mohly existovat nějaké nám známé částice.

Podle příkladu 20.3 se Velký třesk od nás vlastně nachází každým směrem ještě za sférou reliktního záření. Způsobila jej zatím nám neznámá antigravitační síla.



21. Proč vznikla tato kniha

*Naše příští objevy lze očekávat
až na šestém desetinném místě.*

ALBERT ABRAHAM MICHELSON

Měl jsem to štěstí, že oba moji rodiče vystudovali matematiku a fyziku na Přírodovědecké fakultě UK v Praze. Kdykoliv jsem se jich tedy mohl zeptat na řešení nejrůznějších matematicko-fyzikálních problémů, které mi vrtaly hlavou. Také s oběma dědečky a později i oběma syny jsem mohl diskutovat mnohé otázky týkající se matematiky a fyziky. Bez tohoto rodinného zázemí bych se asi jen těžko dostal k problematice temné hmoty a temné energie, o níž pojednává tato knížka.

V roce 1990 jsem v Rektorysově *Přehledu užití matematiky* [220] narazil na vzorce popisující trajektorii hmotného bodu v gravitačním poli. To mě přivedlo k myšlence naprogramovat si úlohu tří těles, která na sebe gravitačně působí v rovině. Příslušný program zobrazující dráhy těles přímo na obrazovce počítače byl pak uveřejněn v [122]. Později jsem svůj program dále zobecnil do tří rozměrů a na problém více těles. Některá zajímavá řešení mi vyšla v mezinárodním časopise *Journal of Computational and Applied Mathematics* [123]. Používal jsem jen Newtonovu mechaniku, kde se předpokládá nekonečná rychlost šíření gravitační interakce a výsledné trajektorie jsou popsány soustavou obyčejných diferenciálních rovnic (viz (5.8)). Shodou okolností jsem pracoval v oddělení Matematického ústavu ČSAV, které se zabývá právě numerickým řešením diferenciálních rovnic. Analýzu chyb mě naučili hlavně Ing. Ivan Hlaváček, Dr. Milan Práger, prof. Karel Segeth a Dr. Emil Vitásek.

V roce 1996 jsem program zobecnil na případ, že rychlost šíření gravitační interakce c_G je konečná. Problém byl popsán soustavou obyčejných diferenciálních rovnic se zpožděním a parametr c_G se mohl zadávat libovolně. Pro 2 tělesa a vhodné počáteční podmínky model (17.9)–(17.11) dával mírně se rozvíjející spirální trajektorie, což ovšem odporuje zákonu zachování energie (ZZE). Někde v systému se tedy energie skrytě generovala. Intuice mi však napovídala, že tento model popisuje realitu

lépe pro vhodné $c_G < \infty$ než klasická Newtonova mechanika pro $c_G = \infty$. Začátkem července 1998 jsem o tomto jevu referoval na konferenci Modelling'98 v Praze a napsal článek [124], který vyšel v *Mathematics and Computers in Simulation* v roce 1999. Zde na straně 243 jen krátce zmiňuji neplatnost ZZE. Báal jsem se totiž, aby článek nebyl zamítnut. Říkat fyzikovi, že je narušen zákon zachování energie, je podobné jako říkat matematikovi, že neplatí Pythagorova věta. Rozdíl je ale v tom, že matematici umějí Pythagorovu větu dokázat (a to hned několika stovkami způsobů), zatímco fyzici přijímají platnost ZZE bez důkazu, pouze na základě měření, pozorování či zkušeností. ZZE je vlastně jen zjednodušení reality vyjádřené pomocí matematických modelů (vzorců). Dobře jsem si tehdy uvědomoval, že kdybych přímo napsal, že dvě izolovaná a vzájemně se obíhající tělesa ve vesmíru generují energii, a tedy vlastně existuje jakési kosmické perpetuum mobile, byl by článek okamžitě zamítnut. Byl to ale první střípek do mozaiky, kterou budeme dále skládat.

Záhadě jsem se pokoušel přijít na kloub. Hlavní roli zde hrál pojem gravitační aberace, protože tělesa na sebe gravitačně nepůsobila ve svých okamžitých polohách, protože jistou dobu trvá, než se přenese informace o poloze jednoho tělesa ke druhému [124]. Vodítkem pro mě bylo, že aberační jevy vykazuje i světlo, neboť se také šíří konečnou rychlostí (viz oddíl 2.9). Pojem *gravitační aberace* jsem poprvé slyšel od doc. Martina Šolce, který napsal moji oblíbenou knížku [270], jednu z mála populárně-vědeckých astronomických publikací, která obsahuje i vzorečky.

V té době jsem nic netušil o zrychleném rozpínání vesmíru, jež způsobovala neznámá temná energie. Tento překvapivý objev byl učiněn kolem roku 1998 (viz [204], [222], [71]), ale já jsem se o něm dozvěděl až někdy na počátku 21. století. Hodně jsem tehdy přemýšlel o tom, jak změřit skutečnou rychlost gravitační interakce [128], což je dosud nevyřešený problém, který by mohl k pochopení podstaty temné energie přispět.

Pokud by rychlost gravitační interakce byla stejná jako rychlost světla, jak předpokládá Einsteinova teorie relativity, pak můj program dával poměrně rychle se rozvíjející dráhy dvou těles po spirále, což odporuje skutečnosti. Pro $c_G \gg c$ a tedy malou hodnotu gravitační aberace (viz [65]) vycházela naopak docela realistická řešení. Zajímalo mě proto, zda Slunce působí gravitačně na Zemi přesně ze směru, kde ho vidíme, nebo zda je vektor této síly nepatrně posunut mimo jeho střed. S touto otázkou jsem navštívil Dr. Jana Vondráka z Astronomického ústavu AV ČR. Ptal jsem se jej též, zda se při výpočtu drah planet uvažuje gravitační vliv Jupitera na Zemi z polohy, kde astronomové Jupiter právě pozorují, nebo z jeho okamžité polohy, o kterou se opírá Newtonova mechanika. Vzpomínám si, že byl moji otázkou poněkud zaskočen. Světlo z povrchu Jupitera totiž letí na Zemi cca 45 minut a za tu dobu se Jupiter nepatrně posune. Rychlý Merkur se při svém nejbližším přiblížení k Zemi dokonce přemístí o 3 své průměry, než jeho světlo dopadne na Zemi, což je poměrně velká hodnota. V dlouhodobých numerických simulacích vývoje Sluneční soustavy se podobná opožděná působení musí projevit.

Prvním systémem, v němž jsem se snažil najít projevy gravitační aberace, byla dvojplaneta Země–Měsíc. Věděl jsem, že se Měsíc vzdaluje od Země a že se vesmír rozpíná. I když se věří, že tyto jevy nemají nic společného, pokusil jsem se obě rychlosti porovnat. Jaké však tehdy bylo moje překvapení, když jsem zjistil, že současná průměrná rychlost rozpínání vesmíru daná Hubbleovou konstantou je 2.6 cm na vzdálenost Země–Měsíc, což je řádově stejně velká hodnota, jakou se Měsíc vzdaluje od Země (3.8 cm za rok). Někteří fyzikové mi říkali, že je to jen náhodná shoda čísel, jiní mě dokonce obviňovali z numerologie. Na radu doc. Attily Mészárose z Astronomického ústavu UK jsem se tehdy pokusil ze zákona zachování momentu hybnosti vypočítat, kolik činí rychlost vzdalování Měsíce od Země způsobená slapovými silami. Vyšlo mi 2.1 cm za rok (viz kapitola 12). Pro zbývajících 1.7 cm nedávala Newtonova mechanika žádné přijatelné vysvětlení. Gravitační aberace způsobující odpudivou antigravitační sílu však mohla být příčinou tohoto přídavného rozpínání. Kdybychom tedy čistě teoreticky spojili lanem Zemi s Měsícem, mohli bychom např. roztáčet nějaký setrvačnick a generovat tak energii zdarma. Přitom vzdalování Měsíce od Země o 1.7 cm za rok, které nezpůsobují slapové síly, odpovídá výkonu 27 temelínských jaderných elektráren.

Výsledky svého bádání jsem dne 19. ledna 2007 prezentoval na semináři *Aktuální problémy numerické matematiky* našeho oddělení a pozval si tam svého přítele geofyzika doc. Ctirada Matysku z Matematicko-fyzikální fakulty UK. Ten ovšem nepřišel sám a vzal si s sebou ještě další dva kolegy, doc. Oldřicha Novotného a Dr. Jakuba Velímského. Po přednášce mně Ctirad poslal část Novotného skript [192], kde bylo také odvozeno vzdalování Měsíce pomocí slapových sil. Můj výpočet (viz [130], s. 312) se lišil v tom, že jsem uvažoval změnu rotace Země na základě skutečných dat o zpoždění rotace Země získaných z pozorování několika zatmění Slunce, která prováděli staří Babylóňané. Ve skriptech [192], s. 67, se však vycházelo ze zákona zachování momentu hybnosti a naměřeného vzdalování Měsíce od Země (3.8 cm/rok). Tím se ale dostane vyšší hodnota zpoždění rotace Země, která neodpovídá naměřeným datům.

Pak jsem v časopise *Astropis* narazil na článek Dr. Martina Pauera [197] o tom, jak se měsíček Phobos díky slapovým silám přibližuje k Marsu po spirální dráze rychlostí 1.9 cm za rok. Měl by na něj dopadnout nebo být roztrhán slapovými silami zhruba za 30–80 milionů let, což je ale velice krátká doba ve srovnání se stářím Sluneční soustavy. Napadlo mě, že Phobos podobně jako náš Měsíc také nadnáší antigravitační síla. Všechny měsíce planet, které se nacházejí pod tzv. stacionární dráhou, tedy nepadají na své mateřské planety tak rychle, jak plyne z Newtonovy mechaniky (srov. obr. 15.2). To byl další argument pro hypotézu existence antigravitačních sil způsobených gravitační aberací. Mnoho zdánlivě paradoxních pozorovaných jevů (viz závěr oddílu 11.2) vysvětluje jediná síla — *antigravitace*.

Můj kolega z oddělení, Dr. Vojtěch Pravda, mě upozornil na zajímavý článek Stevena Carlipa [38] o gravitační aberaci v teorii relativity. S Carlipem jsem si pak

vyměnil několik e-mailů o paradoxech gravitace. Upozornil jsem jej, že na str. 81 vychází ze ZZE a zákona zachování momentu hybnosti, což patrně není správný předpoklad, protože se vesmír rozpíná zrychleně. Jeho gravitační aberace tak vycházela téměř nulová. Carlip navíc předpokládal nulovou kosmologickou konstantu a ve svém výpočtu zanedbal jisté nelineární členy. Je tedy přirozené, že ani nemohl dostat rozvíjející se trajektorie. Napsal jsem proto o gravitační aberaci článek [132], který jsem zaslal do Communications of Computational Physics. Po řadě diskusí se třemi recenzenty byl přijat. Dalo mi ovšem dost práce, než jsem je svými argumenty přesvědčil.

Jeden z recenzentů mi například napsal, že mnou uváděné rozpínající se spirální trajektorie planet jsou v rozporu s Keplerovými a Newtonovými zákony. Ubezpečil jsem jej, že o tom vím a že právě o tom můj článek je. Pak jsem mu položil otázku: Odkud ví, že může používat Keplerovy zákony na škálách miliard let? Zatím máme možnost přímo prověřovat platnost Keplerových zákonů cca 400 let a drobné odchylky se v průběhu miliard let nahromadí natolik, že je lze zpětně detekovat. Uznal, že mám pravdu.

Další recenzent mi vytýkal, že můj článek je v rozporu s teorií relativity, neboť tělesa by se k sobě měla naopak přibližovat v důsledku vyzařování gravitačních vln. Odpověděl jsem mu, že teorie relativity není žádná finální teorie gravitace, ale že proti ní nebojuji. Jen snažím zabudovat vliv gravitační aberace do obecně přijímaných modelů, aby byly v souladu s pozorovanými daty. Rozšířená česká verze [130] anglicky psaného článku [132] vyšla o rok dříve, i když anglická verze vznikla jako první.

Článek [130] byl přidělen k recenzi Dr. Miroslavu Brožovi z Astronomického ústavu UK. Kladl jsem si v něm otázku, zda zrychlené rozpínání vesmíru vlastně neumožňuje zkonstruovat *perpetuum mobile*. Recenzent mi však pečlivě vyškrtal veškeré výskyty tohoto termínu. Dále mi správně poradil, že pokud se Měsíc vzdaluje od Země v důsledku antigravitačních sil, měl bych podobnou hypotézu dokázat i pro Zemi, Mars apod. Důkaz pro Mars byl poměrně snadný (viz kapitola 11). Na Marsu je v současnosti průměrná teplota kolem -60 stupňů Celsia. Kdysi ale na něm existovaly řeky, i když Slunce mělo jen 75 procent svého dnešního výkonu. Tuto skutečnost jsem diskutoval s našimi předními odborníky zabývajícími se sluneční fyzikou: doc. Marianem Karlickým, Dr. Vojtěchem Rušinem a Dr. Michalem Sobotkou. Mars tedy musel být v minulosti blíže Slunci, jinak by na každý metr čtvereční jeho povrchu dopadala jen třetinová energie (11.6) ze Slunce v porovnání se Zemí a nemohly by na něm po miliardu let téci stovky velkých řek, jak je patrné z družicových snímků Marsu.

Důkaz toho, že Země kdysi byla blíže Slunci, se mi zdál mnohem obtížnější. Shodou okolností jsem v prosinci 2007 navštívil na MFF UK přednášku Dr. Jiřího Grygara *Žeň objevů* a ten zmínil poměrně známý fakt, že se Země musí pohybovat uvnitř jistého velice úzkého mezikruží — tzv. ekosféry, aby na ní mohl existovat život. Během přednášky mě napadlo, že se ekosféra musí s časem rozpínat, protože

výkon Slunce pozvolna narůstá (viz obr. 11.2 a 13.2). To byl další důležitý kamínek do skládačky, který zároveň vysvětloval známý *paradox horkého mladého Slunce*.

Na článek [130] jsem dostal řadu pozitivních reakcí, zejména od matematiků. Téma antigravitace se pak často probíralo na seminářích našeho oddělení. První veřejnou přednášku *Antigravitace a její projevy* jsem pronesl v Radničním klubu v Plzni dne 10. září 2008, kam mě pozvalo vedení Hvězdárny a planetária Plzeň. Několik dalších přednášek jsem absolvoval i na Matematicko-fyzikální fakultě UK (5. 3. 2008), Západočeské univerzitě (13. 11. 2008), Českém vysokém učení technickém (11. 4. 2009), Učené společnosti ČR (20. 4. 2010), University of Jyväskylä (10. 6. 2011), Academia Sinica (27. 8. 2012) aj.

Několika našim geofyzikům a astronomům jsem nabízel, abychom o tématu antigravitace napsali společně článek do nějakého specializovaného geofyzikálního či astronomického časopisu. Jejich způsob argumentace a vyjadřování mi je totiž vzdálený a podstatně se liší od stylu psaní matematických článků, tj. motivace \rightarrow definice \rightarrow věta \rightarrow důkaz \rightarrow aplikace, který s oblibou používám. Bohužel mě všichni odmítli, a tak jsem se obrátil na svého kolegu matematika Dr. Jana Brandtse z Univerzity v Amsterdamu. Ten namítal, že bychom se fyzikům neměli plést do řemesla. Avšak jednou na rohu Žitné a Štěpánské ulice, když jsme šli spolu na oběd, mě inspiroval myšlenkou akumulace malých chyb, kterou lze formulovat zhruba takto: Žádný model nepopisuje realitu naprosto přesně. Pokud se budou skutečné trajektorie nějakého systému dvou či více těles lišit od newtonovského modelu o malé ε za rok, pak za miliardu let může být tato chyba poměrně velké číslo, např. $10^9\varepsilon$, ale klidně i $10^9(10^9 + 1)/2 \approx 0.5 \cdot 10^{18}\varepsilon$, jestliže se budou kumulovat chyby z předchozích let. Brandts sám tuto myšlenku nepokládal za podstatnou, ale já jsem si uvědomil, že v tom je „jádro pudla“, tj. hledaný záhadný zdroj temné energie může být vlastně jen chyba modelu. Později jsme společně napsali článek [143], který vyšel ve sborníku XXVII. valného shromáždění Mezinárodní astronomické unie v Riu de Janeiru.

Pokračoval jsem ale v hledání dalších argumentů podporujících skutečnost, že se vesmír rozpíná všude kolem nás i na docela malých škálách, tj. také ve Sluneční soustavě. Například v knize [15], s. 534, se píše, že Neptun i Kuiperův pás komet se kdysi nalézaly blíže Slunci. V článku [219] jsem se zase dočetl, jak se Neptun nečekaně opoždí na své dráze, což opět odpovídalo antigravitačnímu působení. Časopis *Astropis* mě inspiroval znovu. V roce 2008 uveřejnil článek Mgr. Jana Ebra [56] o velice hustých galaxiích v raných stadiích vesmíru. Uvědomil jsem si, že je to další významná indicie pro postulování antigravitačních sil (viz kapitola 16). Galaxie se během svého vývoje pozvolna nafukují (což zřejmě odporuje ZZE). Na toto téma jsem našel celou řadu článků o vzdálených superhustých galaxiích, které mají hustotu až 8krát větší než galaxie v našem okolí.

Astropis mě inspiroval i potřetí, když jeho šéfredaktor Dr. Vladimír Kopecký napsal článek [111] o Labutí písni podivné exoplanety WASP-18b, která obíhá pod stacionární dráhou hvězdy staré téměř miliardu let, avšak za milion let by měla spad-

nout na její povrch po spirální dráze díky slapovým silám. Jak se exoplaneta vůbec mohla na tuto dráhu dostat? Ihned mě napadlo, že zde zase může hrát významnou roli antigravitace, která exoplanetu vlastně nadnáší, a tedy za milion let na svou mateřskou hvězdu nespadne. Domnívám se, že projevy antigravitace se na tomto systému během několika desetiletí prokáží.

To, že neplatí ZZE, stačí ukázat na jediném příkladu. Já jsem jich zatím nasbíral přes 20, i když se většinou jedná o odchylku na desátém platném místě za rok. Nechce se mi věřit, že bych se byl tolikrát mýlil a že by to byla vše jen shoda náhod. Samozřejmě netvrdím, že by se ZZE neměl používat. Bez něj se v řadě výpočtů neobejdeme. Většinu situací značně usnadňuje.

V článku [137] uvádím více než 10 argumentů ukazujících, že temná energie povolna rozpíná celou Sluneční soustavu. Nejprve jsem článek zaslal do prestižního časopisu *Astrophysical Journal*. Po několika měsících mi odepsali, abych jej raději uveřejnil v nějakém více filosofickém časopisu. Žádné periodikum zabývající se filosofickými otázkami v astronomii jsem ale nenalezl. Článek jsem tedy nabídl do časopisu *New Astronomy*, jehož název se mi jevil příhodný.

Recenzenti napsali celkem příznivé posudky. Jeden z nich, prof. Weijia Zhang z Oxford University, dokonce vystoupil z anonymity, aby se mnou mohl diskutovat získané výsledky. Napsal mi, že souhlasí se vzdalováním Země od Slunce ale s rychlostí o 2 řády menší. Jako důkaz mi poslal svůj článek [296], kde odvozuje rychlost vzdalování 5–14 cm/rok pomocí přírůstků fosilních korálů (srov. kapitola 13). Když jsem si jeho článek podrobně přečetl a zkontroloval všechny vzorce, zjistil jsem, že se o dva řády spletl. Podle jeho měření z obrázku 4 z [296], s. 4015, byla Země před půl miliardou let v kambriu o 3 miliony km blíže Slunci, než je nyní. Proto jsem jej požádal, aby si zkontroloval následující výpočet

$$\frac{3 \cdot 10^9 \text{ m}}{5 \cdot 10^8 \text{ let}} = 6 \text{ m/rok.}$$

Byl velice překvapen a ihned můj článek doporučil. Později se mi přiznal, že jej příliš ovlivnil G. A. Krasinsky, s nímž si dopisoval. V článku [117] Krasinsky se svým kolegou odvozují rychlost vzdalování Země od Slunce jen na 15 cm za rok (srov. oddíl 13.7).

Vedoucí redaktor časopisu *New Astronomy* mi pak napsal, že zařadí můj článek [137] jako první do nového ročníku 2012. Hned nato jsem byl vyzván nakladatelstvím NOVA Publishers (New York), abych přispěl kapitolou do monografie [144] o temné energii. Spojil jsem se s Dr. Janem Brandtsem a dalším matematikem prof. Lawrencem Somerem, s nímž jsem později napsal článek [156] o antigravitaci publikovaný v *International Journal of Astronomy and Astrophysics* v roce 2013. Když jsem nedávno Lawrencovi vysvětloval odvození Friedmannovy rovnice a kosmologických parametrů (10.7), tak prohlásil:

Oh, I see, dark matter and dark energy exist by definition.

Lawrence deset let navštěvoval seminář z astrofyziky ve Washingtonu, DC, kde se mj. seznámil i s Verou Rubinovou. O Vánocích 2012 jsem se rozhodl, že se podrobněji podívám na práce Rubinové a také Fritze Zwickyho, které předpovídají existenci temné hmoty. Analýza jejich výsledků je obsahem kapitol 7, 8 a 9. S některými výpočty mi hodně pomohl můj syn Filip (viz též [145], [146]). Postup je veden tak, že si pro galaxie i galaktické kupy sami můžete překontrolovat, že ve vesmíru není 5 až 6krát více temné hmoty než hmoty baryonové, jak tvrdí Planck Collaboration. Na ještě větších škálách se již znatelně projevuje chyba modelu expanze vesmíru, která se pak interpretuje jako temná hmota. Postupně jsem objevoval další a další nedostatky standardního kosmologického modelu (viz kapitola 19).

Všem kolegům zmíněným v předchozím textu mnohokrát děkuji za inspiraci a podnětné a mnohdy velice polemické diskuze. Bez nich by tato knížka nevznikla. Také bych rád poděkoval všem členům Kosmologické sekce České astronomické společnosti za podporu, vstřícnost a ochotu poslouchat mé přednášky. Zejména její předseda, Ing. Vladimír Novotný, mě často upozorňoval na zajímavou literaturu týkající se problematiky temné hmoty a temné energie. Díky, Vlád'!



Literatura

- [1] C. Adami et al., *The build-up of the Coma cluster by infalling substructures*. Astron. Astrophys. **443** (2005), 17–27.
- [2] S. W. Allen, A. E. Evrard, A. B. Mantz, *Cosmological parameters from observations of galaxy clusters*. Annual Rev. Astron. Astrophys. **49** (2011), 409–470.
- [3] L. Amendola, S. Tsujikawa, *Dark energy – Theory and observations*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2010.
- [4] C. Amsler et al., *Review of particle physics*. Phys. Lett. B **667** (2008), Sec. 19: Big-Bang Cosmology, 217–227.
- [5] P. Anderle, *Základy nebeské mechaniky*. Academia, Praha, 1971.
- [6] P. Anderle, *Nebeská mechanika*. Academia, Praha, 1987.
- [7] Aristarchus of Samos, *Peri megethón kaí apostemáton heliόν kaí selénes*. Translated from ancient Greek to Latin by F. Commandino in 1572.
- [8] Aristote, *Du ciel*. 350 BC, text établi et traduit par P. Moraux, Les Belles Lettres, Paris, 1965.
- [9] W. Baade, F. Zwicky, *Cosmic rays from super-novae*. Proc. Nat. Acad. Sci. **20** (1934), 254–263.
- [10] D. G. Banhatti, *Newtonian mechanics & gravity fully model disk galaxy rotation curves without dark matter*. ArXiv: 0806.1131, 2008, 1–6.
- [11] J. D. Barrow, F. J. Tipler, *The anthropic cosmological principle*. Oxford Univ. Press, 1986.
- [12] G. Battaglia et al., *The radial velocity dispersion profile of the Galactic halo: Constraining the density profile of the dark halo of the Milky Way*. Astro-ph/0506102v2, 2008, 1–11.
- [13] J. Bekenstein, *Relativistic gravitation theory for the modified Newtonian dynamics paradigm*. Phys. Rev. D **70** (2004), 083509.
- [14] M. Belet, A. Belet, *Look at the stars and become a geometer!* In: History of Mathematics: Histories of Problems, Ellipses, Paris, 1997, 255–283.
- [15] B. Bertotti, P. Farinella, D. Vokrouhlický, *Physics of the Solar system*. Kluwer, Dordrecht, 2003.
- [16] B. G. Bills et al., *Improved estimate of tidal dissipation within Mars from MOLA observations of the shadow of Phobos*. J. Geophys. Res. **110** (2005), E07004, 15 pp.

-
- [17] J. Binney, M. Merrifield, *Galactic astronomy*. Princeton, 1998.
 - [18] A. Biviano et al., *A catalogue of velocities in the central region of the Coma cluster*. Astron. Astrophys. Suppl. Ser. **111** (1995), 265–274.
 - [19] D. Blanuša, *Über die Einbettung hyperbolischer Räume in euklidische Räume*. Monatsh. Math. **59** (1955), 217–229.
 - [20] H. Böhringer, N. Werner, *X-ray spectroscopy of galaxy clusters: studying astrophysical processes in the largest celestial laboratories*. Astron. Astrophys. Rev. **18** (2010), 127–196.
 - [21] H. E. Bond et al., *A star in the Solar neighborhood that formed shortly after the Big Bang*. Astrophys. J. **765** (2013), L12.
 - [22] A. Bosma, *Dark matter in galaxies: Observational overview*. In: Dark Matter in Galaxies, IAU Sympos. 220 (eds. S. Ryder, D. J. Pisano, M. Walker, K. C. Freeman), 2003, 1–12.
 - [23] J. Bouška, V. Vanýsek, *Zatmění a zákryty nebeských těles*. Academia, Praha, 1963.
 - [24] R. J. Bouwens et al., *A candidate redshift $z \approx 10$ galaxy and rapid changes in that population at an age of 500 Myr*. Nature **469** (2011), 504–507.
 - [25] J. Bovy, S. Tremaine, *On the local dark matter density*. Astrophys. J. **756** (2012), 89, 6 pp.
 - [26] D. Brander, *Isometric embeddings between space forms*. Master Thesis, Univ. of Pennsylvania, 2003, 1–48.
 - [27] T. Broadhurst, E. Scannapieco, *Detecting the gravitational redshift of cluster gas*. Astrophys. J. **533** (2000), L93–L97.
 - [28] M. Brooks, *13 things that do not make sense*. New Scientist **2491** (2005), 30–37.
 - [29] D. J. A. Brown et al., *Are falling planets spinning up their host stars?*. Mon. Not. R. Astron. Soc. **415** (2011), 605–618.
 - [30] M. Brož, M. Šolc, *Fyzika sluneční soustavy*. MatfyzPress, Praha, 2013.
 - [31] G. Bruno, *De l'infinito, universo e mondi*. Venezia, 1584; český překlad je obsažen v G. Bruno: *Dialogy*. Academia, Praha, 2008.
 - [32] F. Buitrago et al., *Shaping massive galaxies: their morphology and kinematics at $z = 1 - 3$* . Highlights of Spanish Astrophysics VI, Proc. of the IX Sci. Meeting of the Spanish Astronom. Soc., Madrid (ed. M. R. Zapatero et al.), 2010, 154–160.
 - [33] M. Burša, *Slapová dynamika a původ Phobosu*. Říše hvězd **69** (1988), 169–171.

- [34] M. Burša, *Decrease in spin rate of Mars due to tidal torques exerted by Phobos and Sun*. Bull. Astron. Inst. Czechosl. **39** (1988), 168–171.
- [35] M. Burša, K. Peč *Gravity field and dynamics of the Earth*. Springer, Berlin, 1993.
- [36] J. W. Cannon, W. J. Floyd, R. Kenyon, W. R. Parry, *Hyperbolic geometry*. In: Flavors of Geometry, Math. Sci. Res. Inst. Publ. **31**, Cambridge Univ. Press, 1997, 59–115.
- [37] A. Cappi, *Gravitational redshift in galaxy clusters*. Astron. Astrophys. **301** (1995), 6–10.
- [38] S. Carlip, *Aberration and the speed of gravity*. Phys. Lett. A **267** (2000), 81–87.
- [39] M. Carrera, D. Giulini, *Influence of global cosmological expansion on local dynamics and kinematics*. Rev. Mod. Phys. **82** (2010), 169–208.
- [40] B. W. Carroll, D. A. Ostlie, *Introduction to modern astrophysics*. Pearson Addison-Wesley, 2007.
- [41] B. Carter, *Large number coincidences and the Anthropic Principle in cosmology*. In: IAU Symposium 63, Confrontation of Cosmological Theories with Observational Data (ed. M. S. Longair), Riedel, Dordrecht, 1974, 291–298.
- [42] B. E. Clotfelter, *The Cavendish experiment as Cavendish knew it*. Amer. J. Phys. **55** (1987), 210–213.
- [43] D. Clowe et al., *A direct empirical proof of the existence of dark matter*. Astrophys. J. Lett. **648** (2006), L109–L113.
- [44] M. Colless, A. M. Dunn, *Structure and dynamics of the Coma cluster*. Astrophys. J. **458** (1996), 435–454.
- [45] F. I. Cooperstock, V. Faraoni, D. N. Vollick, *The influence of the cosmological expansion on local systems*. Astrophys. J. **503** (1998), 61–66.
- [46] N. Copernicus, *Complete works, vol. II, On the revolutions*. Polish Sci. Publishers, Warsaw–Kraków, 1978.
- [47] C. M. Cox, B. F. Chao, *Detection of large-scale mass redistribution in the terrestrial system since 1998*. Science **297** (2002), 831–833.
- [48] H. D. Curtis, *Novae in spiral nebulae and the island universe theory*. Publ. Astronom. Soc. Pacific **29** (1917), 206–207.
- [49] I. Damjanov et al., *Red nuggets at high redshift: structural evolution of quiescent galaxies over 10 Gyr of cosmic history*. Astrophys. J. Lett. **739** (2011), L44.
- [50] G. F. Davies, *Thermal evolution of the mantle*. Treatise on Geophysics, vol. 9, Evolution of the Earth (ed. D. J. Stevenson), Elsevier, 2007, 197–216.

-
- [51] A. Dědoch, K. Halíř, M. Větrovcová, *Zatmění Slunce 11. srpna 1999*. Západočeská pobočka ČAS, Praha, 1998.
- [52] J. O. Dickey et al., *Lunar laser ranging: A continuing legacy of the Apollo program*. Science **265** (1994), 482–490.
- [53] Y. V. Dumin, *A new application of the Lunar laser retroreflectors: Searching for the “local” Hubble expansion*. Adv. Space Res. **31** (2003), 2461–2466.
- [54] Y. V. Dumin, *Testing the dark-energy-dominated cosmology by the Solar-System experiments*, Proc. of the 11th Marcel Grossmann Meeting on General Relativity (eds. H. Kleinert, R. T. Jantzen, R. Ruffini), World Sci., Singapore, 2008, 1752–1754, arXiv: 0808.1302.
- [55] G. Dvali, A. Gruzinov, M. Zaldarriga, *The accelerated universe and the Moon*. Phys. Rev. D **68** (2003), 024012.
- [56] J. Ebr, *Přiliš husté galaxie v hlubinách vesmíru*. Astropis **XV** (2008), č. 2, 44.
- [57] A. Eddington, *Space, time and gravitation*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1966.
- [58] A. Einstein, *Über den Einfluss der Schwerkraft auf die Ausbreitung des Lichtes*. Ann. d. Phys. **35** (1911), 898–908.
- [59] A. Einstein, *Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie*. Königl. Preuss. Akad. Wiss., Berlin (1917), 142–152.
- [60] D. J. Eisenstein, C. L. Bennett, *Cosmic sound waves rule*. Physics Today **61** (2008), 44–50.
- [61] J. Q. Feng, C. F. Gallo, *Mass distribution in rotating thin-disk galaxies according to Newtonian dynamics*. Galaxies **2** (2014), 199–222.
- [62] A. Ferré-Mateu, I. Trujillo, *Superdense massive galaxies in the nearby universe*. Proc. of the XXVII. General Assembly of IAU, S262 (eds. G. Bruzual, S. Charlot), Kluwer, 2010, 331–332.
- [63] A. V. Filippenko, *Einstein’s biggest blunder? High-redshift supernovae and the accelerating universe*. ArXiv: astro-ph/0109399v2, 2001.
- [64] T. C. van Flandern, *A determination of the rate of change of g* . Mon. Not. R. Astron. Soc. **170** (1975), 333–342.
- [65] T. C. van Flandern, *The speed of gravity – what the experiments say*. Phys. Lett. A **250** (1998), 1–11.
- [66] A. Friedmann, *Über die Krümmung des Raumes*. Z. Phys. **10** (1922), 377–386.
- [67] A. Friedmann, *Über die Möglichkeit einer Welt mit konstanter negativer Krümmung des Raumes*. Z. Phys. **21** (1924), 326–332.

- [68] C. F. Gallo, J. Q. Feng, *Galactic rotation described by a thin-disk gravitational model without dark matter*. J. Cosmology **6** (2010), 1373–1380.
- [69] G. Gamow, *Rotating universe?*. Nature **158** (1946), 549.
- [70] I. Gilmour, M. A. Sephton (eds.), *An introduction to astrobiology*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2003.
- [71] J. Glanz, *Astronomers see a cosmic antigravity force at work*. Science **279** (1998), no. 5355, 1298–1299.
- [72] E. N. Glass, *Gravothermal catastrophe, an example*. Phys. Rev. D **82** (2010), 044039.
- [73] K. Gödel, *An example of a new type of cosmological solutions of Einstein's field equations of gravitation*. Rev. Mod. Phys. **21** (1949), 447–450.
- [74] B. R. Goldstein, *Eratosthenes on the "measurement" of the Earth*. Historia Math. **11** (1984), 411–416.
- [75] V. Gonzáles et al., *Evolution of galaxy stellar mass functions, mass densities, and mass to light ratios from $z \sim 7$ to $z \sim 4$* . Astrophys. J. Lett. **735** (2011), L34.
- [76] M. D. Gregg, M. J. West, *Galaxy disruption as the origin of intracluster light in the Coma cluster of galaxies*. Nature **396** (1998), 549–552.
- [77] J. B. Griffiths, J. Podolský, *Exact space-times in Einstein's general relativity*. Cambridge Univ. Press, 2009.
- [78] J. Grygar, Z. Horský, P. Mayer, *Vesmír*. Mladá fronta, Praha, 1983.
- [79] P. Guillermy, S. Koutchmy, *Total eclipses*. Springer, 1999.
- [80] J. E. Gunn, B. Tinsley, *An accelerating Universe?*. Nature **257** (1975), 454–457.
- [81] E. Halley, *Methodus singularis qua Solis parallaxis sive distantia a Terra, ope Veneris intra Solem conspicienda, tuto determinari poterit*. Trans. Roy. Soc. London (1716), 454–564.
- [82] P. S. Harrington, *Eclipse!* John Wiley, New York, 1997.
- [83] W. E. Harris, *Catalog of parameters for Milky Way globular clusters: The database*. Feb. 2003. See also Astrophys. J. **112** (1996), 1487.
- [84] W. K. Hartmann, *Mars*. Workman Publ., New York, 2003.
- [85] J. Havránek, M. Šolc, J. Grygar, *V Praze o Einsteinovi a o Einsteinovi v Praze*. Vesmír **58** (1979), 178–183.
- [86] W. D. Heintz, *A study of multiple-star systems*. Astronom. J. **111** (1996), 408–411.

-
- [87] C. Hellier, *An orbital period of 0.94 days for the hot-Jupiter planet WASP-18b*. *Nature* **460** (2009), 1098–1100.
- [88] J. N. Hewitt, *Gravitational lenses*. *Ann. New York Acad. Sci.* **688** (1993), 250–259.
- [89] D. Hilbert, *Über Flächen von constanter gausscher Krümmung*. *Trans. Amer. Math. Soc.* **2** (1901), 87–99.
- [90] R. D. Holder, S. Mitton (eds.), *Georges Lemaître: Life, science and legacy*. Springer, Berlin, Heidelberg, 2012.
- [91] J. Horský, J. Novotný, M. Štefaník, *Úvod do fyzikální kosmologie*. Academia, Praha, 2004.
- [92] E. Hubble, *A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae*. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **15** (1929), 168–173.
- [93] J. P. Hughes, *The mass of the Coma cluster: Combined X-ray and optical results*. *Astrophys. J.* **337** (1989), 21–33.
- [94] C. V. L. Charlier, *How an infinite world may be built up?*. *Arkiv för Mat. Astronom. Fys.* **16** (1922), 1–34.
- [95] C. F. Chyba, D. G. Jankowski, P. D. Nicholson, *Tidal evolution in the Neptune-Triton system*. *Astron. Astrophys.* **219** (1989), L23–L26.
- [96] C. Impey, W. K. Hartmann, *The universe revealed*. Brooks-Cole, 2000.
- [97] A. Irrgang, B. Wilcox, E. Tucker, L. Schiefelbein, *Milky Way mass models for orbit calculations*. *Astronom. Astrophys.*, arXiv: 1211.4353v4, 2014, 1–13.
- [98] R. A. Jacobson, *The orbits and masses of the Martian satellites and the libration of Phobos*. *Astronom. J.* **139** (2010), 668–679.
- [99] J. Jałocha, L. Bratek, M. Kutschera, *Is dark matter present in NGC 4736? An iterative spectral method for finding mass distribution in spiral galaxies*. *ArXiv: astro-ph/0611113v3*, 2008, 1–7.
- [100] J. Jersák, *Rozpínání vesmíru*. *Čs. čas. fyz.* **58** (2008), 136–146.
- [101] G. C. Jordan IV et al., *Three-dimensional simulations of the deflagration phase of the gravitationally confined detonation model of type Ia supernovae*. *Astrophys. J.* **681** (2008), 1448–1457.
- [102] N. A. Kaib, R. Roškar, T. Quinn, *Sedna and the Oort cloud around a migrating Sun*. *Icarus* **251** (2011), 491–507.
- [103] L. Kárná, *Genetický kód aneb Studovala příroda teorii kódů?* *Pokroky mat. fyz. astronom.* **56** (2011), 89–98.

- [104] S.M. Kent, J.E. Gunn, *The dynamics of rich clusters of galaxies, I. The Coma cluster*. Astronom. J. **87** (1982), 945–971.
- [105] A.W. Kerr, J.C. Hauck, B. Mashhoon, *Standard clocks, orbital precession and the cosmological constant*. Classical Quant. Grav. **20** (2003), 2727–2736.
- [106] Y.-R. Kim, R.A.C. Croft, *Gravitational redshifts in simulated galaxy clusters*. Astrophys. J. **607** (2004), 164–174.
- [107] R. Kippenhahn, *Odhalená tajemství Slunce*. Mladá fronta, Praha, 1999.
- [108] J. Kleczek, *Velká encyklopedie vesmíru*. Academia, Praha, 2002.
- [109] E. Kokubo, S. Ida, J. Makino, *Evolution of a circumterrestrial disk and formation of a single Moon*. Icarus **148** (2000), 419–436.
- [110] Z. Kopal, *Hmota o hustotě jedné miliardy*. Říše hvězd **17** (1936), 56–59.
- [111] V. Kopecký, *Labutí píseň exoplanety*. Astropis **XVI** (2009), č. 4, 33–34.
- [112] C.T. Kowal, *Absolute magnitudes of supernovae*. Astronom. J. **73** (1968), 1021–1024.
- [113] C.T. Kowal, S. Drake, *Galileo’s observations of Neptune*. Nature **287** (1980), 311–313.
- [114] O. Kowalski, M. Křížek, *Abelova cena v roce 2009 udělena Michailu Gromovovi*. Pokroky mat. fyz. astronom. **54** (2009), 177–187.
- [115] O. Kowalski, M. Křížek, V. Pravda, *Nejsymetričtější variety*. Pokroky mat. fyz. astronom. **59** (2014), 135–145.
- [116] G.V. Kraniotis, S.B. Whitehouse, *Compact calculation of the perihelion precession of Mercury in general relativity, the cosmological constant and Jacobi’s inversion problem*. Classical Quant. Grav. **20** (2003), 4817–4835.
- [117] G.A. Krasinski, V.A. Brumberg, *Secular increase of astronomical unit from analysis of the major planet motions, and its interpretation*. Celest. Mech. Dyn. Astr. **90** (2004), 267–288.
- [118] A. Kropáč, *Pozoruhodná řešení problému N těles*. Pokroky mat. fyz. astronom. **48** (2003), 308–315.
- [119] P. Kroupa, *Star-cluster formation and evolution*. In: Proc. IAU S237, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2007, 230–237.
- [120] P. Kroupa, *Local-group tests of dark-matter concordance cosmology*. ArXiv: 1006.1647v3, 2010, 1–26.

-
- [121] F. Křížek, M. Křížek, J. Šolc, *How massive is the black hole at the centre of our Galaxy?* Obzory mat. fyz. inf. **36** (2007), č. 1, 43–51; též Pokroky mat. fyz. astronom. **49** (2004), 104–113.
- [122] M. Křížek, *O problému tří těles*. Rozhledy mat.-fyz. **70** (1992), 105–112.
- [123] M. Křížek, *Numerical experience with the three-body problem*. J. Comput. Appl. Math. **63** (1995), 403–409.
- [124] M. Křížek, *Numerical experience with the finite speed of gravitational interaction*. Math. Comput. Simulation **50** (1999), 237–245.
- [125] M. Křížek, *Proč ve vesmíru pozorujeme zdánlivě nadsvětelné rychlosti?* Pokroky mat. fyz. astronom. **44** (1999), 218–226.
- [126] M. Křížek, *Matematika a sluneční soustava*. Učitel matematiky **9** (2001), 65–73.
- [127] M. Křížek, *Matematik Karel Petr*. Učenci očima kolegů a žáků, sborník Učené společnosti ČR, Academia, Praha, 2004, 101–108.
- [128] M. Křížek, *Význam úhlových měření při poznávání vesmíru*. Pokroky mat. fyz. astronom. **51** (2006), 147–162.
- [129] M. Křížek, *The rôle of the protractor in understanding the universe*. Obzory mat. fyz. inf. **37** (2008), 36–47.
- [130] M. Křížek, *Projevuje se gravitační aberace v dynamice Sluneční soustavy a rozpínání vesmíru?* Pokroky mat. fyz. astronom. **53** (2008), 295–314.
- [131] M. Křížek, *O Keplerově rovnici*. Matematika–fyzika–informatika **19** (2009), 449–452.
- [132] M. Křížek, *Does a gravitational aberration contribute to the accelerated expansion of the Universe?* Comm. Comput. Phys. **5** (2009), 1030–1044.
- [133] M. Křížek, *Gravitační zákon — objev tisíciletí*. Pokroky mat. fyz. astronom. **54** (2009), 164–169.
- [134] M. Křížek, *Numerical simulation and the origin of dark energy*. Proc. Conf. Computational Analysis and Optimization (eds. S. Repin, T. Tiihonen, T. Tuovinen), Univ. of Jyväskylä, 2011, 25–31.
- [135] M. Křížek, *Můžeme věřit numerickým výpočtům?* Pokroky mat. fyz. astronom. **56** (2011), 290–297.
- [136] M. Křížek, *Letní trojúhelník*. Corona Pragensis (2011), č. 3, s. 1.
- [137] M. Křížek, *Dark energy and the anthropic principle*. New Astronomy **17** (2012), 1–7.
- [138] M. Křížek, *Nobelova cena za fyziku v roce 2011 udělena za objev zrychlujícího se rozpínání vesmíru*. Pokroky mat. fyz. astronom. **57** (2012), 89–101.

- [139] M. Křížek, *Antigravitace a její projevy, aneb Platí zákon zachování energie? Část 1.* Čs. čas. fyz. **63** (2013), 105–111.
- [140] M. Křížek, *Antigravitace a její projevy, aneb Platí zákon zachování energie? Část 2.* Čs. čas. fyz. **63** (2013), 162–167.
- [141] M. Křížek, *XXVIII. valné shromáždění Mezinárodní astronomické unie.* Pokroky mat. fyz. astronom. **58** (2013), 39–49.
- [142] M. Křížek, *Do Galaxies expand due to dark energy?* S295 – The Intriguing Life of Massive Galaxies (eds. D. Thomas, A. Pasquali, and I. Ferreras), Proc. of the IAU XXVIIIth General Assembly in Beijing, August 2012, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2013.
- [143] M. Křížek, J. Brandts, *Manifestations of dark energy in the dynamics of the Solar system.* S264 – Solar and Stellar Variability: Impact on Earth and Planets (eds. A. G. Kosovichev, A. H. Andrei, and J.-P. Rozelot), Proc. of the IAU XXVIIIth General Assembly in Rio de Janeiro, August 2009, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2010, 410–412.
- [144] M. Křížek, J. Brandts, L. Somer, *Is gravitational aberration responsible for the origin of dark energy?* Dark Energy: Theory, Implications and Roles in Cosmology (eds. C. A. Del Valle and D. F. Longoria), Nova Sci. Publishers, New York, 2012, 29–57.
- [145] M. Křížek, F. Křížek, *Před 80 lety Zwicky objevil temnou hmotu.* Pokroky mat. fyz. astronom. **58** (2013), 107–123.
- [146] M. Křížek, F. Křížek, L. Somer, *Which effects of galactic clusters can reduce the amount of dark matter.* Bulg. Astronom. J. **21** (2014), 1–23.
- [147] M. Křížek, P. Křížek, *Kružnice na astronomickém ciferníku pražského orloje.* Matematika-fyzika-informatika **19** (2010), 577–586.
- [148] M. Křížek, P. Křížek, *Why has nature invented three stop codons of DNA and only one start codon?* J. Theor. Biol. **304** (2012), 183–187.
- [149] M. Křížek, L. Liu, *Struktura tradičního čínského kalendáře.* Rozhledy mat.-fyz. **73** (1996), 270–275.
- [150] M. Křížek, L. Liu, A. Šolcová, *Fundamental achievements of ancient Chinese mathematicians.* Math. Spectrum **38** (2005/2006), 99–107.
- [151] M. Křížek, P. Neittaanmäki, *Finite element approximation of variational problems and applications.* Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics vol. 50, Longman Scientific & Technical, Harlow; copublished with John Wiley, New York, 1990.

-
- [152] M. Křížek, J. Palouš, *XXVII. valné shromáždění IAU v Rio de Janeiro*. Pokroky mat. fyz. astronom. **54** (2009), 256–257.
- [153] M. Křížek, J. Pradlová, *On the nonexistence of a Lobachevsky geometry model of an isotropic and homogeneous universe*. Math. Comput. Simulation **61** (2003), 525–535.
- [154] M. Křížek, M. Práger, E. Vitásek, *Spolehlivost numerických výpočtů*. Pokroky mat. fyz. astronom. **42** (1997), 8–23.
- [155] M. Křížek, H.-G. Roos, W. Chen, *Two-sided bounds of the discretization error for finite elements*. ESAIM Math. Model. Numer. Anal. **45** (2011), 915–924.
- [156] M. Křížek, L. Somer, *Antigravity – its manifestations and origin*. Internat. J. Astron. Astrophys. **3** (2013), 227–235.
- [157] M. Křížek, L. Somer, *Manifestations of dark energy in the Solar system*. Grav. Cosmol. **21** (2015), nr. 1, 27 pp.
- [158] M. Křížek, L. Somer, A. Šolcová, *Kouzlo čísel: Od velkých objevů k aplikacím*. Edice Galileo, sv. 39, Academia, Praha, 2009, 2. vyd. 2011.
- [159] M. Křížek, A. Šolcová, *How to measure gravitational aberration? S240 – Binary Stars as Critical Tools and Tests in Contemporary Astrophysics* (eds. W. I. Hartkopf, E. F. Guinan, and P. Harmanec), Proc. of the IAU XXVIth General Assembly in Prague, August 2006, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2007, 389, 670–677.
- [160] M. Křížek, M. Větrovcová, *Matematika kolem zatmění*. Rozhledy mat.-fyz. **77** (2000), 78–85.
- [161] P. Kulhánek, *Gravity Probe B — ověřování základních principů Einsteinovy obecné teorie relativity*. Pokroky mat. fyz. astronom. **49** (2004), 226–233.
- [162] L. R. Kump, J. F. Kastings, R. G. Crane, *The Earth system*. Prentice Hall, New Jersey, 1999.
- [163] L. Landau, *On the theory of stars*. Phys. Zeitschrift der Sowjetunion **1** (1932), 285–288.
- [164] K. K. Lang, *Cambridge Encyclopedia of the Sun*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2001.
- [165] K. R. Lang, *Astrophysical formulae, vol. II*. Springer, Berlin, 2006.
- [166] P. S. Laplace, *A treatise in celestial mechanics, vol. IV, book X*. Přeložil N. Bowditch, Chelsea, New York, 1966.
- [167] G. E. Lemaître, *Un Univers homogène de masse constante et de rayon croissant rendant compte de la vitesse radiale des nébuleuses extragalactiques*. Ann. Soc. Sci. de Bruxelles (1927), April, 49–59.

- [168] A. P. Lightman, W. H. Press, R. H. Price, S. A. Teukolsky, *Problem book in relativity and gravitation*. Princeton Univ. Press, 1975.
- [169] C. H. Lineweaver, D. Schwartzman, *Cosmic thermobiology*. In: *Origins* (ed. J. Seckbach), Kluwer, Dordrecht, 2003, 233–248.
- [170] E. L. Lokas, G. A. Mamon, *Dark matter distribution in the Coma cluster from galaxy kinematics: Breaking the mass-anisotropy degeneracy*. Mon. Not. R. Astron. Soc. **343** (2003), 401–412.
- [171] O. L. Mangasarian, J.-S. Pang, *Computational optimization: a tribute to Olvi Mangasarian, vol. 1*. Springer, 1999.
- [172] E. Maor, *Venus in transit*. Princeton Univ. Press, Princeton, 2000.
- [173] C. Marchal, *The three-body problem*. Elsevier, Amsterdam, 1991.
- [174] G. E. Marsh, C. Nissim-Sabat, *Comment on “The speed of gravity”*. Phys. Lett. A **262** (1999), 257–260.
- [175] B. Mashhoon et al., *Relativistic effects in the motion of the Moon*. Lect. Notes Phys. **562** (2001), 310–316.
- [176] B. Mashhoon, N. Mobed, D. Singh, *Tidal dynamics in cosmological spacetimes*. Classical Quant. Grav. **24** (2007), 5031–5046.
- [177] S. S. McGaugh, *Milky Way mass models and MOND*. Astrophys. J. **683** (2008), 137–148.
- [178] R. McLachlan, *A gallery of constant-negative-curvature surfaces*. Math. Intelligencer **16** (1994), 31–37.
- [179] C. G. McVittie, *The mass-particle in expanding universe*. Mon. Not. R. Astronom. Soc. **93** (1933), 325–339.
- [180] I. Melo, *Tmavá energia, zrýchlenie a plochosť vesmíru*. Pokroky mat. fyz. astronom. **46** (2001), 89–100.
- [181] P. Mészáros, A. Mészáros, *The brightness distribution of bursting sources in relativistic cosmologies*. Astrophys. J. **449** (1995), 9–17.
- [182] Z. Mikulášek, J. Krtička, *Základy fyziky hvězd*. Masarykova univerzita, Brno, 2005.
- [183] E. A. Milne, *Relativity, gravitation and world structure*. Clarendon Press, Oxford, 1935.
- [184] I. F. Mirabel, L. F. Rodríguez, *A superluminal source in the Galaxy*. Nature **371** (1994), 46–48.

-
- [185] I. F. Mirabel, L. F. Rodríguez, *Superluminal sources in the Galaxy*. Vitas in Astronomy **41** (1997), 15–16.
- [186] I. F. Mirabel, L. F. Rodríguez, *Microquasars in our Galaxy*. Nature **392** (1998), 673–676.
- [187] C. W. Misner, K. S. Thorne, J. A. Wheeler, *Gravitation*. 20th edition, W. H. Freeman, New York, 1997.
- [188] C. Moni Bidin, G. Carraro, R. A. Méndez, R. Smith, *Kinematical and chemical vertical structure of the Galactic thick disk, II. A lack of dark matter in the solar neighborhood*. ArXiv: 1204.3924v1, 2012, 1–35.
- [189] T. A. Morley, *A catalogue of ground-based astrometric observations of the Martian satellites 1877–1982*. Astron. Astrophys. Suppl. Ser. **77** (1989), 209–226.
- [190] K. F. Nicholson, *Galactic mass distribution without dark matter or modified Newtonian mechanics*. ArXiv: astro-ph/0309762v2, 2007, 1–16.
- [191] P. D. Noerdlinger, *Solar mass loss, the astronomical unit, and the scale of the Solar system*. ArXiv: 0801.3807, 2008.
- [192] O. Novotný, *Motions, gravity field and figure of the Earth*. Lecture Notes, Univ. Federal da Bahia, Brazil, 1998.
- [193] H. Nussbaumer, L. Bieri, *Discovering the expanding universe*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2009.
- [194] J. Oberst et al., *Astrometric observations of Phobos and Deimos with the SRC on Mars Express*. Astron. Astrophys. **447** (2006), 1145–1151.
- [195] R. Panek, *Čtyřprocentní vesmír. Temná hmota, temná energie a hledání zbytku reality*. Argo/Dokořán, Praha, 2012.
- [196] G. Pannella, *Paleontological evidence on the Earth's rotation history since early pre-cambrian*. Astrophys. Space Sci. **16** (1972), 212–237.
- [197] M. Pauer, *Fyzika Marsu*. Astropis **XIV** (2007), č. 1, 18–23.
- [198] T. J. Pearson, J. A. Zensus (eds.), *Superluminal radio sources*. Cambridge Univ. Press, 1987.
- [199] P. J. E. Peebles, *Principles of physical cosmology*. Princeton Univ. Press, New Jersey, 1993.
- [200] W. R. Peltier, *History of Earth rotation*. In: Treatise on Geophysics (ed. G. Schubert), vol. 9, Evolution of the Earth (vol. ed. D. Stevenson), Elsevier, Amsterdam, 2007.
- [201] R. Penrose, *The road to reality*. Vintage Books, London, 2005.

- [202] S. Perlmutter, *Supernovae, dark energy, and the accelerating universe*. Physics Today **56** (2003), April, 53–60.
- [203] S. Perlmutter, G. Aldering et al., *Measurements of Ω and Λ from 42 high-redshift supernovae*. Astrophys. J. **517** (1999), 565–586.
- [204] S. Perlmutter, S. Gabi et al., *Measurements of the cosmological parameters Ω and Λ from the first seven supernovae at $z \geq 0.35$* . Astrophys. J. **483** (1997), 565–581.
- [205] J. T. Perron et al., *Evidence for an ancient martian ocean in the topography of deformed shorelines*. Nature **447** (2007), 840–843.
- [206] K. Petr, *Dvě poznámky ku speciálnímu případu problému tří těles*. Čas. přest. math. fys. **47** (1918), 268–271.
- [207] M. Pick, J. Pícha, V. Vyskočil, *Theory of the Earth's gravity field*. Academia, Praha, 1973.
- [208] S. V. Pilipenko, *Paper-and-pencil cosmological calculator*. Preprint, arXiv: 1303.5961v1, 2013, 1–4.
- [209] T. Pintér, M. Rybanský, *Příklady z astronómie*. Slovenská ústredná hvezdáreň Hurbanovo, 2009.
- [210] *Planck Collaboration, Planck 2013 results, I. Overview of products and scientific results*. ArXiv 1303.5062
- [211] *Planck Collaboration, Planck 2013 results, XVI. Cosmological parameters*. ArXiv: 1303.5076v1.
- [212] H. Poincaré, *Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique*. Acta Math. **13** (1890), 1–270.
- [213] H. Poincaré, *La théorie de Lorentz et le principe de réaction*. Arch. Néerland. Sci. Exactes et Naturelles **5** (1900), 252–278.
- [214] H. Poincaré, *Sur la dynamique de l'électron*. C. R. Acad. Sci. Paris **140** (1905), 1504–1508.
- [215] Z. Pokorný, *Astronomické algoritmy pro kalkulátory*. Hvězdárna a planetárium hl. m. Prahy, 1988.
- [216] R. W. Porcas, *Summary of known superluminal sources*. In: Superluminal radio sources, T. J. Pearson, J. A. Zensus (eds.), Cambridge Univ. Press, 1987, 12–25.
- [217] D. Rapetti et al., *The observed growth of massive galaxy clusters — III. Testing general relativity on cosmological scales*. Mon. Not. R. Astron. Soc. **406** (2010), 1796–1804.

-
- [218] B. Ratra, M. S. Vogeley, *Resource letter: BE-1: The beginning and evolution of the Universe*. ArXiv: 0706.1565v1, 2007, 1–95.
- [219] D. Rawlins, *The great unexplained residual in orbit of Neptune*. *Astronom. J.* **75** (1970), 856–857.
- [220] K. Rektorys, *Přehled užití matematiky I*. Prometheus, Praha, 1995.
- [221] K. Rektorys, *Přehled užití matematiky II*. Prometheus, Praha, 1995.
- [222] A. G. Riess, A. V. Filippenko, . . . , B. Schmidt et al., *Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant*. *Astronom. J.* **116** (1998), 1009–1038.
- [223] A. G. Riess, P. E. Nugent, . . . , B. Schmidt et al., *The farthest known supernova: Support for an accelerating universe and a glimpse of the epoch of deceleration*. *Astrophys. J.* **560** (2001), 49–71.
- [224] A. G. Riess, L.-G. Strolger et al., *Type Ia supernova discoveries at $z > 1$ from the Hubble space telescope: Evidence for past deceleration and constraints on dark energy evolution*. *Astrophys. J.* **607** (2004), 665–687.
- [225] A. G. Riess, L.-G. Strolger et al., *New Hubble space telescope discoveries of Type Ia supernovae at $z \geq 1$: Narrowing constraints on the early behavior of dark energy*. *Astrophys. J.* **659** (2007), 98–121.
- [226] K. Rines et al., *Infrared mass-to-light profile throughout the infall region of the Coma cluster*. *Astrophys. J.* **561** (2001), L41–L44.
- [227] H. P. Robertson, *On the foundation of relativistic cosmology*. *Proc. Nat. Acad. Sci.* **15** (1929), 822–829.
- [228] C. Ron, J. Vondrák, *Expansion of annual aberration into trigonometric series*. *Bull. Astron. Inst. Czechosl.* **37** (1986), 96–103.
- [229] P. Rosenblatt, *The origin of the Martian moons revisited*. *Astronom. Astrophys. Rev.* **19** (2011), #44.
- [230] R. Roškar et al., *Riding the spiral waves: implications of stellar migration for the properties of galactic disks*. *Astrophys. J.* **684** (2008), L79–L82.
- [231] E. Roulet, *Gravitational lensing and microlensing*. World Scientific, Singapore, 2002.
- [232] V. C. Rubin, *Dark matter in spiral galaxies*. *Scientific Amer.* **248** (1983), 88–101.
- [233] V. C. Rubin, *A brief history of dark matter*. *The Dark Universe: Matter, Energy, and Gravity* (ed. M. Livio), Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2003, 1–13.
- [234] V. C. Rubin et al., *Kinematic studies of early-type stars, I. Photometric survey, space motions, and comparison with radio observations*. *Astrophys. J.* **67** (1962), 491–531.

- [235] V. C. Rubin, W. K. Ford, N. Thonnard, *Rotational properties of 21 Sc galaxies with a large range of luminosities and radii, from NGC 4605 ($R = 4$ kpc) to UGC 2885 ($R = 122$ kpc).* Astrophys. J. **238** (1980), 471–487.
- [236] G. Rudnick et al., *Measuring the average evolution of luminous galaxies at $z < 3$: The rest-frame optical luminosity density, spectral energy distribution, and stellar mass density.* Astrophys. J. **650** (2006), 624–643.
- [237] D. G. Saari, Z. J. Xia, *Do nekonečna v konečném čase.* Pokroky mat. fyz. astronom. **42** (1997), 90–102.
- [238] I. J. Sackmann, A. I. Boothroyd, K. E. Kraemer, *Our Sun. III. Present and future.* Astrophys. J. **418** (1993), 457–468.
- [239] S. S. Said, F. R. Stephenson, *Solar and lunar eclipse measurements by medieval Muslim astronomers.* J. Hist. Astronom. **27**, **28** (1996/97), 259–273, 29–48.
- [240] J. van de Sande et al., *The stellar velocity dispersion of a compact massive galaxy at $z = 1.80$ using X-shooter confirmation of the evolution in the mass-size and mass-dispersion relations.* Astrophys. J. Lett. **736** (2011), L9.
- [241] R. H. Sanders, *The dark energy problem – a historical perspective.* Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2010.
- [242] D. Sellers, *The transit of Venus: the quest to find the true distance of the Sun.* McGraw-Hill Press, 2001.
- [243] D. N. Sergei et al., *Three-years Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) observations: Implications for cosmology.* Astrophys. J. **170** (2007), 377–408.
- [244] O. Seydl, *K stému výročí objevení planety Neptuna.* Říše hvězd **27** (1946), 178–184.
- [245] I. I. Shapiro, *Fourth test of general relativity.* Phys. Rev. Lett. **13** (1964), 789–791.
- [246] G. A. Shields, *A brief history of Active Galactic Nuclei.* Publ. Astronom. Soc. Pacific **111** (1999), 661–678.
- [247] R. Schödel, T. Ott, R. Genzel et al., *A star in a 15.2-year orbit around the super-massive black hole at the centre of the Milky Way.* Nature **419** (2002), 694–696.
- [248] B. Schwarzschild, *Discoverers of the Hubble expansion’s acceleration share Nobel physics prize.* Physics Today **64** (2011), Dec., 14–17.
- [249] K. Schwarzschild, *Über das zulässige Krümmungsmaß des Raumes.* Vierteljahrsschrift der Astronomischen Gesellschaft **35** (1900), 337–347; English translation: Abraham Zelmanov J. **1** (2008), 64–73.
- [250] S. Sikora, L. Bratek, J. Jałocha, M. Kutschera, *Gravitational microlensing as a test of a finite-width disk model of the Galaxy.* ArXiv: 1103.5056v3, 2012, 1–10.

-
- [251] A. J. Simoson *Periodicity domains and the transit of Venus*. Amer. Math. Monthly **121** (2014), 283–298.
- [252] P. Sisterna, H. Vucetich, *Time variation of fundamental constants: Bounds from geophysical and astronomical data*. Phys. Rev. D **41** (1990), 1034–1046.
- [253] W. De Sitter, *On the relativity of inertia. Remarks concerning Einstein latest hypothesis*. Proc. Kon. Ned. Acad. Wet. **19** (1917), 1217–1225.
- [254] K. Slaviček, *Listy z Číny do vlasti*. Vyšehrad, Praha, 1995.
- [255] V. M. Slipher, *The radial velocity of the Andromeda Nebula*. Lowell Observatory Bull. **1** (1913), 56–57.
- [256] V. M. Slipher, *Spectrographic observations of nebulae*. Amer. Astronom. Soc., Popular Astronomy **23** (1915), 21–24.
- [257] S. Smith, *The mass of the Virgo cluster*. Astrophys. J. **83** (1936), 23–30.
- [258] J. Southworth et al., *Physical properties of the 0.94-day period transiting planetary system WASP-18, 2009*. Astrophys. J. **707** (2009), 167–172.
- [259] E. M. Standish, *Planet X: no dynamical evidence in the optical observations*. Astronom. J. **105** (1993), 2000–2006.
- [260] J. M. Steele, *Solar eclipse times predicted by the Babylonians*. J. Hist. Astron. **28** (1997), 133–139.
- [261] J. M. Steele, F. R. Stephenson, *The accuracy of eclipse times measured by the Babylonians*. J. Hist. Astron. **28** (1997), 337–345.
- [262] H. Stephani, *General relativity. An introduction to the theory of the gravitational field*. 2nd edition, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990.
- [263] B. Stephenson, *Kepler's physical astronomy*. Springer-Verlag, New York, 1987.
- [264] F. R. Stephenson, *Historical eclipses and Earth's rotation*. Astronomy & Geophysics **44** (2003), 22–27.
- [265] F. R. Stephenson, L. J. Fatoohi, *Thales's prediction of a Solar eclipse*. J. Hist. Astron. **28** (1997), 279–282.
- [266] G. Strömberg, *Analysis of radial velocities of globular clusters and non-galactic nebulae*. Astrophys. J. **LXI** (1925), 353–362.
- [267] A. M. Swinbank et al., *Intense star formation within resolved compact regions in a galaxy at $z = 2.3$* . Nature **464** (2010), 733–736.
- [268] M. Šolc, *Gravitační čočky, Einstein a Praha*. Pokroky mat. fyz. astronom. **44** (1999), 233–248.

- [269] M. Šolc, A. Šolcová, *Astronom Bessel*. Rozpravy NTM v Praze, sv. 107, Z dějin geodézie a kartografie, č. 5 (1986), 135–150.
- [270] M. Šolc, J. Švestka, V. Vanýsek, *Fyzika hvězd a vesmíru*. SPN, Praha, 1988.
- [271] A. Šolcová, *Johannes Kepler – zakladatel nebeské mechaniky*. Prometheus, Praha, 2004.
- [272] J. A. Thorpe, *Elementary topics in differential geometry*. Springer, New York, Berlin, 1979.
- [273] B. Tinsley, *Accelerating Universe revisited*. Nature **273** (1978), 208–211.
- [274] I. Trujillo, *Origin and fate of the most massive galaxy*. Highlights of Spanish Astrophysics VI, Proc. of the IX Sci. Meeting of the Spanish Astronom. Soc., Madrid (ed. M. R. Zapatero et al.), 2010, 120–130.
- [275] I. Trujillo et al., *Strong size evolution of the most massive galaxies since $z \sim 2$* . Mon. Not. R. Astronom. Soc. **382** (2007), 109–120.
- [276] K. Tsiganis, R. Gomes, A. Morbidelli, H. F. Levison, *Origin of the orbital architecture of the giant planets of the Solar System*. Nature **435** (2005), 459–461.
- [277] S. G. Turyshev et al., *Advancing tests of relativistic gravity via laser ranging to Phobos*. Exp. Astron. **28** (2010), 209–249.
- [278] A. V. Tutukov, A. V. Fedorova, *The origin of intergalactic stars in galaxy clusters*. Astron. Reports **55** (2011), 383–391.
- [279] F. Verbund, *The Earth and Moon: from Halley to lunar ranking and shells*. Preprint, Utrecht Univ., 2002, 1–10.
- [280] E. Vitásek, *Numerické metody*. SNTL, Praha, 1987.
- [281] E. Vitásek, *Základy teorie numerických metod pro řešení diferenciálních rovnic*. Academia, Praha, 1994.
- [282] E. Vitásek, M. Křížek, *(Ne)spolehlivost numerických výpočtů. Jaká nebezpečí skrývá numerické počítání?* In: Programy a algoritmy numerické matematiky 9, Matematický ústav AV ČR, Praha, 1998, 139–150.
- [283] G. M. Voit, *Tracing cosmic evolution with clusters of galaxies*. Rev. Mod. Phys. **77** (2005), 207–258.
- [284] J. Vondrák, *Dynamika rotace Země*. Astropis **IX** (2002), č. 2, 28–33.
- [285] I. Vrecion, *K čemu lze upotřebiti 3. Keplerův zákon*. Říše hvězd **1** (1920), 54.
- [286] R. M. Wald, *General relativity*. Univ. of Chicago Press, 1982.

-
- [287] S. Weinberg, *Gravitation and cosmology: Principles and applications of the general theory of relativity*. John Wiley, New York, London, 1972.
- [288] S. Weinberg, *První tři minuty: Moderní pohled na počátek vesmíru*. Mladá fronta, Praha, 1998.
- [289] S. Weinberg, *Cosmology*. Oxford Univ. Press, 2008.
- [290] J.W. Wells, *Coral growth and geochronometry*. *Nature* **197** (1963), 948–950.
- [291] G.E. Williams, *Geological constraints on the Precambrian history of Earth's rotation and the Moon's orbit*. *Rev. Geophys.* **38** (2000), 37–60.
- [292] R. Wojtak, S.H. Hansen, J. Hjorth, *Gravitational redshift of galaxies in clusters as predicted by general relativity*. *Nature* **477** (2011), 567–569.
- [293] M. Wolf (ed.), *Astronomická příručka*. Academia, Praha, 1992.
- [294] M. Wolf, *Extrasolární planety*. *Pokroky mat. fyz. astronom.* **50** (2005), 44–61.
- [295] C.F. Yoder, J.G. Williams et al., *Secular variation of Earth's gravitational harmonic J_2 coefficient from Lageos and nontidal acceleration of Earth rotation*. *Nature* **303** (1983), 757–762.
- [296] W. J. Zhang, Z. B. Li, Y. Lei, *Experimental measurements of growth patterns on fossil corals: Secular variation in ancient Earth-Sun distance*. *Chinese Sci. Bull.* **55** (2010), 4010–4017.
- [297] F. Zwicky, *On the red shift of spectral lines through interstellar space*. *Proc. Nat. Acad. Sci.* **15** (1929), 773–779.
- [298] F. Zwicky, *Die Rotverschiebung von extragalaktischen Nebeln*. *Helv. Phys. Acta* **6** (1933), 110–127.
- [299] F. Zwicky, *Remarks on the redshifts from nebulae*. *Phys. Rev.* **48** (1935), 802–806.
- [300] F. Zwicky, *On the masses of nebulae and of clusters of nebulae*. *Astrophys. J.* **86** (1937), 217–246.
- [301] http://en.wikipedia.org/wiki/NGC_4874



Jmenný rejstřík

- Adams J. C. 33
Adams W. 24
d'Alembert J. 51
Anaximandros 9
Archimedes 12, 29
Aristarchos 11, 12
Aristoteles 12, 107

Baade W. 69, 113
Barrow J. 154
van den Bergh G. 64
Bessel F. W. 18, 24
Blandford R. D. 176
Blanuša D. 203
Bolyai J. 192
Bouwers R. J. 174
Bradley J. 19
Brahe T. 4, 5, 9, 19
Brander D. 203
Brandts J. 227, 228
Brož M. 226
Brumberg V. A. 150
Bruno G. 108, 191
Bürgi J. 6
Burša M. 169

Carlip S. 184, 225, 226
Carrera M. 151
Carter B. 154
Cassini G. D. 14
Cavendish H. 33

Clark A. G. 24, 33
Clarke A. C. 38
Clausius R. 72
Clowe D. 105
Cook J. 16
Cooperová V. 93
Cooperstock F. I. 152
Curtis H. 110

Doppler Ch. 20
Drake F. 161
Dumin Y. V. 138

Ebr J. 227
Eddington A. 109, 183
Einstein A. 22–24, 61, 112, 117, 140, 163, 182, 188, 206
Eratosthenes 13
Euler L. 29, 51

Fermi E. 154, 161
van Flandern T. C. 133, 188
Flandro G. A. 55
Friedmann A. A. 111, 117, 120, 205, 206

Galileo G. 2, 170
Galle J. G. 14, 33
Gamow G. 94
Gauss C. F. 192
Giulini D. 151
Gödel K. 93, 113
Green Ch. 16
Grygar J. 111, 226

Hall A. 36	Lepka K. 30
Halley E. 16, 41	Leško J. 62
Hamilton W. R. 51	Leverrier U. J. J. 33
Hamuy M. 116	Lie S. 192
Heinrich W. W. 51	Lobačevskij N. I. 1, 192
Hell M. 16	Lomonosov M. V. 61
Herschel W. F. 14, 42, 178	Lowell P. 171
Hilbert D. 198, 199	Luhman K. 98
Hipparchos 2	MacLaurin C. 29
Hlaváček I. 223	Macrae N. 93
Hoyle F. 111	Mashhoon R. 152
Hubble E. P. 69, 75, 110–112, 117, 120, 178	Mather J. C. 107
Humason M. L. 69, 75, 110	Matyska C. 225
Huygens Ch. 20, 203	McVittie C. G. 90
Chandrasekhar S. 114	Messier Ch. 178
Charlier C. V. L. 112	Mészáros A. 225
Che 62	Milne E. A. 112
Jacobi C. G. J. 51	Minovitch M. A. 54
Jacobson R. A. 169	Mirzakhaniová M. 204
Kepler J. 2–7, 9, 16, 25, 29, 34, 51	Napier J. 6
Kepler L. 4	Nechvíle V. 51, 52
Klein F. 192	Newton I. 3, 30, 48, 51
Kopecký V. 227	Nobel A. 108
Koperník M. 2, 14, 154	Novotný O. 225
Kowal Ch. T. 113	Novotný V. 229
Krasinsky G. A. 150, 228	Panek R. 190
Kroupa P. 179	Pauer M. 225
Lagrange J. L. 51	Penrose R. 9
Lalande M. L. 170	Perlmutter S. 107, 108, 116, 118
Landau L. 69, 191	Petr K. 51, 52
Laplace P. 51, 188	Pick G. 117
Leavitová H. S. 110	Poincaré H. 52, 56, 188
Lemaître G. E. 110, 112, 120, 151	Potočník H. 38
	Práger M. 223
	Pravda V. 225

Prusinger S. B. 161	Šolc M. 224
Ptolemaios K. 2	Thales 63
Riemann B. 192	Tinsleyová B. 119, 120
Riess A. G. 107, 108, 112, 118	Tipler F. 154
Richer J. 14	Tombaugh C. 170
Rømer R. 20	Trujillo I. 174
Röntgen W. C. 108	Velemínský J. 225
Rubin R. 93	da Vinci L. 40
Rubinová V. 93–95, 98, 104, 105, 211, 229	Vitásek E. 223
Savary F. 42	Vondrák J. 224
Segeth K. 223	Vrba A. 215
Schmidt B. 107, 108, 114, 116, 118	Vrčková F. 69
Schopenhauer A. 121	Weinberg S. 112
Schwarzschild K. 108, 120, 191	Wells J. W. 143
Si 62	West N. 61
de Sitter W. 117	Williams G. E. 133
Slipher V. M. 72, 109–111, 120	Zhang W. 143, 146, 228
Smith S. 69	Zwicky F. 33, 68–70, 72–83, 86, 91, 105,
Smoot G. F. 107	113, 211, 229
Somer L. 228, 229	
Strömberg G. 110, 112	

Věcný rejstřík

- aberrace 66
 - gravitační 81, 120, 121, 182–187, 213
 - nulová 183
 - světelná 66, 67, 187
 - světla 19, 66, 67
- afel(ium) 6, 41
- akumulace chyb 59, 153
- albedo 127
 - Bondovo 128
 - střední 142
- ALMA 178
- Altair 21
- aminokyselina 161
- analýza
 - Fourierova 1
 - chyb numerických 171
 - chyby 80, 105
- anomálie
 - excentrická 25–27
 - pravá 25–27
 - střední 28, 29
- antigravitace 121, 122, 134, 139, 140, 143, 148, 153, 160, 163, 164, 166–169, 173, 179, 180–182, 190, 213, 225
- apocentrum 45, 50
- apogeum 132
- Apollo 54, 132
- Apophis 57
- argument perihelia 28, 29
- asteroid 155, 168, 173, 189
 - blízkozemní 48
- atmosféra 127, 134, 142, 157
- atom
 - uhlíku 162
 - vodíku 24, 99, 148, 162
- axion 105
- Big Bang 111
- bílkovina 161
- bod
 - hmotný 31, 48, 70, 81, 96, 97, 104
 - inflexní 209
 - jarní 21, 147
 - Lagrangeův 113
 - mrazu 126, 128
 - pevný 186
 - podzimní 21
 - trojný 126
- boson 105, 188
- cefeidy 110, 111
- cena Nobelova 69, 107, 108, 114, 120, 161, 204
- COBE 107, 195
- Curiosity 127
- čára
 - absorpční 113
 - H_{α} 24
 - helio 114
 - křemíku 113
 - kyslíku 114
 - síry 113
 - spektrální 70, 109

vanadu 109
 vápníku 114
 vodíku 113, 114
 železa 109
 čas
 greenwichský 18
 Hubbleův 151
 světový 18
 terestrický 18
 čočka
 časová 219–221
 gravitační 23, 69, 82, 219
 předsádková 83
 skleněná 82, 219
 čočkování gravitační 69, 76, 82, 89, 90, 92, 105

 dalekohled 1, 11, 66
 data paleontologická 143, 145
 deklinace 21, 22, 82
 délka
 eliptické dráhy 29
 vlnová 24, 89
 vzestupného uzlu 28, 29
 den siderický 135
 Deneb 21
 derivace časová 71, 123, 135, 148, 168, 169, 210
 devon 143, 144, 149
 diagram Hertzsprungův–Russellův 124, 140, 148
 díra černá 24, 46, 78, 83, 94, 98, 104, 113, 213, 216
 centrální 178
 supermasivní 43, 215
 disk 95–100, 170, 200, 211, 216
 DNA 141, 161, 162

 doba
 geologická 181
 ledová 126, 157
 oběhu 7, 42, 46, 50, 167
 oběžná 6, 34–36, 47, 170, 173
 dráha
 anomální 133
 ekonomická 39, 55
 eliptická 15, 25, 37, 39, 41, 43, 44, 46, 49, 50, 52, 63, 72, 79, 131, 141, 168
 geostacionární 38
 hyperbolická 49, 79
 keplerovská 6, 56, 94
 komety 54
 kruhová 14, 15, 49, 95, 135, 164, 167, 181, 186
 kruhová stacionární 164
 Měsíce 134
 Mléčná 2, 74, 78, 83, 97, 105, 110, 112, 160, 175, 178
 návratová 54
 oběžná 168
 parabolická 49
 pozorovaná 44
 přechodová Hohmannova 39
 retrogradní 41, 171
 skutečná 44
 spirální 171, 181
 stabilní 188
 stacionární 164–168, 181
 zemská 19, 146, 159
 dvojhvězda 79, 113, 188
 těsná 113
 vizuální 42
 dvojplaneta 147

- efekt
 - Jarkovského 139, 150
 - Pioneer 173
 - relativistický 81, 88, 90, 139
 - skleníkový 125, 128, 157, 160
 - YORP 150
- efemeridy 29
- ekliptika 9, 28, 61, 63, 64, 67, 75, 147, 166, 168, 173
- ekosféra 140–142, 157, 160
- elipsa 7, 18, 26, 37, 39, 134
 - aberační 20
 - paralaktická 18, 19
 - protáhlá 37, 172
- elipsoid 79
- energie 149
 - absorbovaná sluneční 127
 - celková 72, 77, 121, 152, 153, 171, 180, 183, 190
 - elektronů 84
 - emitovaná 127
 - kinetická 38, 45, 54, 55, 70, 71, 74, 77, 152, 153, 180, 183, 190
 - konstantní 142
 - mechanická 72, 121
 - potenciální 38, 45, 71, 75, 77–79, 88, 152, 164, 178, 180, 183, 190
 - skrytá 69, 108
 - sluneční 127, 141, 159
 - temná 69, 80, 90, 91, 108, 115, 117, 120, 122, 123, 130, 143, 150, 152, 156, 157, 159, 160, 173, 182, 190, 211
 - vakua 120, 139, 190, 214
 - vnitřní 105
- excentricita 5, 7, 28, 40, 43, 50, 63, 126, 131, 172
- číselná 5
 - délková 5, 40
 - lineární 5
 - numerická 5, 40
- exoplaneta 42, 43, 98, 181
 - WASP-18b 181
- expanze 151
 - exponenciální 159, 170
 - galaktická 174
 - globální 90
 - Hubbleova 129, 175, 176, 213
 - kosmická 116
 - lineární 170
 - lokální 90, 131, 134, 190
 - Sluneční soustavy 131
 - vesmírná 113
 - zrychlená 120, 213
- extrapolace 209
- fermion 105
- Fobos 36, 167
- foton 20, 69, 82, 107, 109, 113, 149, 220
- frekvence 149
 - úhlová 135, 136
- funkce
 - distribuční 155
 - expanzní 115, 116, 119, 150, 151, 159, 197, 206, 208, 214, 221
 - klesající 102, 103, 144, 145, 160
 - konkávní 119, 156, 202
 - konstantní 113, 157, 158
 - konvexní 102, 115, 118, 119, 120, 202, 209
 - lineární 151, 159
 - racionální 156–159
 - spojitá 102, 113
 - spojitě diferencovatelná 115
 - vektorová 58

Gaia 19, 97
 galaxie 55, 72, 78, 79, 86, 94, 105, 109, 110, 111, 114, 122, 161, 174–181
 čočkovitá 178
 eliptická 73, 83, 91, 110, 178
 HFLS3 178
 M31 78, 96, 103, 109, 110
 mezilehlá 76, 82, 219
 nepravidelná 178
 NGC 4874 73, 83, 91
 NGC 4889 73, 83, 91
 obří 91
 prstencová 179
 raná 174
 referenční 84
 rotující 70, 81, 179
 slupkovitá 179
 spirální 60, 94, 95, 100, 103, 178, 188
 srovnávací 85
 superhustá 174
 trpasličí 78, 178, 179
 vločkovitá 179
 Galaxie 19, 43, 78, 79, 85, 94, 97–100, 104, 110–112, 123, 161, 175, 176, 179, 181, 190, 206, 211, 216, 219, 221
 GEO 188
 geodetika 21, 23, 192, 199, 204
 geometrie
 eliptická 192, 197, 198
 Eukleidova 21
 eukleidovská 192, 197
 hyperbolická 23, 193, 196–200
 Lobačevského 23, 198
 neeuclidovská 1, 120, 192
 Riemannova 21–23
 sférická 21
 vesmíru 197
 glycin 161
 gnómon 9, 13
 GPS 1
 halo 99
 helium 110, 148
 Hipparcos 19, 97
 histogram 72, 79, 83, 84
 hmota
 baryonová 79, 85, 86, 97, 100, 104, 117, 210, 212
 mezigalaktická 91
 nebaryonová 24
 nesvítící baryonová 79, 85, 99, 104
 temná 24, 33, 68, 70, 74, 76–78, 94, 98, 99, 103–106, 117, 210, 211
 hmotnost
 baryonová 85, 97–99
 celková 99
 celková kupy 86
 protonu 70, 155
 sluneční 130, 148
 virialová 75–77, 85, 86, 91, 211
 virialová snížená 88
 hnědel 125
 hodnota střední 72, 88
 homogenita 112, 192, 195
 horizont 198, 221
 hustota 86, 114, 117, 210
 baryonové hmoty 117
 délková 100
 energie 212, 213
 konstantní 74, 95
 kritická 207
 nulová 117
 plošná 100
 střední 40, 117, 135, 136, 206
 světelného toku 84

- temné energie 117, 211
- temné hmoty 117, 211
- hvězda 2
 - bludná 4
 - kvarková 98
 - mateřská 181
 - neutronová 33, 69, 82, 98, 113, 114
 - S2 43–46, 94
 - vyhaslá 104
- hvězdokupa 190
 - kulová 79, 83, 109, 174, 179, 180
 - otevřená 179
- hydrosféra 134
- hyperboloid
 - dvojdílný 192, 194, 202, 204
 - jednodílný 192, 204
- hypersféra 109
- chromosféra 61
- chyba 82, 86
 - aproximace 150
 - celková 56, 57
 - diskretizační 57, 58, 150
 - extrapolační 57
 - interpolační 57
 - modelu 48, 57, 171
 - numerická 171
 - zaokrouhlovací 57–60, 85, 150
- index
 - křivosti 117, 118, 196, 206
 - lomu 82
- inklinace 28, 29, 164
- integrace numerická 57, 171
- interakce
 - elektromagnetická 112, 155, 188
 - gravitační 48, 55, 112, 139, 171, 182, 184, 188
 - silná 112, 122, 155
 - slabá 112, 155
- interferometr 1, 11
- iont 107
- izochrona 196
- izometrie 198
- izotop 142
- izotropie 112, 113, 192, 195
- jádro galaktické 178
- jáma potenciálová 82
- jednotka astronomická 15, 35, 122, 142, 170, 214
- jev Dopplerův 42, 45, 75, 109, 113
- Jupiter 2, 20, 34, 40, 47, 49, 53–55, 59, 147, 164, 173, 188
- kambrium 145
- katastrofa
 - gravitermální 179, 180, 190
 - slapová 134
- kauzalita 182, 189
- kometa 53, 54, 148, 161
 - Halleyova 41
- konstanta
 - Avogadrova 155
 - fundamentální fyzikální 154
 - gravitační 31, 36, 46, 49, 71, 101, 117, 120, 133, 144, 155, 185, 206
 - Hubbleova 72, 73, 90, 108, 111, 112, 121, 123, 129, 134, 138, 143, 152, 156, 166, 175, 179, 190, 206, 216
 - jemné struktury 155
 - kosmologická 117, 118, 155, 183, 184, 206, 208, 211
 - matematická 155
 - Newtonova–Cavendishova 33
 - Planckova 149, 155

sluneční 123–125, 130, 141, 149, 156,
 157, 159, 160
 Stefanova–Boltzmannova 127
 škálovací 85
 základní fyzikální 157, 160, 185
 koróna 61
 kosmologie 107, 108, 196, 213
 koule 31, 74, 82, 86, 87, 95–97, 99, 193
 čtyřrozměrná 151, 192, 219
 homogenní 32, 135
 jednotková 193
 nafukující se 151
 sněhová 157
 kráter 2, 124, 125, 168, 173
 Eberswalde 130
 Gale 127
 Stickney 163
 kružnice 26, 81, 179, 198, 219
 hlavní 21, 192, 197, 198
 hraniční 199, 200
 jednotková 193
 oskulační 192, 199
 v komplexním oboru 198
 krychle 132, 177, 213
 křivka
 Gaussova 79, 84
 plochá rotační 94
 rotační galaxie 76, 94
 rotační idealizovaná 95
 světelná 113
 vlečná 203
 křivost 192
 Gaussova 198, 199, 203, 204
 globální 23
 hladké (nad)plochy
 kladná 150, 181, 196
 konstantní 23
 normalizovaná 117
 prostorová 117, 204
 sekcionální 204
 vesmíru 24, 197
 kupá galaktická 55, 68–70, 72–87, 89–
 92, 105, 106, 178, 190, 211
 kužel světelný 202
 kvadrant 4, 9, 10
 kvasar 18, 119, 178, 215, 220
 kvintesence 120, 190

 Lageos 18
 lalok Rocheův 113
 Larissa 165, 166
 látka
 baryonová 78, 104, 211, 214
 mezihvězdná 98
 radioaktivní 142
 skrytá 69
 svítící 210
 ledovec 134, 136
 limonit 125
 luminozita 76, 113, 128, 156, 160, 178
 relativní 125
 Luna 54, 132
 Lunochod 132

 Magellan 36
 magnituda 80, 84, 114, 116
 referenční 85
 MACHO 104
 Mars 3–5, 7, 14, 15, 34–36, 39, 47, 121,
 123–130, 140, 160, 163–165, 167–
 169, 173, 189
 mechanika klasická 131, 164, 183
 Merkur 7, 14, 15, 24, 36, 43, 47, 59, 95,
 123, 127, 173, 214

měsíc 6, 171
 drakonický 63
 lunární 145, 146
 rychlý 164–167
 siderický 145
 synodický 64
 Měsíc 4, 11, 37, 54, 61–67, 75, 96, 131–139, 144, 145, 147, 150, 152, 168
 Messenger 36
 metoda
 baryonových oscilací 210, 212
 geometrická 11
 iterační 28
 Keplerova 4
 Koperníková 14, 15
 mnohokroková 56
 Newtonova 28
 postupných aproximací 28
 Rungeova–Kuttova 56, 187
 symplektická 56, 187
 Zwickyova 74, 77
 metrika 115, 193, 201
 eukleidovská 199, 200, 203
 hyperbolická 199
 Minkowského 115, 193, 200, 202
 mez
 Chandrasekharova nestability 113, 114
 kritická 179
 Rocheova 169
 mezikruží 104, 157
 migrace 176
 Neptunu 171
 planet 123
 mikrokvasar 216–218
 Miranda 166, 167
 model 104, 113, 120
 částicový 105
 diskretizovaný 56
 diskrétní 56, 57
 dvojrozměrný 104, 181
 expandujícího vesmíru 181
 geometrický 3
 heliocentrický 4, 11
 homogenní 219
 izotropní 219
 klimatologický 126
 konečněrozměrný 56
 Koperníkův 4, 19
 kosmologický 108, 114, 115, 195, 205, 206, 210, 213
 Λ CDM 118, 205, 209, 212, 214
 matematický 31, 56, 57, 68, 195, 196, 205
 postnewtonovský 182, 187
 Nice 171
 prostor času 196
 Ptolemaiov 19
 Sluneční soustavy 3, 19
 spirální galaxie 60
 stacionárního vesmíru 206
 standardní elementárních částic 78
 vesmíru 150, 191, 196
 vesmíru pozorovatelného 196
 moment
 hybnosti 81, 164, 182, 188
 hybnosti orbitální 133, 137, 172, 183
 hybnosti rotační 133, 136, 137
 setrvačnosti 71, 135, 147, 173
 setrvačnosti časově proměnný 138
 MOND 106
 nadsféra 109, 118, 192, 206
 NASA 70, 73, 126–128, 130, 163, 168

Neptun 14, 33, 34, 37, 44, 47, 55, 59, 95,
 123, 164–167, 170–173, 176
 nerovnost
 Bishopova–Gromovova 82
 Cauchyova–Schwarzova 201
 trojúhelníková 193, 199, 201, 202
 trojúhelníková obrácená 202
 neutrino 105, 117
 New Horizons 40
 norma eukleidovská 185
 nukleosyntéza 113
 nukleotid 161
 nutace 18

 obr červený 113, 124, 160
 obsah elipsy 7
 obvod elipsy 29
 oceán 125, 142, 157, 160
 odhad
 dvojstranný 29, 156, 158
 Zwickyův 88
 odrazivost 127
 odrazeč koutový 1, 131–133
 ohnisko 4, 6, 25, 26, 40, 44, 49
 okno startovací 39
 Opportunity 126
 orbita
 Clarkova 38
 geostacionární 38
 kruhová 94, 172
 kruhová stacionární 164
 nestabilní 173
 nízká 164
 stacionární 167
 osa
 rotační 166, 167
 zemská 18

 paradox 31, 67, 72, 74, 94, 115, 181, 206,
 210, 216–218
 dvojčat 202
 Fermiho 161
 mladého horkého Slunce 123, 140,
 156
 nadsvětelných rychlostí 215
 slapových sil Měsíce 123, 134
 velkého orbitálního momentu 123
 velkých rychlostí 104
 Zwickyův 92
 paralaxa 18, 109
 roční 18, 19, 42
 parametr
 akcelerační 209
 bezrozměrný 117, 118, 207
 decelerační 90, 118–120, 151, 209
 Hubbleův 72, 90, 114, 115, 122, 150,
 159, 175, 181, 207, 212, 213
 Hubbleův klesající 91, 115
 Hubbleův konstantní 115
 hustoty hmoty 117, 118, 207
 hustoty prostorové křivosti 117, 207
 hustoty temné energie 117, 118, 207
 keplerovský 28, 150
 kosmologický 108, 114, 118, 178, 208
 orbitální 181
 škálovací 115
 zpomalení 118, 209
 parsek 42
 pás
 asteroidů 173, 189
 Kuiperův 123, 173
 Pathfinder 126
 pavučina kosmická 80, 190, 195
 pericentrum 45
 perigeum 132

perihel(ium) 6, 24, 27, 41
 perioda
 oběhu 164, 183
 oběžná 4
 orbitální 147
 rotační 164
 perpetuum mobile 224, 224, 226
 Phobos 36, 123, 163–165, 167–169
 ping-pong gravitační 54, 55
 Planck 104, 107, 118, 195, 210, 211
 planeta bludná 98, 104
 planetezimála 173
 plazma 79, 99, 104, 215–218
 kvarkové-gluonové 69
 Pluto 34, 40, 151, 170, 171, 187
 plyn mezigalaktický 104–106
 podmínky
 Carathéodoryho 55
 koncové 58, 59
 počáteční 49, 53, 57, 58, 115, 150,
 171, 183, 185–187
 stabilní 160
 pohyb střední 169
 Polárka 22, 114
 pole
 centrální síly 94
 elektromagnetické 122
 gravitační 22, 38, 54, 55, 82, 100,
 127, 134, 153, 168, 188, 210, 214
 hluboké Hubbleovo 176, 221
 Killingovo 196
 magnetické 128, 130, 139, 148, 150,
 160
 skalární 120
 stacionární 189
 poloměr 135, 157, 164
 Galaxie 97
 kupy 75, 78, 91
 Schwarzschildův 46
 vesmíru 109, 111, 118, 120
 poloosa
 hlavní 5, 6, 20, 26, 28, 35, 36, 39, 41,
 43, 44, 46, 131, 144
 malá 5
 vedlejší 5, 26, 40
 velká 5, 15
 posloupnost hlavní 124, 140, 148
 posuv spektrálních čar
 červený 24, 69, 70, 72, 75, 82, 83, 89,
 90, 109, 110, 112–114, 116, 120, 174–
 178, 195, 197, 206, 215, 221
 gravitační červený 24, 82, 89, 90
 kosmologický 82
 modrý 72, 83, 109, 110, 112, 113
 potenciál
 dipólu 150
 gravitační 31, 33, 55, 92, 150
 konstantní 33, 92
 magnetický 150
 prach
 mezigalaktický 104, 174
 meziplanetární 139, 150
 prak gravitační 40, 55
 precese 18, 20, 147
 princip
 antropický 154, 155
 antropický slabý 157
 časové čočky 220
 Einsteinův kosmologický 23, 112,
 195, 196, 219
 kauzality 183, 189
 prion 161
 problém
 dvou těles 48, 50, 56, 81

chybějící hmoty 77
N těles 48, 54, 171
 tří těles 51
 tří těles omezený 52
 prostor 197
 čtyřrozměrný 196
 deformovaný 82
 eukleidovský 81, 118, 190, 191, 193, 202, 203
 hyperbolický 198
 kosmický 125
 mezigalaktický 86, 211
 nekonečný 212
 prostoročas 60, 70, 81, 109, 189, 196, 214
 prostředí
 mezigalaktické 70, 80
 opticky hustší 132
 protogalaxie 175, 176
 protuberance 61
 Proxima Centauri 18, 122
 prstenec 31, 100, 104
 homogenní 100, 101
 prachový 61
 Saturnu 2, 14, 47
 průměr
 aritmetický 6, 132
 geometrický 6, 29
 úhlový 40, 63, 78, 170
 průvodič 4, 8
 prvohory 143
 přímka uzlová 44
 pseudometrika 202
 pseudosféra 193, 195, 196, 198, 202, 203
 pulzar binární 134, 190
 radioaktivita 129
 rádiusvektor 52, 74
 reaktor jaderný 149
 rekombinace 107
 rektascenze 21, 22, 82
 rezonance 122, 137, 171, 190
 RNA 161, 162
 rok
 kalendářní 20, 147
 kalendářní gregoriánský 147
 siderický 20, 36, 123, 134, 136, 143, 146, 147, 169
 tropický 147
 rotace 17, 171
 Merkuru 123, 173
 rychlá 94
 vázaná 169
 Země 17, 133, 136, 143, 144, 147
 rovina
 eukleidovská 199
 galaktická 75, 105
 Gaussova 198
 hyperbolická 199, 200, 203
 rovnice
 algebraická 28
 diferenciální 50–53, 71, 117, 137, 149, 206, 210
 Drakeova 161
 Einsteinovy 117, 205
 Friedmannova 117, 196, 205, 210, 214
 Keplerova 25–28
 kvadratická 43, 45
 Pogsonova 84, 114
 Schrödingerova 214
 transcendentní 28
 vedení tepla 213
 rozvoj 155
 Taylorův 28, 102, 119, 151, 209, 210

rychlost

- expanze 159
- exponenciální 159
- gravitační interakce 48, 55, 60, 81, 82, 139, 182, 188
- gravitačních vln 188
- heliocentrická 74, 79
- komety Halleyovy 41
- konstantní 95, 158
- kosmická druhá 38, 39, 54
- kosmická první 37
- kosmická třetí 38
- kruhová 49
- nadsvětelná 51, 118, 188, 215–219, 221
- nekonečná 48, 59, 139
- oběžná 95, 100
- optimální 143, 156
- orbitální 103, 167
- perigeální 38
- plošná 27
- počáteční 37
- průměrná 74, 142, 145, 159, 164
- radiální 75, 79, 80, 83–85, 92, 188
- rozpínání Sluneční soustavy 122
- střední kvadratická 74, 77, 90, 91
- střední radiální 179
- světla 2, 19, 20, 55, 67, 89, 110, 117, 149, 175, 188, 206, 215, 217
- tangenciální 49, 105
- úhlová 137, 169
- úniková 38, 47, 49
- vzdalování 157

řada Taylorova 151, 209

řeka 123, 125–127, 130

sálání tepelné 139

saros 64

Saturn 2, 14, 34, 47, 55, 173

sféra 93, 113, 192, 193, 195, 202

- dvojměrná 104, 202

- nebeská 18, 21, 42, 43, 75, 84, 105, 109, 196

- trojměrná 115

síla

- antigravitační 131, 139, 142, 150,

- 152, 156, 166, 167, 171, 172, 179, 181, 222

- dostředivá 35, 92

- elektromagnetická 188, 210

- gravitační 35, 96, 101, 104, 182, 188

- jaderná 210

- opačně orientovaná 50

- pátá 120, 122, 189

- přitažlivá 100

- slapová 17, 122, 130, 133, 144, 148, 149, 150, 164, 169, 181

singularita 104, 218, 222

Sirius 24, 33

skafé 13

slapy 55, 81, 122, 166, 167

Slunce 4, 9, 14, 16, 25, 35, 36, 40, 42, 52–55, 61–67, 94, 111, 122, 124, 140–153, 156, 157, 159, 160, 170, 173, 189

slunovrat 1, 9, 13

sopka 125, 129

souřadnice

- hypersférické 194

- polární 27, 101

- sférické 194

soustava

- algebraická 150

- binární 187

- diferenciálních rovnic 51–54, 183, 185

galaxií 81
 geocentrická 2
 heliocentrická 2
 izolovaná 81, 135
 kartézská 132
 Neptun–Triton 171
 Pluto–Charon 187
 ptolemaiovská geocentrická 2
 rovnic nelineárních 51
 rovnic se zpožděním 185
 SI 35, 36, 212, 213
 Slunce–Jupiter 49, 189
 Slunce–Země 190
 Sluneční 3, 4, 11, 42, 56, 90, 94, 95,
 112, 121–123, 131, 141, 150, 152,
 157, 159, 163–165, 168, 173, 174,
 179, 187, 190
 souřadná 49
 stabilní 57
 vektorových rovnic 53
 Země–Měsíc 135, 187
 spektrum 110, 119
 elektromagnetické 78
 Planckovo 107
 spirála 134, 164, 183, 184, 187
 dvojitá 184
 rozvírající se 183
 Spirit 126
 stáří
 vesmíru 114, 119, 209
 vesmíru Hubbleovo 112, 116, 119
 Stonehenge 1
 střed vesmíru 198
 supernova 69, 113, 114, 118, 188
 třídy II 113
 typu Ia 112–116, 118, 119
 svíčka standardní 110, 112, 114
 svítivost 85, 113–115
 absolutní 111
 hvězdy 155, 181
 supernovy 113
 symetrie
 rotační 113, 195
 sférická 75
 translační 112, 195
 systém
 dvou dvojhvězd 187
 inerciální 212
 stabilizovaný 70, 72
 těžišťový 74
 vázaný 70, 180
 Štěňátko 33
 těleso černé 107, 128
 tenzor
 energie a hybnosti 206
 metrický 206
 momentu setrvačnosti 71
 teorie
 diferenciálních rovnic 53
 evoluční Darwinova 162
 gravitace Newtonova 3, 48, 56, 106,
 121, 150, 153, 171, 179, 182, 206
 pravděpodobnosti 155
 relativity 23, 24, 117, 121, 134, 184,
 189, 201, 206, 215, 221
 unaveného světla 69
 teplota 126
 centrální 155
 efektivní 124
 povrchová 124, 160
 rovnovážná 127–129
 těžiště 31, 32, 49, 50, 60, 135, 186, 188
 kupy 74, 77

Sluneční soustavy 141, 146
 soustavy 217
 Titan 125
 tlak atmosférický 126, 160
 tok
 energie 124, 156
 energie sluneční 157, 160
 hmoty 139
 konstantní 157
 světelný 84, 114, 118
 tepelný 130, 142
 zářivý 127
 topologie 212
 vesmíru 24
 torus 204
 trajektorie 1, 16, 23, 39, 48, 49, 105,
 163, 184, 186
 expandující 187
 spirální 183
 vektorové 54, 185
 traktrix 203, 204
 trigonometrie sférická 21
 Triton 123, 165, 171, 172
 trojúhelník 27, 192, 197, 200, 206
 křivočarý 23
 Letní 21, 22
 pravoúhlý 11, 44, 65, 182
 rovnoramenný 18
 rovnostranný 132, 187
 sférický 22
 trpaslík 114
 bílý 24, 33, 113
 černý 98
 červenohnědý 98
 červený 98, 211
 hnědý 98, 211
 infračervený 98, 104
 tření slapové 81
 třesk Velký 90, 106, 109–111, 116, 197,
 198, 204, 210, 220–222
 úhel 13, 19, 23, 27, 82
 aberační 19, 20, 66, 67, 184
 dopadu 132
 gravitační aberace 182, 183
 hodinový 21
 inklinační 45
 odrazu 132
 ohybu 89
 ostrý 217
 paralaktický 14, 16
 pravý 22, 44
 prostorový 145
 světelné aberace 184
 tupý 44
 zorný 215, 221
 Uran 14, 33, 34, 42, 47, 55, 164–167,
 171, 173
 uzel vzestupný 28, 29
 varieta 192, 202, 203
 hyperbolická 206
 maximálně symetrická 199, 202,
 204, 206
 prostorová 115
 prostorová 194
 trojrozměrná 196, 197
 Vega 21
 vektor
 jednotkový 52
 polohový 71, 87
 směrový 132
 veleobr 113
 velikost
 hvězdná absolutní 42
 úhlová 136

Venuše 2, 14–16, 36, 47, 61, 62, 122, 147, 160, 173
 vesmír 104, 117, 134, 190, 196
 cyklický 208, 209
 eukleidovský 210, 212
 homogenní 23, 112, 177
 izotropní 23, 112, 113, 177, 205
 konečný 192, 204
 maximálně symetrický 205
 neeuclidovský 191, 192
 nekonečný 108, 204, 210, 212
 oscilující 208
 plochý 118, 212
 pozorovatelný 109, 196–198, 214
 pulzující 208
 rotující 113
 stacionární 110, 117, 118, 206, 207
 věta 31, 32, 58, 100, 156, 158, 201–203
 Banachova o pevném bodě 186
 binomická 110
 kosinová 22, 101
 Newtonova druhá 32, 74, 87, 92, 99, 103
 Newtonova první 31, 50, 74, 87, 95, 97, 103
 o viriálu 33, 68, 72–75, 78, 79, 85, 88, 180
 Pythagorova 43, 44, 76, 193, 224
 sinová 101
 Thaletova 182
 Viking 126
 viriál 72
 vítr sluneční 122, 128, 139, 148
 Vlasy Bereniky 33, 68, 73, 211
 vlny
 elektromagnetické 134, 189, 190, 214
 gravitační 134, 188–190
 rádiové 99
 voda 125–127, 130, 140
 vrstva kulová 32, 33, 141
 výduť 95, 96, 99, 100, 103
 výkon
 relativní 124
 sluneční 123, 127
 trvalý 153
 zářivý 113, 124, 178
 zářivý Slunce 141
 výstřednost 5, 26, 41, 49, 172
 vzdálenost 89, 90, 138, 139, 193, 199
 eukleidovská 185, 199
 heliocentrická 26
 kosmologická 152, 174, 177, 178, 219
 střední 15, 35, 80, 122, 123, 131–133, 144
 vztah
 Einsteinův 188
 Hubbleův 78, 88, 111
 Pogsonův 42, 85
 relativistický 83, 109
 WIMP 105
 WMAP 195
 zákon
 akce a reakce 35, 40, 71
 gravitační 3, 30, 33, 34, 42, 47, 54, 106
 gravitační Newtonův 30, 34, 40, 42, 46, 50, 71, 92, 94, 155
 harmonický 6
 Keplerův druhý 4, 7, 27, 41
 Keplerův první 4, 25, 27
 Keplerův třetí 5, 15, 30, 35, 37–39, 45, 144–147, 152, 164, 169, 170, 181

Keplerův třetí modifikovaný 42
 Keplerův třetí zobecněný 35, 50, 137, 145
 pohybový Newtonův druhý 40, 47, 51
 síly 40, 52, 54, 71
 Stefanův–Boltzmannův 127, 129, 160
 zachování energie 121, 163, 182, 190
 zachování momentu hybnosti 6, 121, 133, 135, 136, 172, 184, 190
 zákony
 Keplerovy 3, 7, 30, 62, 94, 122, 213
 klasické mechaniky 164, 165
 kvantové mechaniky 81
 Newtonovy 81, 105
 pohybové 3
 záření
 elektromagnetické 89, 148
 homogenní 221
 infrachervené 42
 izotropní 221
 mikrovlnné 110
 reliktní 24, 106, 107, 110, 118, 195, 197, 198, 207, 209, 221
 rentgenové 79
 sluneční 149
 zatmění 3, 12, 17, 61–67, 136
 částečné 64
 Měsíce 3
 měsíční 61, 65
 prstencové 65
 Slunce 3, 17
 sluneční 61, 62, 65
 úplné 61–67
 zdroj temné energie 182, 190
 Země 2, 4, 9, 11–20, 36, 38, 47, 53, 55, 61, 63–67, 123, 140–153, 155–161, 187, 189
 zenit 13
 zrcadlo 1
 zrychlení 51
 gravitační 47
 tíhové 155
 život 125, 141, 155, 157, 160, 161, 190
 inteligentní 143
 mimozemský 62