Domácí úkol z 23. 2. 2016

Příklad 1. *Lineární transformace* $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *je dána vztahem*

$$\varphi((x_1, x_2, x_3)) = (x_2 + x_3, 2x_1 + x_3, x_1 - 3x_2 + x_3).$$

Nalezněte matici lineární transformace φ *v bázi* $\mathbf{u}_1 = (1, 2, 1)$, $\mathbf{u}_2 = (2, 1, 1)$, $\mathbf{u}_3 = (1, 3, 2)$.

Řešení. Ze vztahu v zadání je patrné, že $\varphi((1, 0, 0)) = (0, 2, 1)$, $\varphi((0, 1, 0)) = (1, 0, -3)$ a $\varphi((0, 0, 1)) = (1, 1, 1)$. Označme bázi $((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ jako $\mathcal{E}$, bázi $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ jako $\mathcal{U}$ a A matici této lineární transformace vzhledem k bázi $\mathcal{E}$. Pak zřejmě:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

(Můžete dosazením do transformační rovnice $(\mathbf{x}') = A(\mathbf{x})$ *ověřit, že obrazy bázových vektorů jsou skutečně vektory* $(0, 2, 1)$, $(1, 0, -3)$ *a* $(1, 1, 1)$*.)*

Označme nyní B matici přechodu mezi oběma bázemi takovou, že $(\mathbf{x})_\mathcal{E} = B(\mathbf{x})_\mathcal{U}$. Protože $\mathbf{u}_1 = (1, 2, 1)_\mathcal{E} = (1, 0, 0)_\mathcal{U}$, $\mathbf{u}_2 = (2, 1, 1)_\mathcal{E} = (0, 1, 0)_\mathcal{U}$ a $\mathbf{u}_3 = (1, 3, 2)_\mathcal{E} = (0, 0, 1)_\mathcal{U}$, zřejmě:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(Opět lze ověřit dosazením do rovnice $(\mathbf{x})_\mathcal{E} = B(\mathbf{x})_\mathcal{U}$*.)*

Dosazením do transformační rovnice:

$$\begin{aligned} (\mathbf{x}')_\mathcal{E} &= A(\mathbf{x})_\mathcal{E} \\ B(\mathbf{x}')_\mathcal{U} &= AB(\mathbf{x})_\mathcal{U} \\ (\mathbf{x}')_\mathcal{U} &= B^{-1}AB(\mathbf{x})_\mathcal{U} \end{aligned}$$

Odtud je zřejmé, že hledaná matice lineární transformace φ v bázi $\mathcal{U}$ je matice $B^{-1}AB$. Konkrétně můžeme tuto matici vypočítat např. tak, že nejprve vypočteme součin AB, pak sestavíme matici $(B|AB)$ a ekvivalentními úpravami její levý blok převedeme na jednotkovou matici. V pravém bloku pak bude vyjádřena hledaná matice $B^{-1}AB$.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 3 & 5 & 4 \\ -4 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 3 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & -4 & 0 & -6 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 16 & \frac{17}{2} & \frac{47}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -9 & -\frac{7}{2} & -\frac{27}{2} \end{array}\right)$$

Výsledná matice lineární transformace φ v bázi $\mathcal{U}$ je proto matice $\begin{pmatrix} 16 & \frac{17}{2} & \frac{47}{2} \\ -2 & -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ -9 & -\frac{7}{2} & -\frac{27}{2} \end{pmatrix}$.