Příklad 5 $\quad \varphi: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4 \quad \varphi(x) = Ax$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & -3 \\ 6 & 9 & 4 & -8 \\ -3 & -4 & -1 & 4 \\ 9 & 9 & 6 & -8 \end{pmatrix} \qquad \det(A - \lambda E) = (1-\lambda)^4$$

Našli jsme dva řetězce $\quad$ vl. vektory u, v

$$z \xrightarrow{A-E} w \xrightarrow{A-E} -6u+v \xrightarrow{A-E} 0$$

$$v \xrightarrow{A-E} 0$$

$$\alpha = (\overbrace{-6u+v,\ w,\ z}^{},\ \overbrace{u}^{})$$

$$\mathcal{B} = (\overbrace{v_1, v_2, v_3}, \tilde{u}_1)$$

$$\mathcal{C} = (\underset{\sim}{u_1}, \underbrace{v_1, v_2, v_3})$$

$$(\varphi)_{\mathcal{B},\mathcal{B}} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & \\ 0 & 1 & 1 & \\ 0 & 0 & 1 & \\ \hline & & & 1 \end{array}\right)$$

$$(\varphi)_{\mathcal{C},\mathcal{C}} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & & & \\ \hline & 1 & 1 & 0 \\ & 0 & 1 & 1 \\ & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = J$$

$$J - 1 \cdot E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(J - 1 \cdot E)^3 = 0$$

$$(J - 1 \cdot E)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Jak se chová kniha

$$J_\lambda(k) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & 0 \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \lambda & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & & & & \lambda \end{pmatrix}$$

$$(\varphi)_{\alpha,\alpha} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \\ \hline & 0 & & 1 \end{array}\right) = J = (Id)_{\alpha,\varepsilon}(\varphi)_{\varepsilon,\varepsilon}(Id)_{\varepsilon,\alpha}$$

$$= P^{-1} A P$$

$P =$ dána souřadnicemi vektorů báze α

Řešení „hádáním"

Jediné vlastní čísla:

$$v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{A-E} v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{A-E} v_1 = \begin{pmatrix} -6 \\ -18 \\ 9 \\ 18 \end{pmatrix} \xrightarrow{A-E} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Bigg\| \quad u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

u_1 vlastní vektor, lin. nezávislý s v_1

$$J_\lambda(k) - \lambda E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & \\ & 0 & 1 & & & \\ & & 0 & \ddots & & \\ & & & \ddots & 0 & 1 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$(J_\lambda(k) - \lambda E)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & 0 & 1 & \\ & & 0 & \ddots & 1 \\ & 0 & & \ddots & 0 \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \nearrow$$

$$(J_\lambda(k) - \lambda E)^{k-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ & & & 0 & 0 \\ & 0 & & & \end{pmatrix}$$

$$(J_\lambda(k) - \lambda E)^{k} = 0$$

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & & & & \\ & \lambda_1 & \ddots & & & \\ & & \ddots & 1 & & \\ & & & \lambda_1 & & \\ & & & & \lambda_2 & 1 \\ & & & & & \ddots & 1 \\ & & & & & & \lambda_2 \end{pmatrix} \qquad \lambda_1 \neq \lambda_2$$

$$(J - \lambda_1 E)^2 = \left(\begin{array}{cccc|ccc} 0 & 0 & 1 & & & & \\ & 0 & \ddots & 1 & & & \\ & & \ddots & 0 & & & \\ & & & 0 & & & \\ \hline & & & & (\lambda_2 - \lambda_1)^2 & \cdots & \\ & & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & & (\lambda_2 - \lambda_1)^2 \end{array}\right)$$

$$(J - \lambda_1 E) = \left(\begin{array}{cccc|ccc} 0 & 1 & & & & & \\ & 0 & \ddots & 1 & & & \\ & & & 0 & & & \\ \hline & & & & \lambda_2 - \lambda_1 & 1 & \\ & & & & & \ddots & 1 \\ & & & & & & \lambda_2 - \lambda_1 \end{array}\right) \begin{matrix} \}k \\ \\ \}n \end{matrix}$$

$$h(J \lambda_1 E) = n - 1$$

$$h(J - \lambda_1 E)_{-} =$$

$$h(J - \lambda_1 E)^k = n - k$$

$$A = P^{-1} J P$$

$$(A - \lambda E)^k = (P^{-1} J P - \lambda P^{-1} E P)^k = \{P^{-1}(J - \lambda E)\, P\}^k =$$

$$= \underbrace{P^{-1}(J - \lambda E)\, P}\ \underbrace{P^{-1}(J - \lambda E)\, P}\ \ldots\ =$$

$$= P^{-1}\,(J - \lambda E)^k\, P$$

$$h(A - \lambda E)^k = h\,\big(P^{-1}(J - \lambda E)^k P\big) = h\,(J - \lambda E)^k$$

P regulární

Izp

Pravidlo 3 Velikost největší buňky s vl. číslem λ = = nejmenší číslo k takové, že

hodnost $(A - \lambda E)^k = n$ − alg. násobnost λ

Zdůvodnění:

$$J = \begin{pmatrix} J_{k_1}(\lambda) & & & \\ & J_{k_2}(\lambda) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{k_i}(\lambda) \\ \hline & & & & J(\bar\lambda) \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

$(J - \lambda E)$

alg. násobnost λ

buňky s jinými vl. čísly

největší buňka je 2×2

$$J = \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 1 & & \\ 0 & 3 & & \\ \hline & & 3 & 1 \\ & & 0 & 3 \end{array}\right) \quad (J-3E)^2 = 0, \quad J - 3E \neq 0$$

$$J = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & & \\ & 3 & 1 & \\ & & 3 & \\ \hline & & & 3 \end{array}\right) \quad (J-3E)^2 \neq 0, \quad (J-3E)^3 = 0$$

Použití JKT v dif. rovnicích

$x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x' = a x$

$x(0) = x_0$

$x(t) = e^{at} \cdot x_0$

$e^a = 1 + \frac{a}{1} + \frac{a^2}{2!} + \frac{a^3}{3!} + \dots$

$e^a \cdot e^b = e^{a+b}$

$x_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x_1' = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n \qquad a_{ij} \in \mathbb{R}$

$x_2' = a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n$

$\dots\dots$

$x_n' = a_{n1} x_1 + \dots\dots + a_{nn} x_n$

$x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$

$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$x'(t) = A x(t)$

Lze definovat pro $A \in Mat_{n \times n}(\mathbb{R})$

$$e^A = E + \frac{A}{1} + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots$$

$(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$

$$e^{At} = E + \frac{A}{1} t + \frac{A^2}{2!} t^2 + \dots$$

Lze derivovat člen po členu

$e^A \cdot e^B = e^{A+B}$ OBECNĚ NEPLATÍ

Platí v případě je $A \cdot B = B \cdot A$. (Ukažte na DU)

Pro $A = J$ lze e^J dobře spočítat

$J = D + Z$ $\quad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ & 0 & & \lambda_2 \\ & & & & \lambda_2 \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix}$ $\quad Z = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \\ & & & & & & \ddots \end{pmatrix}$

$$D \cdot Z = Z \cdot D$$

Protože

$$e^{J} = e^{D+Z} = e^{D} \cdot e^{Z} = \underbrace{\begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & & & & & 0 \\ & e^{\lambda_1} & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & e^{\lambda_1} & & & \\ & & & & e^{\lambda_2} & & \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & e^{\lambda_2} \ddots \end{pmatrix}}_{\overset{\|}{e^{D}}} \cdot$$

$$\cdot \left(E + Z + \frac{Z^2}{2!} + \frac{Z^3}{3!} + \dots \frac{Z^{k-1}}{(k-1)!} \right)$$

kde k je rozměr největší buňky.

$$Z^{k} = Z^{k+1} = \dots\dots = 0$$

$$Z = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ & & & 0 \end{matrix}} & \\ & \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ & & & 0 \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

Rovnice $x'(t) = Jx(t)$, $x(0) = \overline{x} = \begin{pmatrix} \overline{x_1} \\ \overline{x_2} \\ \vdots \\ \overline{x_n} \end{pmatrix}$

má řešení

$$e^{Jt}\,\overline{x} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & \\ & e^{\lambda_1 t} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} \cdot \left(E + Zt + \frac{Z^2}{2!} t^2 + \dots + \frac{Z^{k-1}}{(k-1)!} t^{k-1} \right) \begin{pmatrix} \overline{x_1} \\ \overline{x_2} \\ \vdots \\ \overline{x_n} \end{pmatrix}$$

Řešení rovnice $y'(t) = Ay(t)$ $y(0) = \overline{y}$

$J = P^{-1}AP$ nechť $x(t)$ je řešení soustavy

$$x'(t) = Jx(t) \qquad x(0) = P^{-1}\overline{y}$$

Potem $y(t) = P x(t)$ jest rozwiązaniem układu $y' = Ay$

$$y'(t) = P x'(t) = P \cdot J x(t) = P P^{-1} A P x(t) =$$

$$= A P x(t) = A y(t)$$

$$y(0) = P x(0) = P \cdot P^{-1} \bar{y} = \bar{y}$$

Důkaz věty o JKT

$\varphi: U \to U$, součet alg. násobností vlastních čísel je $\dim U$

λ vl. číslo   vlastní podprostor pro λ je $\ker(\varphi - \lambda\, id)$

kořenový podprostor vl. čísla λ je

$$\underset{(\text{root})}{R_\lambda} = \{ u \in U,\ \exists k \in \mathbb{N},\ (\varphi - \lambda\, id)^k (u) = 0 \}$$

Lemma (Vlastnosti kořenových podprostorů)

① R_λ je vekt. podprostor

② R_λ je invariantní podprostor pro operátory $\varphi - \mu\, id$
R_λ je invariantní podprostor pro operátory ψ, které komutují s $(\varphi - \lambda\, id)$

(3) $\mu \neq \lambda$, pak $\varphi - \mu\, id /_{R_\lambda}$ je invertibilní

(4) $\varphi - \lambda\, id /_{R_\lambda}$ je nilpotentní, to znamená, že existuje

$s \in \mathbb{N}$ tak, že $\quad (\varphi - \lambda\, id)^s /_{R_\lambda} = 0$.

báze R_λ .. $u_1, \dots, u_r$ $\qquad (\varphi - \lambda\, id)^{k_i} u_i = 0$

$s = \max\{k_i\}$

<u>Věta</u> (1. krok v důkazu)

Nechť $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_k$ jsou všechna vlastní čísla operátoru $\varphi : U \to U$, součet jejich alg. násobností je dim U. Potom

$$U = R_{\lambda_1} \oplus R_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus R_{\lambda_k}$$

Navíc R_{λ_i} jsou invariantní vůči φ a jejich dimenze je alg. násobnost λ_i:

Direktní součet $U = U_1 \oplus \cdots \oplus U_k$

je obyčejný součet $U = U_1 + \cdots + U_k$

$$U_1 + \dots + U_k = \{ u_1 + u_2 + \dots + u_k,\ u_i \in U_i \}$$

kde navíc platí: Jestliže

$$u_1 + u_2 + \dots + u_k = 0 \text{ a } u_i \in U_i, \text{ pak } u_1 = u_2 = \dots = u_k = 0.$$

$\iff$ Každý vektor $u \in U$ lze zapsat ve tvaru

$$u = u_1 + u_2 + \dots + u_k,\quad u_i \in U_i$$

právě jedním způsobem.

Něco málo z důkazu věty 1

Součet je direktní. Nechť $u_i \in R_{\lambda_i}$

$$u_1 + u_2 + \dots + u_k = 0$$

chceme dokázat, že $u_1 = u_2 = \dots = u_k = 0$. Důkaz provedeme indukcí podle k : $\underline{k=1}$ R_{λ_1}

$$u_1 = 0 \quad , \text{ není co dokazovat.}$$

Nechť součet $R_{\lambda_1} + \dots + R_{\lambda_{k-1}}$ je direktní a nechť

$$u_1 + u_2 + \dots + u_{k-1} + u_k = 0 \qquad u_i \in R_{\lambda_i}$$

Aplikujeme $(\varphi - \lambda_k id)^s$, kde $(\varphi - \lambda_k id)^s / R_{\lambda_k} = 0$.

$$\underbrace{(\varphi-\lambda_k id)^s u_1}_{\in R_{\lambda_1}} + \underbrace{(\varphi-\lambda_k id)^s u_2}_{R_{\lambda_2}} + \dots + \underbrace{(\varphi-\lambda_k id)^s u_{k-1}}_{R_{\lambda_{k-1}}} = 0$$

Podľa ind. predpokladu je

$$(\varphi-\lambda_k id)^s u_1 = 0, \quad (\varphi-\lambda_k id)^s u_2 = 0, \dots\dots$$

Z lemmatu vieme, že $\varphi-\lambda_k id$ je invertibilné na $R_{\lambda_1}, R_{\lambda_2}, \dots R_{\lambda_{k-1}}$

Aplikáciou inverzie dostaneme

$$u_1 = 0, \; u_2 = 0, \dots u_{k-1} = 0 \implies u_k = 0.$$

Dále je potřeba dokázat, že

$$\dim R_{\lambda_i} = \text{alg. násobnost } \lambda_i$$

(Skripta prof. Slováka)

$$\dim R_{\lambda_1} \oplus R_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus R_{\lambda_k} = \sum \text{alg. násobností} = n$$

$$R_{\lambda_1} \oplus R_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus R_{\lambda_k} \subseteq U \qquad \dim U = n$$

$$\Rightarrow R_{\lambda_1} \oplus R_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus R_{\lambda_k} = U$$

Teď se omezíme na jeden prostor $R_{\lambda_1} = V$

a operátor $\varphi - \lambda_i id = \psi$ $\qquad \varphi - \lambda_i id \,/\, R_{\lambda_i}$ je nilpotentní

<u>Věta:</u> Nechť $\psi : V \longrightarrow V$ je nilpotentní. Pak existuje

rozklad $$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_e$$

takový, že každý prostor V_i má bázi v níž má ψ matici

která je Jordanovou buňkou

$$\exists \text{ řetězec} \quad u_j \xrightarrow{\psi} u_{j-1} \xrightarrow{\psi} \cdots \xrightarrow{\psi} u_1 \xrightarrow{\psi} 0$$

který je bází V_i (Říkáme, že ψ / V_i je cyklický operátor.)

Důkaz: Nechť k je stupeň nilpotentnosti, tj. $\varphi^k = 0$, ale $\varphi^{k-1} \neq 0$

$P_i = \operatorname{im} \varphi^i$

$$\{0\} = P_k \subsetneq P_{k-1} \subsetneq P_{k-2} \; \dots \subsetneq P_1 \subsetneq P_0 = V$$

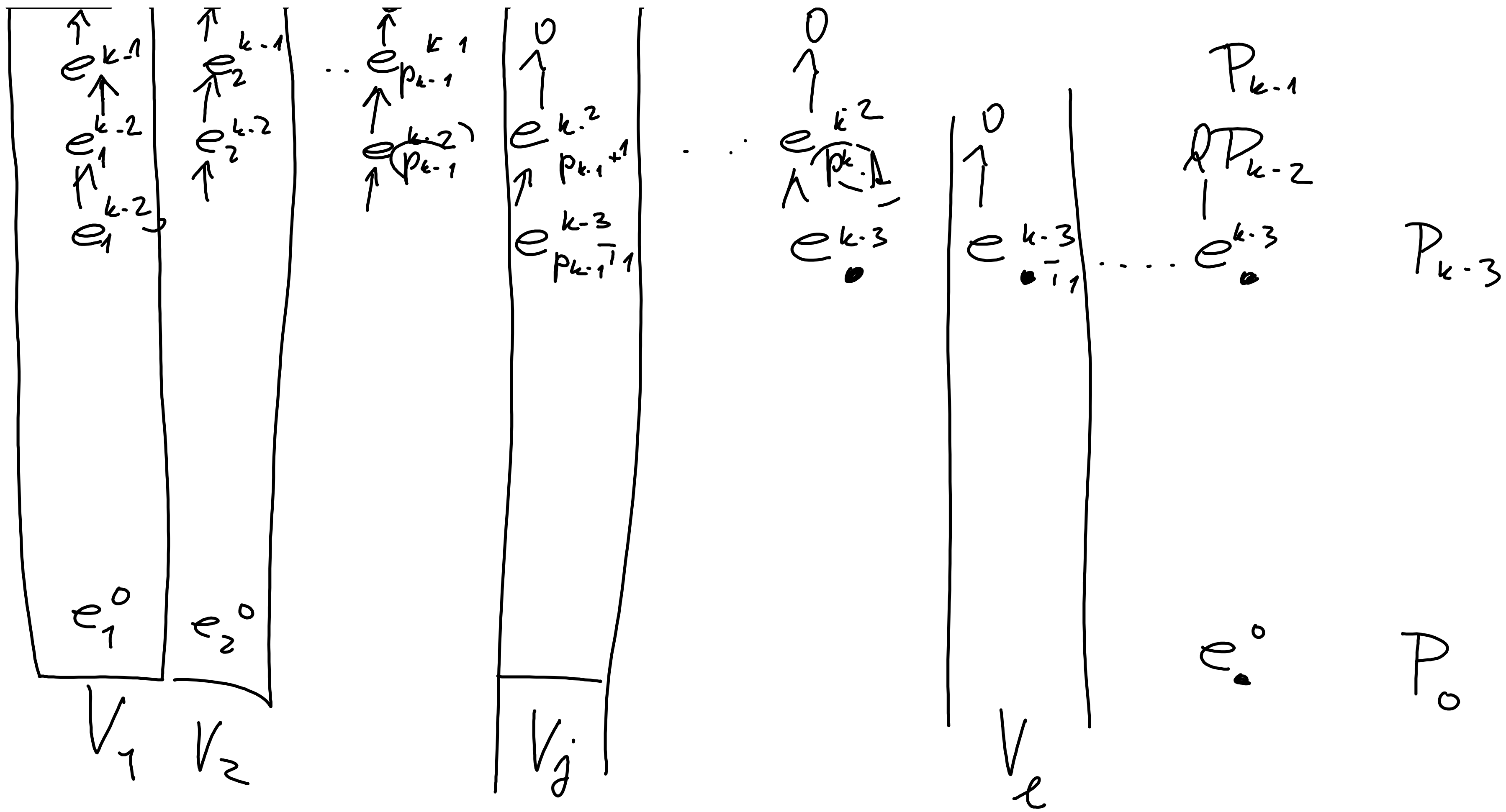
$e_1^{k-1} \dots e_{p_{k-1}}^{k-1}$ báze P_{k-1} $\qquad P_{k-1} = \varphi(P_{k-2})$

Existují $e_1^{k-2}, \dots, e_{p_{k-1}}^{k-2} \in P_{k-2}$, které φ zobrazí do $e_1^{k-1}, \dots, e_{p_{k-1}}^{k-1}$

$e_1^{k-1}, \dots, e_{p_{k-1}}^{k-1}, e_1^{k-2}, \dots, e_{p_{k-1}}^{k-2}$ jsou LN $\qquad$ DU

Lze je doplnit na bázi P_{k-2} $\quad e_{p_{k-1}+1}^{k-2}, \dots, e_{p_{k-2}}^{k-2}$

$$e_j^{k-2} \xrightarrow{\varphi} \sum a_i e_i^{k-1} \qquad e_j^{k-2} - \sum a_i e_i^{k-2} \xrightarrow{\varphi} 0$$


V1
V2
Vj
Vl
Pk-1
Pk-2
Pk-3
P0

$e_i^{k-1}, e_i^{k-2}, e_j^{k-2}$ (nové) tvoří bázi P_{k-2}

Tento postup opakujeme pro $P_{k-3}, P_{k-4}, \ldots$ až P_0

$$\alpha = (e_1^{k-1}, e_1^{k-2}, \ldots e_1^0) \qquad (\psi/V_1)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$\psi(e_1^{k-1}) = 0$$

$$\psi(e_1^{k-2}) = e_1^{k-1}$$