Normální forma fold bifurkace

zpracovala Hana Tužilová podle Y. Kuznetsov: Elements of Applied Bifurcation Theory

Lemma 1. *Systém*

$$x' = \alpha + x^2 + O(x^3) \tag{1}$$

je v okolí počátku lokálně topologicky ekvivalentní systému

$$x' = \alpha + x^2. \tag{2}$$

Důkaz. Při dokazování tohoto tvrzení využijeme toho, že pro skalární systémy existuje homeomorfismus zobrazující rovnovážné body jednoho systému na rovnovážné body druhého systému, který zobrazuje také trajektorie, které je spojují, na odpovídající trajektorie. Nejprve ukážeme, že systém (1) má stejný počet singulárních bodů jako systém (2). Uvažujme

$$y' = F(y, \alpha) = \alpha + y^2 + \psi(y, \alpha),$$

kde $\psi(y, \alpha) = O(y^3)$ je hladká funkce proměnných (y, α) v okolí bodu $(0, 0)$. Nechť

$$M = \left\{(y, \alpha); F(y, \alpha) = \alpha + y^2 + \psi(y, \alpha) = 0\right\}.$$

Křivka M zřejmě prochází počátkem, tj. $F(0, 0) = 0$ a $F'_\alpha(0, 0) = 1$. Z věty o implicitní funkci plyne, že pro dostatečně malé $|y|$ existuje hladká funkce g taková, že

$$M = \{(y, \alpha); \alpha = g(y)\}.$$

Navíc platí

$$\alpha = -y^2 - O(y^3).$$

Tedy pro libovolné dostatečně malé $\alpha < 0$ má systém (1) v okolí počátku dva rovnovážné body, $y_1(\alpha)$ a $y_2(\alpha)$, které leží blízko rovnovážným bodům $x_1(\alpha) = \sqrt{-\alpha}$ a $x_2(\alpha) = -\sqrt{-\alpha}$ systému (2).

Nyní zkonstruujeme homeomorfismus vystupující v definici topologické ekvivalence. Pro každé malé $|\alpha|$ definujeme zobrazení závislé na parametru vztahem

$$h_\alpha(x) = \begin{cases} x & \text{pro } \alpha \geq 0 \\ a(\alpha) + b(\alpha)x & \text{pro } \alpha < 0, \end{cases}$$

kde koeficienty $a(\alpha)$ a $b(\alpha)$ jsou pro každé α určeny jednoznačně podmínkou

$$h_\alpha\left(x_j(\alpha)\right) = y_j(\alpha), \qquad j = 1, 2.$$

Tedy

$$a(\alpha) = \frac{y_1(\alpha) + y_2(\alpha)}{2} \qquad \text{a} \qquad b(\alpha) = \frac{y_1(\alpha) - y_2(\alpha)}{2\sqrt{-\alpha}}.$$

$h_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je homeomorfismus, který v okolí počátku zobrazuje trajektorie systému (2) na trajektorie systému (1) a zachovává jejich orientaci. To je však definice topologické ekvivalence systémů závislých na parametru. □

Ukážeme, že systém (2) je topologicky normální forma generického[1] (nejběžnějšího) jednodimenzionálního systému s fold bifurkací.
Uvažujme systém

$$x' = f(x, \alpha), \qquad x \in \mathbb{R},\ \alpha \in \mathbb{R}, \tag{3}$$

kde $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je hladká funkce. Nechť má tento systém pro $\alpha = 0$ rovnovážný bod $x = 0$ s vlastní hodnotou $\lambda = f_x(0, 0) = 0$.
Označíme-li $f_0(\alpha) = f(0, \alpha)$, $f_1(\alpha) = f_x(0, \alpha)$ a $f_2(\alpha) = \frac{f_{xx}(0,\alpha)}{2}$, pak můžeme tyto podmínky zapsat ekvivalentně jako

$$\begin{aligned} f_0(0) = f(0, 0) = 0 &\qquad \text{(podmínka pro rovnovážný bod)},\\ f_1(0) = f_x(0, 0) = 0 &\qquad \text{(podmínka pro fold bifurkaci)}. \end{aligned}$$

Funkci $f(x, \alpha)$ rozvineme do Taylorovy řady vzhledem k proměnné x v bodě $x = 0$:

$$f(x, \alpha) = f_0(\alpha) + f_1(\alpha) \cdot x + f_2(\alpha) \cdot x^2 + O(x^3).$$

Budeme postupovat ve třech krocích:

- transformace proměnné x,
- transformace parametru α,
- s využitím předchozího lemmatu eliminujeme členy vyšších řádů.

Během odvozování budeme muset udělat pár dodatečných předpokladů, které rovněž určí, co je myšlené "generickým" jednodimenzionálním systémem s fold bifurkací.

Transformace souřadnic: Provedeme transformaci proměnné x danou vztahem

$$\xi = x + \delta, \tag{4}$$

kde $\delta = \delta(\alpha)$ je předem známá funkce, kterou určíme později. Inverzní transformace je

$$x = \xi - \delta. \tag{5}$$

Dosadíme (4) do rovnice (3) a dostaneme

$$\xi' = f_0(\alpha) + f_1(\alpha) \cdot (\xi - \delta) + f_2(\alpha) \cdot (\xi - \delta)^2 + \cdots .$$

Tedy

$$\begin{aligned} \xi' = &\big(f_0(\alpha) - f_1(\alpha) \cdot \delta + f_2(\alpha) \cdot \delta^2 + O(\delta^3)\big) +\\ &+ \big(f_1(\alpha) - 2f_2(\alpha) \cdot \delta + O(\delta^2)\big)\, \xi +\\ &+ \left(f_2(\alpha) + O(\delta)\right) \xi^2 + O(\xi^3). \end{aligned}$$

[1] Genericitou se rozumí to, že nedochází k narušení obecnosti a vzniku jiného typu bifurkace. Genericitu zaručuje splnění podmínky nedegenerovanosti a transverzality uvedených ve větě **??**.

Lineární člen zřejmě zmizí, jestliže

$$F(\alpha,\delta) := f_1(\alpha) - 2f_2(\alpha)\cdot\delta + \psi(\alpha,\delta)\cdot\delta^2 \equiv 0$$

pro nějakou hladkou funkci ψ. Platí tedy

$$F(0,0)=0, \qquad \left.\frac{dF}{d\delta}\right|_{(0,0)} = -2f_2(0) \qquad \text{a} \qquad \left.\frac{dF}{d\alpha}\right|_{(0,0)} = f_{1\alpha}(0).$$

Předpokládejme nyní, že funkce

$$f_2(0) = \frac{1}{2}f_{xx}(0,0) \neq 0.$$

Pak z věty o implicitní funkci plyne lokálně pro všechna dostatečně malá $|\alpha|$ existence a jednoznačnost hladké funkce $\delta = \delta(\alpha)$ takové, že $\delta(0)=0$ a $F(\alpha,\delta(\alpha))\equiv 0$. Navíc platí

$$\delta(\alpha) = \frac{f_{1\alpha}(0)}{2f_2(0)}\cdot\alpha + O(\alpha^2).$$

Rozvedeme-li nyní funkce $f_i(\alpha)$, $i=0,...,2$, do Taylorovy řady a využijeme předpoklady, rovnice (3) přejde do tvaru

$$\xi' = \big(f_{0\alpha}(0)\cdot\alpha + O(\alpha^2)\big) + (f_2(0)+O(\alpha))\cdot\xi^2 + O(\xi^3). \tag{6}$$

Transformace parametru: V této části důkazu uvedeme nový parametr $\mu=\mu(\alpha)$ definovaný vztahem

$$\mu = f_{0\alpha}(0)\cdot\alpha + \alpha^2\cdot\phi(\alpha),$$

kde $\phi(\alpha)$ je hladká funkce. Pro takto definované μ platí

$$\mu(0)=0 \qquad \text{a} \qquad \mu_\alpha(0) = f_{0\alpha}(0) = f_\alpha(0,0).$$

Předpokládejme nyní navíc, že

$$f_\alpha(0,0)\neq 0.$$

Potom nám věta o implicitní funkci zaručuje lokální existenci a jednoznačnost hladké inverzní funkce $\alpha=\alpha(\mu)$ s $\alpha(0)=0$. Dostáváme tedy vzájemně jednoznačné přiřazení původního parametru α a nového parametru μ a (6) přejde do tvaru

$$\xi' = \mu + v(\mu)\cdot\xi^2 + O(\xi^3), \tag{7}$$

kde $v(\mu)$ je hladká funkce splňující $v(0)=f_2(0)\neq 0$.

Změna měřítka: Nechť

$$\eta = |v(\mu)|\xi \qquad \text{a} \qquad \beta = |v(\mu)|\mu.$$

Pak rovnice (7) přejde do tvaru

$$\eta' = \beta + a\eta^2 + O(\eta^3),$$

kde $a = \operatorname{sign} v(0)$.