

Rozptyl skalární vlny na neviditelné kouli

1 Formulace problému

Řešíme problém rozptylu skalární vlny na tzv. neviditelné kouli (disku) ve 2D. Neviditelná koule o jednotkovém poloměru je popsána indexem lomu

$$n(r) = \left(Q - \frac{1}{3Q}\right)^2, \quad Q = \sqrt[3]{-\frac{1}{r} + \sqrt{\frac{1}{r^2} + \frac{1}{27}}}, \quad r \leq 1. \quad (1)$$

Na okraji koule, tj. v $r = 1$, navazuje index lomu spojitě na okolní prostředí - vakuum.

Volíme jednotky, ve kterých je $c = 1$. Šíření vlnění je pak popsáno vlnovou rovnicí

$$\Delta\Psi(\mathbf{r}, t) - n^2(r)\partial_t^2\Psi(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (2)$$

Hledáme stacionární řešení ve tvaru $\Psi(\mathbf{r}, t) = \psi(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t)$. Dosazením do vlnové rovnice (2) dostaneme pro funkci $\psi(\mathbf{r})$ Helmholtzovu rovnici

$$(\Delta + \omega^2 n^2(r)) \psi(\mathbf{r}) = 0. \quad (3)$$

Simulace bude spočívat v řešení rovnice (3) v kartézských souřadnicích na obdélníku $x \in [-a, a]$, $y \in [-b, b]$.

Na okraji $x = -a$ volíme Dirichletovu okrajovou podmínku

$$\psi|_{x=-a} = 1, \quad (4)$$

která odpovídá tomu, že na kouli dopadá v kladném směru osy x rovinná vlna. Na ostatních okrajích volíme Robinovu podmínku

$$\psi_n - ik\psi = 0, \quad (5)$$

kde $k = 2\pi/\lambda$ je vlnové číslo.

2 Diskretizace

Vyjdeme z Galerkinových podmínek

$$j : \quad \sum_i \psi[i] \int_{\Omega} N[j] (\Delta N[i] + \omega^2 n^2(r) N[i]) \, d\Omega = 0. \quad (6)$$

Integrací per partes dostaneme pro j tý uzel rovnici

$$j : \quad \sum_i \psi[i] \int_{\partial\Omega} N[j] \nabla N[i] \cdot \vec{n} \, dl - \sum_i \psi[i] \int_{\Omega} (\nabla N[j] \cdot \nabla N[i] - \omega^2 n^2(r) N[j] N[i]) \, d\Omega = 0. \quad (7)$$

Koeficienty u $\psi[i]$ označíme

$$J_{ji} = \int_{\partial\Omega} N[j] \nabla N[i] \cdot \vec{n} \, dl \quad (8)$$

a

$$K_{ji} = \int_{\Omega} (\nabla N[j] \cdot \nabla N[i] - \omega^2 n^2(r) N[j] N[i]) \, d\Omega. \quad (9)$$

S tímto označením má rovnice (7) tvar

$$j : \quad \sum_i \psi[i] J_{ji} - \sum_i \psi[i] K_{ji} = 0. \quad (10)$$

2.1 Diagonální prvky

Nejprve spočítáme diagonální prvky matice K . S použitím aproximace indexu lomu

$$n^2(r) = \sum_k n^2[k] N[k] \quad (11)$$

mají tvar

$$K_{jj} = \sum_{T \ni j} \int_T \left(\nabla n_T[j] \cdot \nabla n_T[j] - \omega^2 \sum_k n^2[k] n_T[k] n_T[j]^2 \right) d\Omega. \quad (12)$$

Gradient tvarové funkce $n_T[j]$, která je nenulová na elementu T s vrcholy j, r, s , je

$$\nabla n_T[j] = (y_s - y_r, x_r - x_s) \frac{1}{\Delta_T}. \quad (13)$$

Integrál ze skalárního součinu gradientů v diagonálním členu (12) je tak roven

$$\begin{aligned} \int_T \nabla n_T[j] \cdot \nabla n_T[j] \, d\Omega &= \int_T [(y_s - y_r)^2 + (x_s - x_r)^2] \frac{1}{\Delta_T^2} \, d\Omega = \\ &= [(y_s - y_r)^2 + (x_s - x_r)^2] \frac{1}{2|\Delta_T|}. \end{aligned} \quad (14)$$

Nyní se podívejme, jak přispěje do K_{jj} druhý člen v kulaté závorce (12). Do integrálu přes element T přispějí nenulovou hodnotou pouze tři členy sumy přes k :

$$\begin{aligned} \int_T \omega^2 \sum_{k \in T} n^2[k] n_T[k] n_T[j]^2 \, d\Omega &= \\ &= \omega^2 \left(n^2[j] \int_T n_T[j]^3 \, d\Omega + n^2[r] \int_T n_T[r] n_T[j]^2 \, d\Omega + n^2[s] \int_T n_T[s] n_T[j]^2 \, d\Omega \right). \end{aligned} \quad (15)$$

Protože

$$\int_T n_T[j]^3 \, d\Omega = \frac{|\Delta_T|}{20} \quad (16)$$

a

$$\int_T n_T[r] n_T[j]^2 \, d\Omega = \frac{|\Delta_T|}{60}, \quad (17)$$

je výraz (15) roven

$$\omega^2 \left(n^2[j] \frac{|\Delta_T|}{20} + n^2[r] \frac{|\Delta_T|}{60} + n^2[s] \frac{|\Delta_T|}{60} \right) = \omega^2 \frac{|\Delta_T|}{20} \left(n^2[j] + \frac{1}{3} (n^2[r] + n^2[s]) \right). \quad (18)$$

Diagonální člen K_{jj} má tedy tvar

$$K_{jj} = \sum_{T \ni j} \left\{ [(y_s - y_r)^2 + (x_s - x_r)^2] \frac{1}{2|\Delta_T|} - \omega^2 \left[n^2[j] + \frac{1}{3} (n^2[r] + n^2[s]) \right] \frac{|\Delta_T|}{20} \right\}. \quad (19)$$

2.2 Nediagonální prvky

Nyní spočteme nediagonální prvky matice K ,

$$K_{ji} = \sum_{T \ni j, i} \int_T \left(\nabla n_T[j] \cdot \nabla n_T[i] - \omega^2 \sum_k n^2[k] n_T[k] n_T[j] n_T[i] \right) d\Omega. \quad (20)$$

Sčítáme přes elementy T , které obsahují uzly j a i . Pro dané j a i budou takové elementy maximálně dva. Třetí uzel elementu označíme v . První člen v kulaté závorce (20) přispěje do K_{ji} hodnotou

$$\sum_{T \ni j, i} \int_T \nabla n_T[j] \cdot \nabla n_T[i] d\Omega = \sum_{T \ni j, i} [(y_i - y_v)(y_v - y_j) + (x_i - x_v)(x_v - x_j)] \frac{1}{2|\Delta_T|}. \quad (21)$$

Příspěvek druhého členu v kulaté závorce (20) bude následující. V integrálu přes T se opět projeví pouze tři členy ze sumy přes k :

$$\begin{aligned} & \sum_{T \ni j, i} \omega^2 \int_T \sum_{k \in T} n^2[k] n_T[k] n_T[j] n_T[i] d\Omega = \\ & = \omega^2 \sum_{T \ni j, i} \left(n^2[j] \int_T n_T^2[j] n_T[i] d\Omega + n^2[i] \int_T n_T^2[i] n_T[j] d\Omega + n^2[v] \int_T n_T[v] n_T[j] n_T[i] d\Omega \right) = \\ & = \omega^2 \sum_{T \ni j, i} \frac{|\Delta_T|}{60} \left(n^2[j] + n^2[i] + \frac{n^2[v]}{2} \right). \end{aligned} \quad (22)$$

Celkem dostáváme pro nediagonální prvky vyjádření

$$K_{ji} = \sum_{T \ni j, i} \left\{ [(y_i - y_v)(y_v - y_j) + (x_i - x_v)(x_v - x_j)] \frac{1}{2|\Delta_T|} - \omega^2 \frac{|\Delta_T|}{60} \left(n^2[j] + n^2[i] + \frac{n^2[v]}{2} \right) \right\}. \quad (23)$$

2.3 Okrajové příspěvky

Nakonec se podíváme na okrajový integrál

$$J_{ji} = \int_{\partial\Omega} N[j] \nabla N[i] \cdot \vec{n} dl, \quad (24)$$

který je nenulový pro uzly j na části hranice s Robinovou okrajovou podmínkou

$$\sum_i \psi[i] (\nabla N[i] \cdot \vec{n} - ikN[i]) = 0. \quad (25)$$

S využitím této podmínky přepíšeme okrajový integrál

$$J_{ji} = \int_{\partial\Omega} N[j] \nabla N[i] \cdot \vec{n} dl = ik \int_{\partial\Omega} N[j] N[i] dl. \quad (26)$$

Nediagonální prvky J_{ji} jsou nenulové, pouze pokud j a i jsou sousední hraniční uzly. J_{ji} pak má tvar

$$J_{ji} = ik \frac{L_{ji}}{6}, \quad (27)$$

kde $L_{ji} = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}$ je vzdálenost uzlů j a i . Diagonální prvky J_{jj} mají tvar

$$J_{jj} = ik \frac{1}{3} (L_{lj} + L_{jr}), \quad (28)$$

kde l a r jsou hraniční uzly sousedící s uzlem j .

2.4 Výsledná soustava rovnic

Rovnice sestavujeme pro uzly, ve kterých neznáme funkční hodnotu. Index j v rovnici (10) tedy prochází pouze uzly uvnitř simulované oblasti a uzly na části hranice s Robinovou okrajovou podmínkou, zatímco sčítací index i prochází všechny uzly. Sčítance, ve kterých je i hraniční uzel s Dirichletovou okrajovou podmínkou přesuneme na pravou stranu rovnice a dostaneme

$$j : \sum_{i_{\text{inner+Robin}}} \psi[i] (J_{ji} - K_{ji}) = \sum_{i_{\text{Dirichlet}}} \psi[i] (-J_{ji} + K_{ji}). \quad (29)$$

J_{ji} na pravé straně je nenulové pouze pro uzel i v levém horním, resp. dolním rohu simulované oblasti, tj. $(-a, \pm b)$, a uzel j , který je jeho sousedním uzlem na úsečce $y = \pm b$.

3 Výsledky

Síť bodů byla vytvořena tak, aby ve středu simulované oblasti, tj. v místě, kde se nachází čočka, byla hustější než u okrajů. Byl vytvořen program ve fortranu, který načte souřadnice uzlů a seznam elementů, naplní matici soustavy, spočítá vektor pravé strany a uloží je do textových souborů. K řešení získané soustavy rovnic pak byl použit software SuperLU.

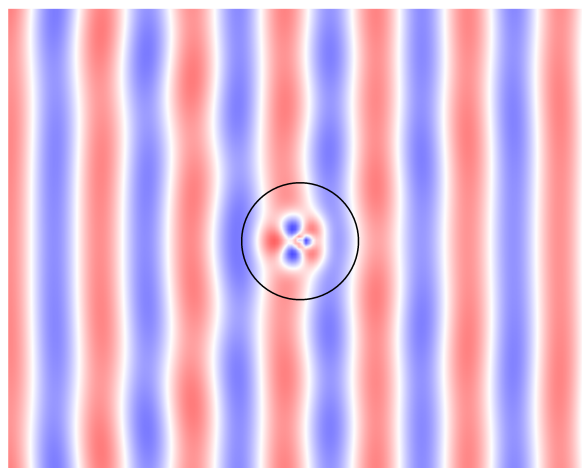
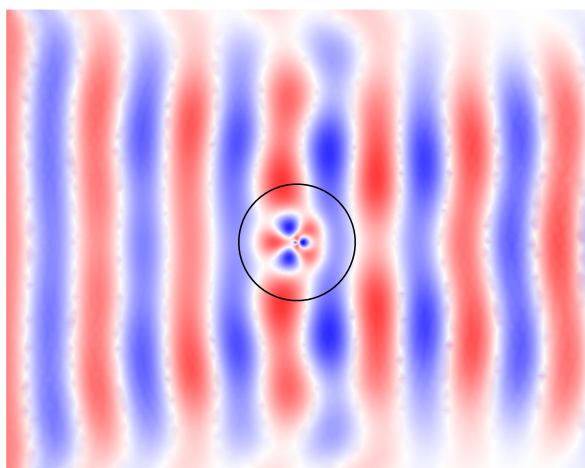
Grafy funkce ψ pro tři různé frekvence ω jsou vykresleny v obrázku 1. Vlevo je vždy umístěn graf funkce ψ spočítané metodou konečných prvků. Vpravo je pro srovnání uveden odpovídající graf vypočtený semi-analytickou metodou (separací proměnných v Helmholtzově rovnici, numerickým řešením radiální rovnice uvnitř čočky a navázáním tohoto řešení na řešení vně čočky) viz [1]. Černá kružnice znázorňuje okraj čočky.

Vidíme, že funkce získané oběma způsoby si docela dobře odpovídají. Simulace se výrazně liší pouze v blízkosti horního a dolního okraje oblasti, což ale není překvapivé vzhledem k tomu, že na těchto okrajích byla při výpočtu metodou konečných prvků zvolena Robinova okrajová podmínka, která neodpovídá očekávanému šíření vlny u těchto okrajů.

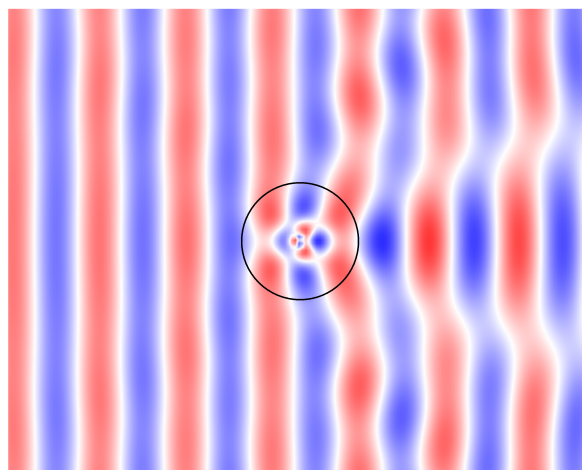
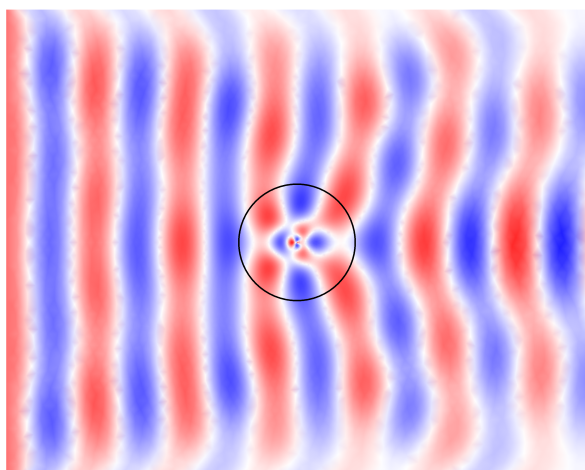
Reference

- [1] Tyc T., Chen H., Danner A., Xu Y., *Invisible lenses with positive isotropic refractive index*, Physical Review A 90, 053829 (2014).

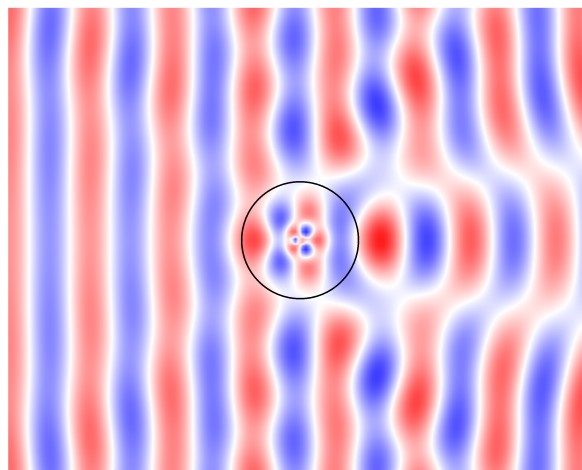
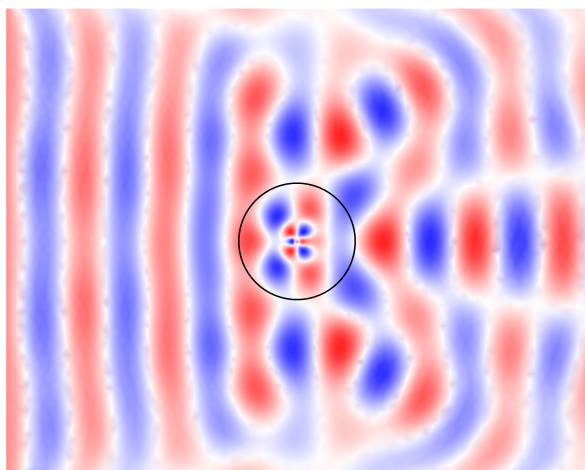
a) $\omega = 4$



b) $\omega = 4,25$



c) $\omega = 4,5$



Obrázek 1: Funkce ψ vypočtená metodou konečných prvků (vlevo) a semi-analytickou metodou (vpravo) pro různé frekvence. Kladné funkční hodnoty jsou vykresleny červeně, záporné modře a sytost barvy odpovídá velikosti funkční hodnoty.