Lineárne štatistické modely II

Modely analýzy rozptylu

Stanislav Katina[1]

[1]Ústav matematiky a statistiky
Přírodovědecká fakulta
Masarykova univerzita

jarný semester 2016
Verzia 1. júna 2016

Asymptotické testy o stredných hodnotách

Homogenita a nehomogenita rozptylov

Nech $Y_{ji} \sim N(\mu_j, \sigma_j^2)$, kde $j = 1, 2, \ldots, J$ a $i = 1, 2, \ldots, n_j$, sú nezávislé náhodné premenné. Budeme rozlišovať dve situácie

1. $Y_{ji} \sim N(\mu_j, \sigma_j^2)$, kde $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \ldots = \sigma_J^2 = \sigma_e^2$ (**homogenita rozptylov**), σ_j^2 sú neznáme a
2. $Y_{ji} \sim N(\mu_j, \sigma_j^2)$, kde existuje aspoň jedna dvojica $i \neq j$ taká, že $\sigma_i^2 \neq \sigma_j^2$ (**nehomogenita rozptylov**), σ_j^2 sú neznáme.

Asymptotické testy o stredných hodnotách

Jednofaktorový ANOVA model s fixnými efektami pri rovnakých rozptyloch

Nech $Y_{ji} \sim N(\mu_j, \sigma_j^2)$, kde $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \ldots = \sigma_J^2 = \sigma_e^2$ a zároveň σ_j^2 sú neznáme. Majme **jednofaktorový model analýzy rozptylu (ANOVA) s fixnými (pevnými) efektami**, ozn. $\mathcal{F}_{H_1}$, definovaný ako

$$Y_{ji} = \mu_j + \varepsilon_{ji} = \mu + \alpha_j + \varepsilon_{ji},$$

kde $\mu = \sum_{j=1}^J \mu_j / J$, $\mu_j = \mu + \alpha_j$, $\sum_{j=1}^J \alpha_j = 0$, μ je **celková (spoločná) úroveň spoločná všetkým populáciám** (alebo **celková stredná hodnota**), α_j je ***j*-ta úroveň faktora *A*** (***j*-ty efekt faktora *A***) a znamená odchýlku strednej hodnoty j-tej populácie od μ. Pre chyby ε_{ji} platí $\varepsilon_{ji} \sim N\left(0, \sigma_e^2\right)$. Model $Y_{ji} \sim N(\mu + \alpha_j, \sigma_e^2)$ sa nazýva aj **model podmieneného normálneho rozdelenia**.
Majme dvojicu hypotéz H_0: $\mu_1 = \mu_2 = ... = \mu_J = \mu$ oproti H_1: existuje aspoň jedno $i < j$ také, že $\mu_i \neq \mu_j$. Ak H_0 platí, potom $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_J = 0$, dostaneme submodel, ozn. $\mathcal{F}_{H_0}$, definovaný ako

$$Y_{ji} = \mu + \varepsilon_{ji}.$$

Asymptotické testy o stredných hodnotách

Jednofaktorový ANOVA model s fixnými efektami pri rovnakých rozptyloch

Ak H_0 platí, potom

$$F_W = \frac{\frac{SS_A}{J-1}}{\frac{SS_e}{n-J}} \overset{\mathcal{D}}{\sim} F_{J-1,n-J},$$

kde $df_A = J - 1$, $df_e = (n-1) - (J-1) = n - J$ sú stupne voľnosti, $n = \sum_{j=1}^J n_j$ je celkový rozsah, n_j sú rozsahy jednotlivých výberov, SS_A je **výberový súčet štvorcov rozdielov medzi súbormi** a je definovaný ako

$$SS_A = \sum_{j=1}^J n_j \left(\overline{Y}_{j\cdot} - \overline{Y}_{\cdot\cdot}\right)^2 = \sum_{j=1}^J \frac{Y_{j\cdot}^2}{n_j} - \frac{1}{n} Y_{\cdot\cdot}^2,$$

$\widehat{\mu} = \overline{Y}_{\cdot\cdot} = Y_{\cdot\cdot}/n$ je maximálne vierohodný odhad μ, $Y_{\cdot\cdot} = \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^{n_j}$ Y_{ji}, $\widehat{\mu}_j = \overline{Y}_{j\cdot} = Y_{j\cdot}/n$ je maximálne vierohodný odhad μ_j, $Y_{j\cdot} = \sum_{i=1}^{n_j} Y_{ji}$, SS_e je **výberový súčet štvorcov rozdielov vnútri súborov** a je definovaný ako

$$SS_e = \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^{n_j} \left(Y_{ji} - \overline{Y}_{j\cdot}\right)^2 = \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^{n_j} Y_{ji}^2 - \sum_{j=1}^J \frac{Y_{j\cdot}^2}{n_j}.$$

Asymptotické testy o stredných hodnotách

Jednofaktorový ANOVA model s fixnými efektami pri rovnakých rozptyloch

Súčet SS_A a SS_e sa rovná SS_T, čo je **celkový výberový súčet štvorcov rozdielov** a je definovaný ako

$$SS_T = \sum_{j=1}^{J}\sum_{i=1}^{n_j}\left(Y_{ji} - \overline{Y}_{..}\right)^2 = \sum_{j=1}^{J}\sum_{i=1}^{n_j} Y_{ji}^2 - \frac{1}{n} Y_{..}^2,$$

Rovnosti $SS_T = SS_A + SS_e$ hovoríme aj *rozklad celkovej sumy štvorcov*. Pre stupne voľnosti potom platí $df_T = df_A + df_e$, kde $df_T = n - 1$. Sumy štvorcov sa najčastejšie zapisujú do **ANOVA tabuľky**:

zdroj variability	suma štvorcov	df	priemerné štvorce
medzi súbormi	$SS_{A,\mathrm{obs}}$	$J-1$	$MS_{A,\mathrm{obs}} = SS_{A,\mathrm{obs}}/(J-1)$
vnútri súborov	$SS_{e,\mathrm{obs}}$	$n-J$	$MS_{e,\mathrm{obs}} = SS_{e,\mathrm{obs}}/(n-J) = \widehat{\sigma}_e^2 = s^2$
celkovo	$SS_{T,\mathrm{obs}}$	$n-1$	

Asymptotické testy o stredných hodnotách

Jednofaktorový ANOVA model s fixnými efektami pri rovnakých rozptyloch

F_W sa nazýva **Fisherova testovacia štatistika** (alebo **ANOVA F-štatistika**) a test **viacvýberový F-test o rovnosti stredných hodnôt** $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_J$ (alebo **ANOVA F-test**). Realizáciou F_W je F_{obs} a p-hodnota = $\Pr(F_W \geq F_{\mathrm{obs}}|H_0)$.

Interpretácia: Úlohu môžeme interpretovať tak, že stredná hodnota μ_j náhodnej veličiny Y_{ji} závisí na **faktore** A, čo je premenná v nominálnej škále. Jednotlivým **úrovniam** (hladinám) tejto premennej zodpovedajú **fixné efekty** $\alpha_j = \mu_j - \mu$. Úrovne premennej volí experimentátor, sú teda nenáhodné, dopredu dané (fixné). Potom chápeme α_j ako neznáme parametre, ktorých maximálne vierohodné odhady definujeme ako $\widehat{\alpha}_j = \overline{y}_{j.} - \overline{y}_{..}$. Samotné rozhodovanie o H_0 bude založené na porovnaní priemerných súm štvorcov $SS_{A,\mathrm{obs}}/df_A$ a $SS_{e,\mathrm{obs}}/df_e$. Väčšie rozdiely $\overline{y}_{j.}$ a $\overline{y}_{..}$ (v absolútnej hodnote) sa prejavia vo väčšej hodnote štatistiky $SS_{A,\mathrm{obs}}$. Štatistika $SS_{e,\mathrm{obs}}$ zasa umožňuje odhadnúť rozptyl σ_e^2 a súčasne dáva mieru pre hodnotenie veľkosti variability medzi súbormi.

Asymptotické testy o stredných hodnotách

Maticový zápis modelu $\mathcal{F}_{H_1}$ a $\mathcal{F}_{H_0}$

Modely $\mathcal{F}_{H_1}$ a $\mathcal{F}_{H_0}$ sú lineárnymi regresnými modelmi a môžeme ich všeobecne zapísať v tvare $\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$, kde $\mathbf{Y}$ je n-rozmerný náhodný vektor, $\mathbf{X}$ je **matica plánu** s rozmermi $n \times (J+1)$ a $\boldsymbol{\varepsilon}$ je n-rozmerný **vektor chýb**. Potom model $\mathcal{F}_{H_1}$ bude mať tvar

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix}\mathbf{Y}_1\\ \mathbf{Y}_2\\ \vdots\\ \mathbf{Y}_J\end{pmatrix} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix}\mathbf{1}_1 & \mathbf{1}_1 & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{0}\\ \mathbf{1}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{1}_2 & \ldots & \mathbf{0}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots\\ \mathbf{1}_J & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{1}_J\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mu\\ \alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_J\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \vdots\\ \varepsilon_J\end{pmatrix},$$

kde $\mathbf{Y}_j = (Y_{j1}, Y_{j2}, \ldots, Y_{jn_j})^T$ je n_j-rozmerný vektor, $\mathbf{1}_j$ je n_j-rozmerný vektor jednotiek a ε_j je n_j-rozmerný vektor chýb. Potom $\mathbf{Y}_j \sim N_{n_j}(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}, \sigma_e^2\mathbf{I}_{n_j \times n_j})$, vektor chýb $\varepsilon_j \sim N_{n_j}(\mathbf{0}, \sigma_e^2\mathbf{I}_{n_j \times n_j})$, vektor parametrov $\widehat{\boldsymbol{\beta}} \sim N_{J+1}(\boldsymbol{\beta}, \sigma_e^2(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1})$, kde maximálne vierohodný odhad $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ vypočítame pomocou **metódy najmenších štvorcov**, t.j. $\widehat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{Y}$.

Asymptotické testy o stredných hodnotách

ANOVA model v R

Model $\mathcal{F}_{H_0}$ bude mať tvar

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix}\mathbf{Y}_1\\ \mathbf{Y}_2\\ \vdots\\ \mathbf{Y}_J\end{pmatrix} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix}\mathbf{1}_1\\ \mathbf{1}_2\\ \vdots\\ \mathbf{1}_J\end{pmatrix}\mu + \begin{pmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \vdots\\ \varepsilon_J\end{pmatrix}.$$

Asymptotické testy o stredných hodnotách

ANOVA model v R

Argumenty (vstupy) funkcie `aov()`:

1. ANOVA model `formula` v podobe `y~x`;
2. dátová tabuľka `data`;
3. nastavenie výstupu v podobe tabuľky s rozmermi $n \times 3$ obsahujúcej odhady $\widehat{\mu}$, $\widehat{\alpha}_j$ a reziduály (chyby) ε_{ji}, `projections=FALSE` (prednastavené);.

Výstupy funkcie `aov()`:

1. tabuľky s rozmermi $n \times 3$ obsahujúca odhady $\widehat{\mu}$, $\widehat{\alpha}_j$ a reziduály ε_{ji}, `projections`;
2. odhady $\widehat{y}_{ji}$ `fitted.values`;
3. reziduály ε_{ji} `residuals`.

Asymptotické testy o stredných hodnotách

ANOVA model v R

Výstupy funkcie `summary(aov())`:

1. ANOVA tabuľka, kde
   - stupne voľnosti df_A a df_e `summary(MODEL)[[1]][,1]`,
   - sumy štvorcov $SS_{A,\text{obs}}$ a $SS_{e,\text{obs}}$ `summary(MODEL)[[1]][,2]`,
   - priemerné štvorce $MS_{A,\text{obs}}$ a $MS_{e,\text{obs}}$ `summary(MODEL)[[1]][,3]`;
2. realizáciu testovacej štatistiky F_{obs} `summary(MODEL)[[1]][1,4]`;
3. p-hodnota `summary(aov())[[1]][1,5]`.

Funkcia `aov()` používa na výpočty funkciu lineárny regresný model `lm()`. Pri priamom použití fukcie `lm()` dostaneme ANOVA tabuľku ako `anova(lm())`. Odmocninu z rozptylu $\widehat{\sigma}_e^2$ dostaneme pomocou `summary(lm())$sig`. Alternatívne je možné použiť funkciu `oneway.test()`, ktorej vstupom je ANOVA model `formula` v podobe `y~x`, dátová tabuľka `data` a nastavenie rovnosti rozptylov `var.equal=TRUE`. Výstupom sú realizácia testovacej štatistiky F_{obs}, stupne voľnosti df_A a df_e a p-hodnota.

Asymptotické testy o stredných hodnotách

ANOVA model v R

Example (ANOVA F-test)

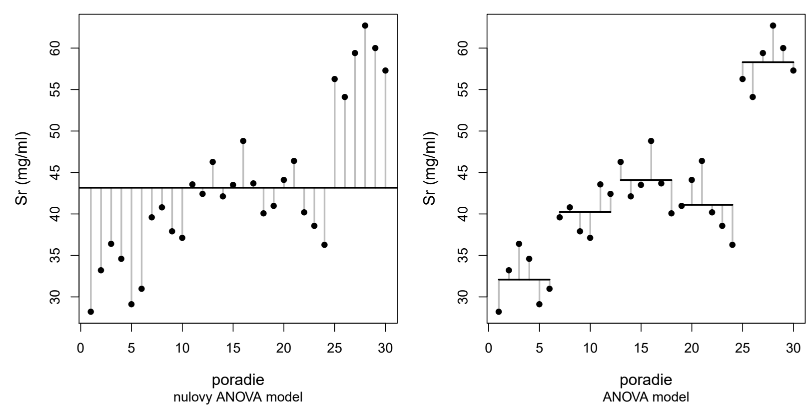
Majme koncentráciu stroncia Sr (mg/ml) v piatich vodných celkoch (pozri tabuľku). Otestujte rovnosť stredných hodnôt ANOVA F-testom pomocou funkcií (1) `aov()` (2) `oneway.test()` a (3) `lm()`.

Tabuľka: Koncentrácia stroncia Sr (mg/ml) v piatich vodných celkoch

A (1)	B (2)	C (3)	D (4)	E (5)
28.2	39.6	46.3	41.0	56.3
33.2	40.8	42.1	44.1	54.1
36.4	37.9	43.5	46.4	59.4
34.6	37.1	48.8	40.2	62.7
29.1	43.6	43.7	38.6	60.0
31.0	42.4	40.1	36.3	57.3

Asymptotické testy o stredných hodnotách

ANOVA model v R



Obr.: Rozptylové grafy ANOVA modelov – $\mathcal{F}_{H_0}$ (vľavo) a $\mathcal{F}_{H_1}$ (vpravo)

Asymptotické testy o stredných hodnotách

ANOVA model v R

Celkový aritmetický priemer je rovný $\overline{y} = 43.16$. Aritmetické priemery koncentrácií Sr v jednotlivých vodných celkoch sú nasledovné: $\overline{y}_{1.} = 32.08$, $\overline{y}_{2.} = 40.23$, $\overline{y}_{3.} = 44.08$, $\overline{y}_{4.} = 41.10$ a $\overline{y}_{5.} = 58.30$, pre $n_j = 6$, $j = 1, 2, \ldots, 6$. Centrované aritmetické priemery sú rovné – $\overline{y}_{1.} - \overline{y} = -11.08$, $\overline{y}_{2.} - \overline{y} = -2.93$, $\overline{y}_{3.} - \overline{y} = 0.92$, $\overline{y}_{4.} - \overline{y} = -2.06$ a $\overline{y}_{5.} - \overline{y} = 15.14$. Pre aritmetické priemery platí $\overline{y}_{1.} < \overline{y}_{2.} < \overline{y}_{4.} < \overline{y}_{3.} < \overline{y}_{5.}$. ANOVA tabuľka je nasledovná

zdroj variability	suma štvorcov	*df*	priemerné štvorce
medzi súbormi	$SS_{A,\text{obs}} \doteq 2193.442$	$J - 1 = 4$	$MS_{A,\text{obs}} \doteq 548.361$
vnútri súborov	$SS_{e,\text{obs}} \doteq 244.130$	$n - J = 25$	$MS_{e,\text{obs}} \doteq 9.765$
celkovo	$SS_{T,\text{obs}} \doteq 2437.572$	$n - 1 = 29$	

Z ANOVA tabuľky vypočítame $F_W \doteq 56.2$, čo je väčšie ako $F_{J-1,n-J}(\alpha) = F_{4,25}(0.05) \doteq 2.76$ (p-hodnota $\ll 0.05$), t.j. H_0 zamietame na $\alpha = 0.05$.

Asymptotické testy o stredných hodnotách

ANOVA model v R

```
K <- 6
J <- 5
VodCelk <- factor(rep(LETTERS[1:J],rep(K,J)))
ConcStr.1 <- c(28.2,33.2,36.4,34.6,29.1,31.0)
ConcStr.2 <- c(39.6,40.8,37.9,37.1,43.6,42.4)
ConcStr.3 <- c(46.3,42.1,43.5,48.8,43.7,40.1)
ConcStr.4 <- c(41.0,44.1,46.4,40.2,38.6,36.3)
ConcStr.5 <- c(56.3,54.1,59.4,62.7,60.0,57.3)
ConcStr <- c(ConcStr.1,ConcStr.2,ConcStr.3,ConcStr.4,ConcStr.5)
mean(ConcStr) # 43.16
PRIEM.ConcStr <- tapply(ConcStr,VodCelk,mean)
round(PRIEM.ConcStr,2)
#    A     B     C     D     E
#32.08 40.23 44.08 41.10 58.30
PRIEM.str <- tapply(ConcStr-mean(ConcStr),VodCelk,mean)
round(PRIEM.str,2)
#      A      B       C      D      E
# -11.08  -2.93   0.92  -2.06  15.14
```


Asymptotické testy o stredných hodnotách

ANOVA model v R

```
StrMOD01 <- aov(ConcStr~VodCelk)
summary(StrMOD01) # ANOVA tabulka
#              Df  Sum Sq Mean Sq F value    Pr(>F)
# VodCelk       4 2193.44  548.36  56.155 3.948e-12 ***
# Residuals    25  244.13    9.77
oneway.test(ConcStr~VodCelk,var.equal=TRUE) # vysl ANOVA F-testu
#         One-way analysis of means
# data:  ConcStr and VodCelk
# F = 56.1546, num df = 4, denom df = 25, p-value = 3.948e-12
## identicky ako
StrMOD02 <- lm(ConcStr~VodCelk)
anova(StrMOD02) # ANOVA tabulka
# Analysis of Variance Table
# Response: ConcStr
#          Df  Sum Sq Mean Sq F value    Pr(>F)
# VodCelk    4 2193.44  548.36  56.155 3.948e-12 ***
```


Asymptotické testy o stredných hodnotách

ANOVA model v R

```
summary(StrMOD02) # vysledky ANOVA F-testu
# Residuals:
#     Min      1Q  Median      3Q     Max
# -4.8000 -2.2500 -0.4833  2.2042  5.3000
#Coefficients:
#             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
#(Intercept)   32.083      1.276  25.149  < 2e-16 ***
#VodCelkB       8.150      1.804   4.517  0.00013 ***
#VodCelkC      12.000      1.804   6.651 5.72e-07 ***
#VodCelkD       9.017      1.804   4.998 3.75e-05 ***
#VodCelkE      26.217      1.804  14.531 1.07e-13 ***
#Residual standard error: 3.125 on 25 degrees of freedom
#Multiple R-squared:  0.8998,    Adjusted R-squared:  0.8838
#F-statistic: 56.15 on 4 and 25 DF,  p-value: 3.948e-12
```

Asymptotické testy o stredných hodnotách

ANOVA model v R

```
StrMOD03 <- lm(ConcStr-mean(ConcStr)~VodCelk-1)
summary(StrMOD03)
# Residuals:
#     Min      1Q  Median      3Q     Max
# -4.8000 -2.2500 -0.4833  2.2042  5.3000
# Coefficients:
#          Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
# VodCelkA -11.0767     1.2757  -8.682 5.12e-09 ***
# VodCelkB  -2.9267     1.2757  -2.294   0.0305 *
# VodCelkC   0.9233     1.2757   0.724   0.4759
# VodCelkD  -2.0600     1.2757  -1.615   0.1189
# VodCelkE  15.1400     1.2757  11.868 9.11e-12 ***
# Residual standard error: 3.125 on 25 degrees of freedom
# Multiple R-Squared: 0.8998,     Adjusted R-squared: 0.8798
# F-statistic: 44.92 on 5 and 25 DF,  p-value: 1.068e-11
summary(StrMOD03)$coef # efekty faktora VodCelk (cela tabulka)
sqrt((summary(StrMOD03)$sig)^2/K) # 1.27575; odmocnina z (MSe/K)
2*pt(summary(StrMOD03)$coeff[2,3],df=K*J-J) # 0.03046675
2*pt(-2.294,df=K*J-J) # 0.03046675
```


Asymptotické testy o stredných hodnotách

ANOVA model v R

```
anova(StrMOD03) # ANOVA tabulka
#Analysis of Variance Table
#Response: ConcStr - mean(ConcStr)
#          Df  Sum Sq Mean Sq F value    Pr(>F)
#VodCelk    5 2193.44  438.69  44.924 1.068e-11 ***
#Residuals 25  244.13    9.77
```


Asymptotické testy o stredných hodnotách

Metódy mnohonásobného porovnávania

Ak ANOVA F-test zamietne H_0, potom je potrebné zistiť, ktoré rozdiely dvojíc stredných hodnôt sú štatisticky signifikantné na nominálnej hladine významnosti α. Môžeme tak urobiť pomocou **post-hoc testov**. Základným predpokladom ich použitia je, rovnako ako pre ANOVA model, splnenie podmienky homogenity rozptylov a normality Y_{ji} a chýb ε_{ji}. Ekvivalentnou H_0 je nasledovná hypotéza $H_0 : \mu_i = \mu_j$ pre $\forall i, j$; $i < j$. Prepíšme H_0 do všeobecnejšieho tvaru

$$H_0 : \sum_{j=1}^{J} a_j \mu_j = \sum_{j=1}^{J} a_j \mu_{0j} \text{ oproti } \sum_{j=1}^{J} a_j \mu_j \neq \sum_{j=1}^{J} a_j \mu_{0j} \text{ pre nejaké } \mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_J)^T \in \mathcal{A},$$

kde $\mathcal{A} = \{\mathbf{a} : \sum_{j=1}^{J} a_j = 0\}$ a **a** je **vektor kontrastov**.

Asymptotické testy o stredných hodnotách

Metódy mnohonásobného porovnávania

Vo všeobecnosti však môžeme prepokladať, že H_0 generuje podpriestor s hodnosťou h. Potom definujme $H_0 = \cap_{k=1}^{h} H_{0k}$, kde $h = \binom{J}{2} = J(J-1)/2$, ak ide o všetky párové porovnania.

V prípade, že J-ta z porovnavaných populácií je **kontrolná** (charakterizovaná μ_J) a ostatné majú byť porovnávané len s touto kontrolnou populáciou a nie medzi sebou, potom volíme $h = J - 1$ a zaujímame sa len napr. o rozdiely tvaru $\left|\overline{y}_{j.} - \overline{y}_{J.}\right|$, kde $j = 1, 2, \ldots, J-1$. Najprv testujeme H_0 viacvýberovým ANOVA F-testom na hladine významnosti α použitím ANOVA F-štatistiky. Ak H_0 nezamietame, nepokračujeme ďalej. Ak H_0 zamietame, chceme identifikovať, ktorú z hypotéz $\mathbf{a}^T\boldsymbol{\mu} = \mathbf{a}^T\boldsymbol{\mu}_0 = 0$, kde $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_J)^T$, zamietame (pre fixné **a**). Počet hypotéz h poznáme vopred, ale množiny $\mathcal{H}_0 = \{k : H_{0k} = 0\}$ a $\mathcal{H}_1 = \{k : H_{0k} = 1\}$, t.j. množiny nezamietnutých a zamietnutých nulových hypotéz z množiny všetkých nulových hypotéz $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \cup \mathcal{H}_1 = \{1, 2, \ldots, h\}$, kde $h = h_0 + h_1$, $h_0 = \text{card}\{\mathcal{H}_0\}$ a $h_1 = \text{card}\{\mathcal{H}_1\}$, dopredu nepoznáme.

Asymptotické testy o stredných hodnotách

Metódy mnohonásobného porovnávania

Pre $H_{0,ij} : \mu_i = \mu_j, i < j$, bude vektor kontrastov $\mathbf{a}_k$ mať na i-tom mieste -1, na j-tom mieste 1, ostatné sú nuly, napr.

$$\mathbf{a}_1 = (1, -1, 0, \ldots, 0)^T, \mathbf{a}_2 = (0, 1, -1 \ldots, 0)^T, \ldots, \mathbf{a}_{J-1} = (0, 0, \ldots, 1, -1)^T,$$

z čoho vyplýva, že

$$\mathbf{a}_1 \Rightarrow \mu_1 = \mu_2, \mathbf{a}_2 \Rightarrow \mu_2 = \mu_3, \ldots, \mathbf{a}_{J-1} \Rightarrow \mu_{J-1} = \mu_J,$$

čo implikuje $\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_J = \mu$. V maticovej podobe dostaneme

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \ldots & 0 \\ 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} \mu \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_J \end{pmatrix}, \mathbf{A}\boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} \alpha_1 - \alpha_2 \\ \alpha_2 - \alpha_3 \\ \vdots \\ \alpha_{J-1} - \alpha_J \end{pmatrix}.$$

Asymptotické testy o stredných hodnotách

Metódy mnohonásobného porovnávania

Ekvivalentne

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_J \end{pmatrix}, \mathbf{A}\boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} \mu_1 - \mu_2 \\ \mu_2 - \mu_3 \\ \vdots \\ \mu_{J-1} - \mu_J \end{pmatrix}.$$

Potom môžeme ekvivalentne písať $H_0 : \mathbf{A}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{a}_0 = \mathbf{0}$ oproti $H_1 : \mathbf{A}\boldsymbol{\beta} \neq \mathbf{a}_0 = \mathbf{0}$.

Pre nejaký vektor $\mathbf{a}$ je stredná hodnota $E[\sum_{j=1}^J a_j \overline{Y}_{j\cdot}] = \sum_{j=1}^J a_j \mu_j$ a rozptyl $Var[\sum_{j=1}^J a_j \overline{Y}_{j\cdot}] = \sigma_e^2 \sum_{j=1}^J \frac{a_j^2}{n_j}$. Potom

$$Z_W = \frac{\sum_{j=1}^J a_j \overline{Y}_{j\cdot} - \sum_{j=1}^J a_j \mu_{j0}}{\sqrt{\sigma_e^2 \sum_{j=1}^J \frac{a_j^2}{n_j}}} \overset{\mathcal{D}}{\sim} N(0, 1).$$

Asymptotické testy o stredných hodnotách

Metódy mnohonásobného porovnávania – Fisherova LSD metóda

Rozptyl σ_e^2 nepoznáme a musíme ho odhadnúť. Výberový rozptyl v j-tej populácii je rovný $S_j^2 = \frac{1}{n_j - 1} \sum_{j=1}^{n_j} (Y_{ji} - \overline{Y}_{j\cdot})^2$, kde $j = 1, 2, \ldots, J$, sú nezávislé. Potom platí $(n_j - 1) S_j^2 / \sigma_e^2 \sim \chi^2_{n_j - 1}$. Keďže v modeloch $\mathcal{F}_{H_0}$ a $\mathcal{F}_{H_1}$ predpokladáme rovnosť rozptylov, potom môžeme písať $\widehat{\sigma}_e^2$ ako $s^2 = \frac{1}{n-J} \sum_{j=1}^J (n_j - 1) s_j^2 = \frac{1}{n-J} \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^{n_j} (y_{ji} - \overline{y}_{j\cdot})^2 = \frac{1}{n-J} SS_{e,\text{obs}}$, kde $n - J = \sum_{j=1}^J (n_j - 1)$. Potom $(n - J) S^2 / \sigma_e^2 \sim \chi^2_{n-J}$. Navyše S^2 je nezávislé na $\overline{Y}_{j\cdot}$, a teda môžeme písať

$$T_{\mathbf{a}} = \frac{\mathbf{a}^T \widehat{\boldsymbol{\mu}} - \mathbf{a}^T \boldsymbol{\mu}_0}{\sqrt{S^2 \mathbf{a}^T (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{a}}} = \frac{\sum_{j=1}^J a_j \overline{Y}_{j\cdot} - \sum_{j=1}^J a_j \mu_{j0}}{\sqrt{S^2 \sum_{j=1}^J \frac{a_j^2}{n_j}}} \overset{\mathcal{D}}{\sim} t_{n-J},$$

kde je matica plánu $\mathbf{X}$ použitá bez prvého stĺpca (charakterizujúceho celkovú strednú hodnotu μ) a má preto rozmery $n \times J$. Realizáciou $T_{\mathbf{a}}$ je $t_{\mathbf{a}}$, p-hodnota = $\Pr(T_{\mathbf{a}} \geq |t_{\mathbf{a}}| | H_0)$ a H_0 zamietame, ak $|t_{\mathbf{a}}| \geq t_{n-J}(\alpha/2)$; $t_{n-J}(\alpha/2)$ je kritická hodnota t rozdelenia s $n - J$ stupňami voľnosti.

Asymptotické testy o stredných hodnotách

Metódy mnohonásobného porovnávania – Fisherova LSD metóda

$T_{\mathbf{a}} = T_{LSD}$ je **Waldova testovacia štatistika**, často nazývaná aj **Fisherova LSD štatistika** (z angl. *least significant difference*, t.j. najmenší signifikantný rozdiel). Test **viacvýberový Fisherov LSD test o lineárnom kontraste** $\sum_{j=1}^J a_j \mu_j$.

Potom môžeme definovať **Waldov** $100 \times (1 - \alpha)\%$ **empirický IS pre <u>nejakú</u> <u>lineárnu kombináciu</u>** $\sum_{j=1}^J a_j \mu_j$ (nazývaný aj **empirický IS Fisherovho typu**) ako

$$\left(\sum_{j=1}^J a_j \overline{y}_{j\cdot} - t_{n-J}(\alpha/2) \sqrt{s^2 \sum_{j=1}^J \frac{a_j^2}{n_j}}, \sum_{j=1}^J a_j \overline{y}_{j\cdot} + t_{n-J}(\alpha/2) \sqrt{s^2 \sum_{j=1}^J \frac{a_j^2}{n_j}} \right).$$

Asymptotické testy o stredných hodnotách

Metódy mnohonásobného porovnávania – Scheffeho metóda

Označme

$$T^2_{\mathbf{a}} = \frac{\left(\mathbf{a}^T\widehat{\boldsymbol{\mu}} - \mathbf{a}^T\boldsymbol{\mu}_0\right)^2}{S^2\mathbf{a}^T(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{a}} = \frac{\left(\sum_{j=1}^J a_j\overline{Y}_{j\cdot} - \sum_{j=1}^J a_j\mu_{j0}\right)^2}{S^2\sum_{j=1}^J \frac{a_j^2}{n_j}} = \frac{\left(\sum_{j=1}^J a_j(\overline{Y}_{j\cdot}-\mu_{j0})\right)^2}{S^2\sum_{j=1}^J\frac{a_j^2}{n_j}}.$$

Potom

$$\sup_{\mathbf{a}:\sum_{j=1}^J a_j=0} T^2_{\mathbf{a}} = \frac{\sum_{j=1}^J n_j\left((\overline{Y}_{j\cdot}-\overline{Y}_{\cdot\cdot})-(\mu_{j0}-\mu)\right)^2}{S^2} = (J-1)F_W,$$

kde $\overline{Y}_{\cdot\cdot} = \sum_{j=1}^J n_j\overline{Y}_{j\cdot}/\sum_{j=1}^J n_j$ a $\mu = \sum_{j=1}^J n_j\mu_J/\sum_{j=1}^J n_j$. Navyše

$$\sup_{\mathbf{a}:\sum_{j=1}^J a_j=0} T^2_{\mathbf{a}} \overset{\mathcal{D}}{\approx} (J-1)F_{J-1,n-J}.$$

Asymptotické testy o stredných hodnotách

Metódy mnohonásobného porovnávania – Scheffeho metóda

Čitateľ a menovateľ $(J-1)F_W$ sú nezávislé. Tiež platí $S^2 \sim \sigma_e^2\chi^2_{n-J}/(n-J)$ a

$$1/\sigma_e^2\left(\sum_{j=1}^J n_j\left((\overline{Y}_{j\cdot}-\overline{Y}_{\cdot\cdot})-(\mu_{j0}-\mu)\right)^2\right) \sim \chi^2_{J-1}.$$

Scheffe ukázal, že

$$F_{\mathbf{a}} = \frac{\left(\mathbf{a}^T\widehat{\boldsymbol{\mu}} - \mathbf{a}^T\boldsymbol{\mu}_0\right)^2}{S^2\mathbf{a}^T(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{a}} = \frac{(\sum_{j=1}^J a_j\overline{Y}_{j\cdot} - \sum_{j=1}^J a_j\mu_{j0})^2}{S^2\sum_{j=1}^J a_j^2/n_j} \overset{\mathcal{D}}{\approx} (J-1)F_{J-1,n-J},$$

kde H_0 zamietame, ak $F_{\mathbf{a}} \geq (J-1)F_{J-1,n-J}(\alpha)$, kde $F_{J-1,n-J}(\alpha)$ je kritická hodnota F rozdelenia s $J-1$ a $n-J$ stupňami voľnosti. Je potrebné zdôrazniť, že H_0 musí platiť pre všetky kontrasty $\mathbf{a}$ simultánne a H_0 zamietame, ak zamietame hypotézu o supréme $T^2_{\mathbf{a}}$, t.j. zamietame H_0 v ANOVA F-teste. $F_{\mathbf{a}}$ sa nazýva **Waldova testovacia štatistika**, často nazývaná aj **Scheffeho štatistika** a test **viacvýberový Scheffeho test nulovosti všetkých kontrastov**. Realizáciou $F_{\mathbf{a}}$ je $F_{\mathbf{a},\mathrm{obs}}$ a (adjustovaná) p-hodnota = $\Pr(F_{\mathbf{a}} \geq F_{\mathbf{a},\mathrm{obs}}|H_0)$.

Asymptotické testy o stredných hodnotách

Metódy mnohonásobného porovnávania – Scheffeho metóda

Waldove simultánne $100\times(1-\alpha)\%$ **empirické intervaly spoľahlivosti Scheffeho typu** definujeme ako

$$\left(\mathbf{a}^T\widehat{\boldsymbol{\mu}} - \sqrt{(J-1)F_{J-1,n-J}(\alpha)}\sqrt{\widehat{\sigma}_e^2\mathbf{a}^T(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{a}}\,,\right.$$

$$\left.\mathbf{a}^T\widehat{\boldsymbol{\mu}} + \sqrt{(J-1)F_{J-1,n-J}(\alpha)}\sqrt{\widehat{\sigma}_e^2\mathbf{a}^T(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{a}}\right),$$

kde pravdepodobnosť pokrytia všetkých IS (simultánne) je rovná $1-\alpha$. Za simultánnu inferenciu (t.j. testovanie H_{0k}) platíme dĺžkou simultánnych IS Scheffeho typu oproti IS Fisherovho typu, t.j. keďže garantujeme simultánny koeficient spoľahlivosti $1-\alpha$, simultánne IS Scheffeho typu môžu byť dosť široké (platí $t_{n-J}(\alpha/2) \leq \sqrt{(J-1)F_{J-1,n-J}(\alpha)}$). Z čoho vyplýva, že Sheffeho testy majú menšiu silu ako t-testy.

Asymptotické testy o stredných hodnotách

Metódy mnohonásobného porovnávania – Tukeyho HSD metóda

Tukey ukázal, že

$$\sup_{\mathbf{a}:\sum_{j=1}^J a_j=0} T_{\mathbf{a}} = \frac{\overline{Y}_{\max\cdot} - \overline{Y}_{\min\cdot}}{S\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n_{\max}\overline{Y}_{\max\cdot}} + \frac{1}{n_{\min}\overline{Y}_{\min\cdot}}\right)}} \overset{\mathcal{D}}{\approx} q_{J,n-J},$$

kde $\overline{Y}_{\max\cdot} = \max_{\forall j}\overline{Y}_{j\cdot}$ a jemu prislúchajúci rozsah $n_{\max}$, $\overline{Y}_{\min\cdot} = \min_{\forall j}\overline{Y}_{j\cdot}$ a jemu prislúchajúci rozsah $n_{\min}$. Potom

$$F_{\mathbf{a}} = \frac{\left(\mathbf{a}^T\widehat{\boldsymbol{\mu}} - \mathbf{a}^T\boldsymbol{\mu}_0\right)^2}{S^2\mathbf{a}^T(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{a}} \overset{\mathcal{D}}{\approx} \frac{1}{2}q^2_{J,n-J},$$

kde H_0 zamietame, ak $F_{\mathbf{a}} \geq \frac{1}{2}q^2_{J,n-J}(\alpha)$, kde $q_{J,n-J}(\alpha)$ je kritická hodnota **studentizovaného rozpätia** s J a $n-J$ stupňami voľnosti. Je potrebné opäť zdôrazniť, že H_0 musí platiť pre všetky kontrasty $\mathbf{a}$ simultánne a H_0 zamietame, ak zamietame hypotézu o supréme $T_{\mathbf{a}}$.

Asymptotické testy o stredných hodnotách

Metódy mnohonásobného porovnávania – Tukeyho HSD metóda

$F_{\mathbf{a}}$ sa nazýva **Waldova testovacia štatistika**, často nazývaná aj **Tukeyho HSD štatistika** (alebo **Tukey-Kramerova štatistika**; HSD z angl. *honest significant difference*, t.j. skutočný signifikantný rozdiel) a test **viacvýberový Tukeyho HSD test nulovosti všetkých kontrastov**. Realizáciou $F_{\mathbf{a}}$ je $F_{\mathbf{a},\mathrm{obs}}$ a (adjustovaná) p-hodnota = $\Pr(F_{\mathbf{a}} \geq F_{\mathbf{a},\mathrm{obs}} | H_0)$.

Waldove simultánne $100 \times (1-\alpha)\%$ **empirické intervaly spoľahlivosti Tukeyho typu** definujeme ako

$$\left(\mathbf{a}^T\widehat{\mu} - q_{J,n-J}(\alpha)\sqrt{\frac{1}{2}\widehat{\sigma}_e^2 \mathbf{a}^T(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{a}}, \mathbf{a}^T\widehat{\mu} + q_{J,n-J}(\alpha)\sqrt{\frac{1}{2}\widehat{\sigma}_e^2 \mathbf{a}^T(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{a}} \right).$$

Asymptotické testy o stredných hodnotách

Metódy mnohonásobného porovnávania v R

Example (Metódy mnohonásobného porovnávania)

Majme koncentráciu stroncia Sr (mg/ml) v piatich vodných celkoch. Otestujte rovnosť stredných hodnôt ANOVA F-testom pomocou funkcií (1) `aov()` (2) `oneway.test()` a (3) `lm()`. Ak je H_0 zamietnutá na $\alpha = 0.05$, potom použite (1) Tukeyho HSD metódu (T_{HSD} štatistiku), vypočítajte adjustované p-hodnoty, simultánne 95% empirické IS Tukeyho typu pre všetky párové porovnania rozdielov stredných hodnôt a zobrazte ich graficky. (2) Po náhľade na dáta vhodne zadefinujte kontrasty a aplikujte na ne Scheffeho metódu.

Asymptotické testy o stredných hodnotách

Metódy mnohonásobného porovnávania v R

```
# Tukeyho HSD metoda pre vybrany kontrast B-A
a.AB <- c(-1,1,0,0,0)
citatel.AB <- sum(a.AB*PRIEM.ConcStr) # 8.15
sigmasq.e.hat <- (summary(StrMOD03)$sig)^2 # 9.7652
menovatel.AB <- sqrt(sigmasq.e.hat/2*sum(a.AB^2/K)) # 1.275748
tLSD.AB <- citatel.AB/menovatel.AB # 6.388408
qtukey(0.95,J,K*J-J) # 4.153363
p.hodn <- 1-ptukey(tLSD.AB,J,K*J-J) # 0.001129311
IS.AB <- citatel.AB+c(-1,1)*qtukey(0.95,J,K*J-J)*menovatel.AB
# 2.851355 13.448645
mp.Tukey <- TukeyHSD(aov(ConcStr~VodCelk),ordered=FALSE) # tab.
mp.Tukey$VodCelk
```

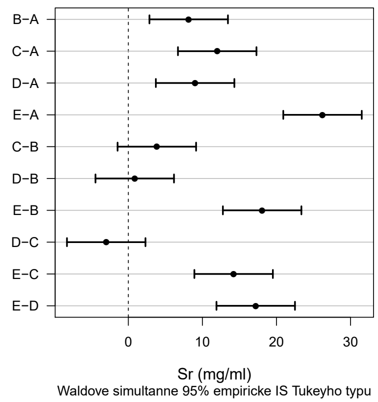

Asymptotické testy o stredných hodnotách

Metódy mnohonásobného porovnávania v R

Tabuľka: Výsledky Tukey HSD metódy – rozdiely aritmetických priemerov $\overline{y}_{i.} - \overline{y}_{j.}$, dolná a horná hranica Waldových simultánnych 95% empirických IS Tukeyho typu pre $\mu_i - \mu_j$ (DH a HH), adjustované p-hodnoty $\widetilde{p}_k$

	$\overline{y}_{i.} - \overline{y}_{j.}$	DH	HH	$\widetilde{p}_k$
B-A	8.15	2.85	13.45	0.00112931
C-A	12.00	6.70	17.30	0.00000534
D-A	9.02	3.72	14.32	0.00033392
E-A	26.22	20.92	31.52	$<$0.00000001
C-B	3.85	–1.45	9.15	0.23762175
D-B	0.87	–4.43	6.17	0.98848032
E-B	18.07	12.77	23.37	$<$0.00000001
D-C	–2.98	–8.28	2.32	0.47910996
E-C	14.22	8.92	19.52	0.00000029
E-D	17.20	11.90	22.50	0.00000001

Metódy mnohonásobného porovnávania v R



Obr.: Waldove simultánne 95% empirické IS Tukeyho typu pre rozdiely stredných hodnôt

Metódy mnohonásobného porovnávania v R

Po náhľade na dáta použijeme nasledovné tri vektory kontrastov $\mathbf{a}_k$, nim prislúchajúce odhady efektov $\mathbf{a}_k^T\widehat{\boldsymbol{\mu}} = \sum_{j=1}^J a_{kj}\overline{y}_{j.}$, ich rozptyly $s^2\mathbf{a}_k^T(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{a}_k = s^2\sum_{j=1}^J a_{kj}^2/n_j$ a Scheffeho testovacie štatistiky $\sqrt{(J-1)F} = \left|\mathbf{a}_k^T\widehat{\boldsymbol{\mu}}\right| / \sqrt{s^2\mathbf{a}_k^T(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{a}_k}$, kde $k = 1, 2$ a 3:

- $\mathbf{a}_1 = (0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -1)^T$, $\mathbf{a}_1^T\widehat{\boldsymbol{\mu}} \doteq -9.7$, $s^2\mathbf{a}_1^T(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{a}_1 = 1.47^2$, $\sqrt{4F} \doteq 11.20$,
- $\mathbf{a}_2 = (1, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 0)^T$, $\mathbf{a}_2^T\widehat{\boldsymbol{\mu}} \doteq -16.5$, $s^2\mathbf{a}_2^T(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{a}_2 = 1.47^2$, $\sqrt{4F} \doteq 6.60$,
- $\mathbf{a}_3 = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{2})^T$, $\mathbf{a}_3^T\widehat{\boldsymbol{\mu}} \doteq 3.4$, $s^2\mathbf{a}_3^T(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{a}_3 = 1.16^2$, $\sqrt{4F} \doteq 2.93$.

Scheffeho kritická hodnota je rovná $\sqrt{(J-1)\,F_{J-1,n-J}\,(\alpha)} = \sqrt{4F_{4,25}\,(0.05)} \doteq 3.32$. Potom $H_{0k} : \mathbf{a}_k^T\boldsymbol{\mu} = 0$ oproti $H_{1k} : \mathbf{a}_k^T\boldsymbol{\mu} \neq 0$ zamietame, ak $k = 1, 2$, a nezamietame, ak $k = 3$.

Párové porovnávania

Definition (chyba porovnávania α_c)

Chyba porovnávania (*comparison-wise error*, CWER) α_c je pravdepodobnosť zamietnutia práve jednej H_{0k}, keď táto H_{0k} je pravdivá, t.j. ide o pravdepodobnosť, že nastane práve jedna CHPD v jednom párovom porovnaní.

Definition (experimentálna chyba α_e)

Experimentálna chyba (*experiment-wise error*, EWER) α_e je pravdepodobnosť zamietnutia aspoň jednej H_{0k}, keď všetky H_{0k} sú pravdivé, t.j. ide o pravdepodobnosť, že nastane aspoň jedna CHPD medzi všetkými h nezávislými párovými porovnávaniami. Táto chyba je kontrolovaná na nominálnej hladine významnosti α.

Párové porovnávania

Z definícií vyplýva, že Pr(CHPD) jedného testu je rovná α_c a pravdepodobnosť správneho rozhodnutia je $1-\alpha_c$. Za predpokladu, že máme h nezávislých párových porovnávaní, bude mať náhodná premenná V (počet CHPD) binomické rozdelenie, t.j. $V \sim Bin(h, \alpha_c)$. Keďže α_e je pravdepodobnosť, že nastane aspoň jedna CHPD medzi všetkými h nezávislými párovými porovnávaniami, môžeme ju definovať nasledovne

$$\alpha = \alpha_e = \Pr(V \geq 1) = 1 - \Pr(V = 0) = 1 - \binom{J}{2}\alpha_c^0(1-\alpha_c)^h = 1 - (1-\alpha_c)^h.$$

Z tejto rovnosti vyplýva, že ak sa počet párových porovnávaní zväčšuje, α_e sa blíži k jednotke (pozri tabuľku). Ak $h = 1$ (dvojvýberový prípad), potom $\alpha = \alpha_e = \alpha_c$.

Tabuľka: Experimentálna chyba α_e ako funkcia α_c a h

α_c/h	2	5	10	20	50
0.01	0.0199	0.0490	0.0956	0.1821	0.3950
0.05	0.0975	0.2262	0.4013	0.6415	0.9231
0.10	0.1900	0.4095	0.6513	0.8784	0.9948

Asymptotické testy o stredných hodnotách

Párové porovnávania

Zamerajme sa na hodnotenie **zovšeobecnenej pravdepodobnosti CHPD** v podobe

1. **pravdepodobnosti najmenej jednej CHPD**, kde V je počet zamietnutých pravdivých H_{0k} (*family-wise error rate*, FWER: metódy napr. Fisher1935 LSD, Tukey1949,Tukey1953, Tukey1991 HSD, Scheffe1953, Bonferroni1936, Sidak1967, Holm1979, Hochberg1988); $\text{FWER} = \Pr(V \geq 1)$; **FWER adjustované (upravené) p-hodnoty** sú definované nasledovne
$$\widetilde{p}_k = \inf\{\alpha : H_{0k} \text{ zamietame na FWER } = \alpha\};$$
2. **očakávanej hodnoty podielu CHPD medzi zamietnutými hypotézami**, $\text{FDR} = E[V/R]$, ak $R > 0$ alebo 0, ak $R = 0$, kde R je počet zamietnutých pravdivých a nepravdivých H_0, $\text{FDP} = V/R$ (*false dicovery rate*, FDR, *false discovery proportion*, FDP: metódy napr. BenjaminiHochberg1995, BenjaminiYekutieli2001); **FDR adjustované p-hodnoty** sú definované nasledovne
$$\widetilde{p}_k = \inf\{\alpha : H_{0k} \text{ zamietame na FDR } = \alpha\};$$

Asymptotické testy o stredných hodnotách

Párové porovnávania

Kontrola FWER a FDR znamená nasledovné: $\text{FWER} \leq \alpha$ a $\Pr(\text{FDP} > \gamma) \leq \alpha$, kde $\gamma, \alpha \in (0, 1)$.

Aby bolo možné robiť simultánnu inferenciu, je potrebné modifikovať kritickú hodnotu $t_{n-J}(\alpha/2)$ rozdelenia Fisherovej LSD štatistiky pomocou substitúcie $\alpha/2$ použitím jedno- a viackrokových metód. **(Jednokroková) Bonferroniho**, resp. **Šidákova metóda** sú založené na princípe zmenšenia argumentu $\alpha/2$ kritickej hodnoty t-rozdelenia s $n-J$ stupňami voľnosti (obojstranný test) na základe *Bonferroniho*, resp. *Šidákovej nerovnosti*,
$\Pr\left(\cup_{k=1}^{h} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{h} \Pr(A_k)$, $\Pr\left(\cup_{k=1}^{h} A_k\right) \leq 1-\alpha$, resp.
$\Pr\left(\cap_{k=1}^{h} A_k\right) \geq \prod_{k=1}^{h} \Pr(A_k)$, $\Pr\left(\cap_{k=1}^{h} A_k\right) \geq 1-\alpha$, na $\alpha/(2h)$, resp. $1-(1-\alpha/2)^{1/h}$, kde A_k je najaká udalosť.

Asymptotické testy o stredných hodnotách

Párové porovnávania

Bonferroniho metóda je *konzervatívnejšia* ako Šidákova (vedie ku menšiemu počtu zamietnutí, t.j. kritické hodnoty sú väčšie), lebo platí $(1-\alpha)^{1/h} < 1-\alpha/h$ pre všetky $\alpha > 0, h > 1$, teda $t_{n-J}(\alpha/h) > t_{n-J}(1-(1-\alpha)^{1/h})$. Rozdiel je ale zanedbateľný.

V súvislosti s kontrolou FWER a adjustovanými p-hodnotami platí pre Bonferroniho nerovnosť

$$\begin{aligned} \text{FWER} &= \Pr(V>0) = \Pr\left(\cup_{k=1}^{h}\left(\widetilde{P}_k \leq \alpha\right)\right) \leq \sum_{k=1}^{h_0} \Pr\left(\widetilde{P}_k \leq \alpha\right) \\ &\leq \sum_{k=1}^{h_0} \frac{\alpha}{h} = h_0 \frac{\alpha}{h} \leq \alpha. \end{aligned}$$

Asymptotické testy o stredných hodnotách

Párové porovnávania

Pre Šidákovu nerovnosť

$$\begin{aligned} \Pr(V=0) &= \Pr\left(\cap_{k=1}^{h}\left(\widetilde{P}_k \geq \alpha\right)\right) = \prod_{k=1}^{h_0} \Pr\left(\widetilde{P}_k \geq \alpha\right) \\ &= \prod_{k=1}^{h_0} \Pr\left(P_k \geq 1-(1-\alpha)^{1/h}\right) = 1-(1-\alpha)^{h_0/h}, \end{aligned}$$

z ktorej vyplýva, že $\text{FWER} = \Pr(V>0) = 1-\Pr(V=0) = (1-\alpha)^{h_0/h} \leq \alpha$.

Ak použijeme vyššie uvedené postupy na h párových porovnaní, potom pravdepodobnosť, že aspoň raz chybne zamietneme jednu z rovností $\mu_i = \mu_j$, ktorá platí, nie je väčšia ako α. Ak ide o vyvážené triedenie, kde $n_1 = n_2 = \ldots = n_J$, potom je táto pravdepodobnosť presne rovná α. T.j. ak sú všetky hypotézy pravdivé, pravdepodobnosť identifikácie, že niektorá z nich je nepravdivá, nie je viac ako α, pretože α je pravdepodobnosť zamietnutia ANOVA F-testu. Taktiež ANOVA F-test je test všetkých $\mathbf{a}_k^T \boldsymbol{\mu} = 0$, $k = 1, 2, \ldots, h$, a ak je tento test zamietnutý, ešte nemusí nastať situácia, že niektorá z vyššie spomenutých metód nezamietne nejakú hypotézu. Práve pre túto vlastnosť je experimentálna chyba menšia ako α. Ale ak ANOVA F-test zamieta nulovú hypotézu, potom Scheffeho metóda bude zamietať H_0 aspoň pre jeden kontrast.

Asymptotické testy o stredných hodnotách

Párové porovnávania

Adjustované hladiny významnosti) α_k sú definované nasledovne

- Bonferroniho $\alpha_k = \alpha/h$,
- Šidákove $\alpha_k = 1 - (1-\alpha)^{1/h}$,

Argument $\alpha/2$ kritickej hodnoty $t_{n-J}(\alpha/2)$ sa substituuje α_k. Potom budú **Waldove simultánne** $100 \times (1-\alpha)$% **empirické intervaly spoľahlivosti Fisherovho typu** definované nasledovne

$$\left(\mathbf{a}^T\widehat{\boldsymbol{\mu}} - t_{n-J}(\alpha_k)\sqrt{\widehat{\sigma}_e^2\mathbf{a}^T(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{a}}, \mathbf{a}^T\widehat{\boldsymbol{\mu}} + t_{n-J}(\alpha_k)\sqrt{\widehat{\sigma}_e^2\mathbf{a}^T(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{a}}\right).$$

Adjustované p-hodnoty p_k sú definované nasledovne

- Bonferroniho $\widetilde{p}_k = \min\{hp_k, 1\}$,
- Šidákove $\widetilde{p}_k = 1 - (1-p_k)^h$,

Asymptotické testy o stredných hodnotách

Mnohonásobné porovnávania v R

Mnohonásobné porovnávania v R
Na Tukeyho HSD metódu použijeme funkciu `TukeyHSD(aov(),ordered=FALSE)`, kde argument `ordered` ponechá pôvodné poradie hypotéz H_{0k}. Výstupom je tabuľka obsahujúca odhady rozdielov stredných hodnôt $\overline{y}_{i.} - \overline{y}_{j.}$, dolné a horné hranice Waldových simultánnych $100 \times (1-\alpha)$% empirických IS Tukeyho typu a adjustované p-hodnoty $\widetilde{p}_k$. Na jednokrokové a viackrokové metódy (výpočet adjustovaných p-hodnôt) použijeme funkciu `pairwise.t.test(y,x,p.adjust="metoda",pool.sd=TRUE)`, kde argument `pool.sd=TRUE` predstavuje použitie $\widehat{\sigma}_e^2$ a argument `p.adjust="metoda"` špecifikuje metódu nasledovne

1. Bonferroniho `p.adjust="bonferroni"`.

Funkcia `lm()` má prednastavené kontrasty párových porovnaní s prvou populáciou, $\alpha_j - \alpha_1$, kde $J > 1$, kedy použijeme vstupné argumenty `y` a `x`. Pokiaľ by sme chceli testovať nulovosť jednotlivých α_j, použijeme vstupné argumenty `y-mean(y)` a `x-1` (argument `x-1` znamená model bez interceptu μ).

Asymptotické testy o stredných hodnotách

Metódy mnohonásobného porovnávania v R

Example (Metódy mnohonásobného porovnávania)

Majme koncentráciu stroncia Sr (mg/ml) v piatich vodných celkoch. Otestujte rovnosť stredných hodnôt ANOVA F-testom pomocou funkcií (1) `aov()` (2) `oneway.test()` a (3) `lm()`. Ak je H_0 zamietnutá na $\alpha = 0.05$, potom vypočítajte adjustované p-hodnoty a Waldove simultánne 95% empirické IS Fisherovho typu pre všetky párové porovnania rozdielov stredných hodnôt Bonferroniho metódou.

Asymptotické testy o stredných hodnotách

Metódy mnohonásobného porovnávania v R

```
# parove porovnavania
mp.Bonf <- pairwise.t.test(ConcStr,VodCelk,
           p.adjust="bonferroni",pool.sd=TRUE)
```

Asymptotické testy o stredných hodnotách

Jednofaktorový ANOVA model s fixnými efektami pri rôznych rozptyloch

Nech $Y_{ji}(\mu_j, \sigma_j^2)$, kde existuje aspoň jedna dvojica $i \neq j$ taká, že $\sigma_i^2 \neq \sigma_j^2$ a zároveň σ_j^2 sú neznáme. Potom F_W štatistika nemá F rozdelenie s $J-1$ a $n-J$ stupňami voľnosti a musí byť modifikovaná nasledovne

$$F_W = \frac{\sum_{j=1}^{J} \widehat{w}_j \left(\overline{Y}_{j\cdot} - \overline{Y}_{\cdot\cdot}^{(w)}\right)^2}{J-1+\frac{J-2}{J+1}\sum_{j=1}^{J}\frac{\left(1-\widehat{h}_j\right)^2}{n_j-1}} \overset{\mathcal{D}}{\approx} F_{J-1,df_w},$$

$\widehat{w}_j = n_j/s_j^2$, $\widehat{h}_j = \frac{\widehat{w}_j}{\sum_{i=1}^{J}\widehat{w}_i}$, $j=1,2,\ldots,J$ a $\widehat{\mu} = \overline{Y}_{\cdot\cdot}^{(w)} = \sum_{j=1}^{J}\widehat{h}_j\overline{Y}_{j\cdot}$. Počet stupňov voľnosti

$$df_{w_1} = \frac{J^2-1}{3\sum_{j=1}^{J}\frac{\left(1-\widehat{h}_j\right)^2}{n_j-1}},$$

čo zaokrúhlime na najbližšie nižšie celé číslo, t.j. $df_w = \lfloor df_{w_1} \rfloor$.

F_W sa nazýva **Fisherova testovacia štatistika** (alebo presnejšie **Welchova ANOVA F-štatistika**) a test **viacvýberový F-test s Welchovou aproximáciou stupňov voľnosti o rovnosti stredných hodnôt** $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_J$ (alebo **Welchov ANOVA F-test**). Realizáciou F_W je F_{obs} a p-hodnota = $\Pr(F_W \geq F_{\mathrm{obs}}|H_0)$. Na porovnanie ANOVA modelu pri rôznych rozptyloch s ANOVA modelom pri rovnakých rozptyloch – s^2 definujeme ako vážený priemer výberových rozptylov s_j^2, $j=1,2,\ldots,J$, teda

$$s^2 = \frac{\sum_{j=1}^{J}(n_j-1)s_j^2}{\sum_{j=1}^{J}(n_j-1)} = \frac{\sum_{j=1}^{J}(n_j-1)s_j^2}{n-J}.$$

Potom $\mathbf{Y}_j \sim N_{n_j}(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\Sigma}_j)$, kde $\boldsymbol{\Sigma}_j = \sigma_j^2\mathbf{I}_{n_j\times n_j}$, vektor chýb $\boldsymbol{\varepsilon}_j \sim N_{n_j}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}_j)$, vektor parametrov $\widehat{\boldsymbol{\beta}} \sim N_{J+1}(\boldsymbol{\beta}, (\mathbf{X}^T\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{X})^{-1})$, kde $\boldsymbol{\Sigma} = \mathrm{diag}(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_J^2)$ a maximálne vierohodný odhad $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ vypočítame pomocou **zovšeobecnenej metódy najmenších štvorcov**, t.j. $\widehat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}^T\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{Y}$.

Waldov $100\times(1-\alpha)\%$ **empirický IS pre <u>nejakú</u> lineárnu kombináciu** $\sum_{j=1}^{J}a_j\mu_j$ (nazývaný aj **empirický IS Fisherovho typu**) ako

$$\left(\sum_{j=1}^{J}a_j\overline{y}_{j\cdot} - t_{df_w}(\alpha/2)\sqrt{\sum_{j=1}^{J}\frac{a_j^2s_j^2}{n_j}}, \sum_{j=1}^{J}a_j\overline{y}_{j\cdot} + t_{df_w}(\alpha/2)\sqrt{\sum_{j=1}^{J}\frac{a_j^2s_j^2}{n_j}}\right).$$

Waldove simultánne $100\times(1-\alpha)\%$ **empirické intervaly spoľahlivosti Scheffeho typu** definujeme ako

$$\left(\mathbf{a}^T\widehat{\boldsymbol{\mu}} - \sqrt{(J-1)F_{J-1,df_w}(\alpha)}\sqrt{\mathbf{a}^T(\mathbf{X}^T\mathbf{S}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{a}}\right.,$$
$$\left.\mathbf{a}^T\widehat{\boldsymbol{\mu}} + \sqrt{(J-1)F_{J-1,df_w}(\alpha)}\sqrt{\mathbf{a}^T(\mathbf{X}^T\mathbf{S}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{a}}\right),$$

kde $\widehat{\boldsymbol{\Sigma}} = \mathbf{S} = \mathrm{diag}(s_1^2, s_2^2, \ldots, s_J^2)$.

Waldove simultánne $100\times(1-\alpha)\%$ **empirické intervaly spoľahlivosti Tukeyho typu** definujeme ako

$$\left(\mathbf{a}^T\widehat{\boldsymbol{\mu}} - q_{J,df_w}(\alpha)\sqrt{\frac{1}{2}\mathbf{a}^T(\mathbf{X}^T\mathbf{S}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{a}}, \mathbf{a}^T\widehat{\boldsymbol{\mu}} + q_{J,df_w}(\alpha)\sqrt{\frac{1}{2}\mathbf{a}^T(\mathbf{X}^T\mathbf{S}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{a}}\right).$$

Waldove simultánne $100\times(1-\alpha)\%$ **empirické intervaly spoľahlivosti Fisherovho typu** definované nasledovne

$$\left(\mathbf{a}^T\widehat{\boldsymbol{\mu}} - t_{df_w}(\alpha_k)\sqrt{\mathbf{a}^T(\mathbf{X}^T\mathbf{S}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{a}}, \mathbf{a}^T\widehat{\boldsymbol{\mu}} + t_{df_w}(\alpha_k)\sqrt{\mathbf{a}^T(\mathbf{X}^T\mathbf{S}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{a}}\right).$$

Asymptotické testy o stredných hodnotách

ANOVA model v R

Funkciu `oneway.test()` je možné použiť aj v prípade, že rozptyly nie sú rovnaké, ak nastavíme argument `var.equal=FALSE`.

Mnohonásobné porovnávania v R

Na jednokrokové a viackrokové metódy (výpočet adjustovaných p-hodnôt) použijeme podobne ako predtým funkciu `pairwise.t.test(y,x,p.adjust="metoda")`, avšak argument `pool.sd=FALSE`.

Example (Tukeyho HSD metóda)

Naprogramujte v R Tukeyho HSD metódu za predpokladu nerovnosti rozptylov.

Asymptotické testy o stredných hodnotách

Test pomerom vierohodnosti o rovnosti stredných hodnôt

Nech $Y_j \sim N(\mu_j, \sigma^2)$, kde $j = 1, 2, \ldots, J$ a σ^2 je neznáma. Logaritmus funkcie vierohodnosti má tvar

$$l(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_J) = -\frac{n}{2}\ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{j=1}^{J}\sum_{i=1}^{n_j}(y_{ji} - \mu_j)^2,$$

kde $n = \sum_{j=1}^{J} n_j$. MLE $\boldsymbol{\theta}$ je rovný $\widehat{\boldsymbol{\theta}} = (\widehat{\mu}_1, \widehat{\mu}_2, \ldots, \widehat{\mu}_J, \widetilde{\sigma}^2)^T$, kde

$$\widehat{\mu}_j = \overline{y}_j, \widetilde{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{J}\sum_{i=1}^{n_j}(y_{ji} - \overline{y}_j)^2,$$

t.j. $\Theta_1 = \{\boldsymbol{\theta} : \mu_i \neq \mu_j; i < j, i = 1, 2, \ldots, J-1; j = 2, 3, \ldots, J\}$ pre aspoň jedno i a j. Za platnosti H_0 je $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_0 = (\widehat{\mu}, \widehat{\mu}, \ldots, \widehat{\mu}, \widetilde{\sigma}_0^2)^T$ platí

$$\overline{x} = \widehat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{J}\sum_{i=1}^{n_j} y_{ji}, \widetilde{\sigma}_0^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{J}\sum_{i=1}^{n_j}(y_{ji} - \widehat{\mu})^2.$$

Asymptotické testy o stredných hodnotách

Test pomerom vierohodnosti o rovnosti stredných hodnôt

Tiež platí $\Theta_0 = \{\boldsymbol{\theta} : \mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_J = \mu\}$. Potom -1 krát prirodzený logaritmus pomeru vierohodnosti bude rovný

$$-\ln(\lambda(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_J)) = \frac{n}{2}\ln\left(\frac{\widetilde{\sigma}_0^2}{\widetilde{\sigma}^2}\right)$$

Vieme, že **testovacia štatistika pomerom vierohodnosti** $U_{LR} = -2\ln\left(\lambda\left(\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \ldots, \mathbf{Y}_J\right)\right) \overset{\mathcal{D}}{\sim} \chi^2_{J-1}$, kde H_0 bude zamietnutá pre veľké hodnoty podielu $\frac{\widetilde{\sigma}_0^2}{\widetilde{\sigma}^2}$. Dá sa ukázať, že $-\ln(\lambda(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_J))$ je rastúcou funkciou F_{obs}. Úpravou podielu $\widetilde{\sigma}_0^2/\widetilde{\sigma}^2$ dostaneme

$$\begin{aligned} -\ln(\lambda(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_J)) &= \frac{n}{2}\ln\left(\frac{\sum_{j=1}^{J}\sum_{i=1}^{n_j}(y_{ji} \pm \overline{y}_j - \widehat{\mu})^2}{\sum_{j=1}^{J}\sum_{i=1}^{n_j}(y_{ji} - \overline{y}_j)^2}\right) \\ &= \frac{n}{2}\ln\left(1 + \frac{J-1}{n-J}F_{\text{obs}}\right). \end{aligned}$$

Potom môžeme U_{LR} prepísať

$$u_{LR} = n\ln\left(1 + \frac{J-1}{n-J}F_{\text{obs}}\right).$$

Asymptotické testy o stredných hodnotách

Test pomerom vierohodnosti o homogenite rozptylov

Hypotézy definujeme nasledovne $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \ldots = \sigma_J^2 = \sigma^2$ oproti $H_1 : \sigma_i^2 \neq \sigma_j^2 \neq \sigma^2$ pre aspoň jedno $i < j, i = 1, 2, \ldots, J-1; j = 2, 3, \ldots, J$.

Nech $Y_j \sim N(\mu_j, \sigma_j^2)$, kde $j = 1, 2, \ldots J$, $\boldsymbol{\theta} = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_J, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_J^2)^T$. Logaritmus funkcie vierohodnosti má tvar

$$l(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_J) = -\sum_{j=1}^{J}\frac{n_j}{2}\ln(2\pi\sigma_j^2) - \sum_{j=1}^{J}\frac{1}{2\sigma_j^2}\left(\sum_{i=1}^{n_j}(y_{ji} - \mu_j)^2\right).$$

MLE $\boldsymbol{\theta}$ je rovný $\widehat{\boldsymbol{\theta}} = (\widehat{\mu}_1, \widehat{\mu}_2, \ldots, \widehat{\mu}_J, \widehat{\sigma}_1^2, \widehat{\sigma}_2^2, \ldots, \widehat{\sigma}_J^2)^T$, kde

$$\widehat{\mu}_j = \overline{y}_j, \widehat{\sigma}_j^2 = \frac{1}{n_j}\sum_{i=1}^{n_j}(y_{ji} - \overline{y}_j)^2,$$

t.j. $\Theta_1 = \{\boldsymbol{\theta} : \sigma_i^2 \neq \sigma_j^2 \neq \sigma^2; i < j, i = 1, 2, \ldots, J-1; j = 2, 3, \ldots, J\}$ pre aspoň jedno i a j.

Asymptotické testy o stredných hodnotách

Test pomerom vierohodnosti o homogenite rozptylov

Za platnosti H_0 je $\boldsymbol{\theta}_0 = (\widehat{\mu}_1, \widehat{\mu}_2, \dots, \widehat{\mu}_J, \widetilde{\sigma}^2, \widetilde{\sigma}^2, \dots, \widetilde{\sigma}^2)^T$, kde

$$\widetilde{\sigma}^2 = \frac{\sum_{j=1}^J n_j \widehat{\sigma}_j^2}{\sum_{j=1}^J n_j},$$

t.j. $\Theta_0 = \{\boldsymbol{\theta} : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \dots = \sigma_J^2 = \sigma^2\}$. Potom -1 krát prirodzený logaritmus pomeru vierohodnosti bude potom rovný

$$\begin{aligned} -\ln(\lambda(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_J)) &= l(\widehat{\boldsymbol{\theta}}|\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_J) - l(\boldsymbol{\theta}_0|\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_J) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^J n_j \ln\left(\frac{\sum_{j=1}^J n_j \widehat{\sigma}_j^2}{\widehat{\sigma}_j^2 \sum_{j=1}^J n_j}\right) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^J n_j \ln\left(\frac{\widetilde{\sigma}^2}{\widehat{\sigma}_j^2}\right). \end{aligned}$$

Vieme, že **testovacia štatistika pomerom vierohodnosti** $U_{\mathrm{LR}} = -2\ln(\lambda(\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \dots, \mathbf{Y}_J)) \overset{\mathcal{D}}{\sim} \chi^2_{J-1}$. Realizáciou U_{LR} je u_{LR}.
Potom p-hodnota = $\Pr(U_{\mathrm{LR}} \geq u_{\mathrm{LR}}|H_0)$.

Asymptotické testy o stredných hodnotách

Bartlettova modifikácia testu pomerom vierohodnosti o homogenite rozptylov

Bartlett (1937) modifikoval testovaciu štatistiku pomerom vierohodnosti nasledovne

$$U_{\mathrm{B}} = \frac{U_{\mathrm{LR}}^{(\mathrm{alt})}}{C} \overset{\mathcal{D}}{\sim} \chi^2_{J-1},$$

kde

$$U_{\mathrm{LR}}^{(\mathrm{alt})} = \sum_{j=1}^J (n_j - 1)\ln\left(\frac{\widetilde{S}^2}{S_j^2}\right), \widetilde{s}^2 = \frac{\sum_{j=1}^J (n_j-1) S_j^2}{\sum_{j=1}^J (n_j-1)},$$

S_j^2 sú výberové rozptyly a

$$C = 1 + \frac{1}{3(J-1)}\left(\sum_{j=1}^J \frac{1}{n_j - 1} - \frac{1}{\sum_{j=1}^J (n_j-1)}\right).$$

U_{B} konverguje ku χ^2_{J-1} rozdeleniu rýchlejšie ako U_{LR}. Realizáciou U_{B} je u_{B}.
Potom p-hodnota = $\Pr(U_{\mathrm{B}} \geq u_{\mathrm{B}}|H_0)$.

Asymptotické testy o stredných hodnotách

Bartlettova modifikácia testu pomerom vierohodnosti o homogenite rozptylov v R

Argumenty (vstupy) funkcie `bartlett.test()`:

1. `x` – objekt `lm(y~x)` alebo len vektor pozorovaní `y`;
2. `g` – vektor príslušnosti do skup in `x`, ak (1) je vektor pozorovaní `y`, inak nie je potrebné tento argument uvádzať;
3. `formula` v podobe `y~x`, ak nie je uvedené (1) a (2);
4. `data` v podobe dátovej tabuľky, ak (1) až (3) používajú stĺpce z dátovej tabuľky.

Výstupy funkcie `bartlett.test()`:

1. `statistic` – Bartlettova štatistika $U_{\mathrm{LR}}^{(\mathrm{alt})}$;
2. `df` – stupňe voľnosti $J-1$;
3. `p.value` – p-hodnota.

Asymptotické testy o stredných hodnotách

Literatúra

KATINA, Stanislav, Miroslav KRÁLÍK a Adéla HUPKOVÁ. ***Aplikovaná štatistická inferencia I. Biologická antropológia očami matematickej štatistiky.*** 1. vyd. Brno: Masarykova univerzita, 2015. 320 s. ISBN 978-80-210-7752-2.