

Spojité deterministické modely II – náměty pro kolokvium

1. Parciální diferenciální rovnice prvního řádu – model věkově strukturované populace

1. Uvažujme populaci jedinců, rozmnožujících se dělením. Předpokládejme, že každý jedinec, který se dožije věku a_0 se rozdělí.
 - a) Najděte věkově specifickou porodnost této populace.
 - b) Určete podmínky, za jakých může taková populace dlouhodobě přežívat.
 - c) Předpokládejme dále, že specifická úmrtnost je lineární funkcí věku, $\mu(a) = \mu_0 + \alpha a$. Určete průběh stabilizované struktury populace φ a určete čas, za jaký se velikost populace zdvojnásobí.
2. Odložená plodnost
Uvažujme populaci, v níž ženy začínají být plodné ve věku a_m , jejich plodnost končí ve věku a_M a maximální plodnosti b_{\max} dosahují ve věku a_F ; přitom samozřejmě platí $a_m < a_F < a_M$. Na intervalech (a_m, a_F) a (a_F, a_M) je věkově specifická porodnost lineární. Specifická úmrtnost je od věku a_m do věku a_M konstantní a rovna hodnotě μ_0 . Určete závislost růstového koeficientu na hodnotě a_F .
3. „Břímě polygamie“
Představme si hypotetickou populaci, v níž se každý muž žení ve čtyřiceti letech a bere si dvě manželky ve věku dvacet let. Předpokládejme dále, že úmrtnost mužů a žen je stejná a nezávisí na věku, porodnost žen je ve věku 20–40 let konstantní, jinak je nulová, poměr novorozených chlapčků a holčiček je 1. Může taková populace dlouhodobě přežívat? Určete věkovou strukturu φ v závislosti na hodnotách porodnosti a úmrtnosti.
4. Hodnoty funkcí l a b pro populaci hrabošů *Microtus agrestis* byly v laboratorních podmínkách určeny takto:

i	a_i [týdny]	$l(a_i)$	$b(a_i)$
1	0	1.0000	0.0000
2	8	0.8335	0.6504
3	16	0.7313	2.3939
4	24	0.5881	2.9727
5	32	0.4334	2.4662
6	40	0.2928	1.7043
7	48	0.1813	1.0815
8	56	0.1029	0.6683
9	64	0.0535	0.4286
10	72	0.0255	0.3000

Odhadněte růstový koeficient λ a určete stabilizovanou věkovou strukturu φ .

2. Parciální diferenciální rovnice druhého řádu – model populace v prostoru

1. Populace tvořená potomky jediného páru který se nacházel v počátku souřadného systému se v prostoru vyvíjí podle rovnice

$$\frac{\partial u(t, x, y)}{\partial t} = D\Delta u(t, x, y) + \alpha u(t, x, y),$$

$u(t, x, y)$ vyjadřuje populační hustotu v čase t na místě (x, y) , D , α jsou kladné konstanty.

- a) Vypočítejte $\iint_{\mathbb{R}^2} u(t, x, y) dx dy$.
- b) Definujme „čelo populační vlny“ jako kružnici o poloměru $R_1(t)$ takovém, že $u(t, x, y) = \varepsilon$ pro $x^2 + y^2 = R_1(t)^2$; přitom ε je předem dané malé číslo. Určete asymptotické vyjádření $R_1(t)$ jako funkce času v případě $\alpha \neq 0$ a $\alpha = 0$.
- c) Určete počet párů které se v čase t nacházejí vně kruhu o poloměru R_1 .
- d) Definujme „čelo populační vlny“ jinak: jako kružnici o poloměru $R_2(t)$ takovém, že vně kruhu o tomto poloměru je méně než m párů; přitom m je předem dané malé číslo. Určete asymptotické vyjádření $R_2(t)$ jako funkce času v případě $\alpha \neq 0$ a $\alpha = 0$.
- e) Porovnejte výsledky b), d).
2. J. G. Skellam v roce 1951 studoval šíření dubů od konce poslední doby ledové. Zformuloval předpoklady:
- (i) Duby se množí s růstovým koeficientem $\alpha > 0$ a do okolního prostředí se šíří difúzí s koeficientem $D > 0$.
- (ii) Dub žije a produkuje žaludy nejméně 60 let.
- (iii) I v panenském prostředí má jeden dub nejvýše 9 milionů plodných potomků.
- (iv) Střední kvadratická vzdálenost žaludů od stromu je nejvýše 50 metrů (střední kvadratická vzdálenost je odmocnina z průměru druhých mocnin vzdálenosti všech žaludů od mateřského stromu).
- a) Napište rovnici pro vývoj populační hustoty dubů na základě předpokladu (i).
- b) Za pomoci zbývajících předpokladů najděte horní odhady parametrů D a α . [Můžete předpokládat, že na počátku času byl jediný dub v počátku souřadnic místa.]
- c) Ověřte hypotézu, že duby se v Británii rozšířily difúzí podle uvedených předpokladů. Duby se od poslední doby ledové (za nejvýše 20 000 let) rozšířily na vzdálenost zhruba 1 000 km.
3. Uvažujte rovnici reakce-difúze

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u^2(1 - u),$$

definovanou pro $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$.

- a) Napište obyčejnou diferenciální rovnici pro řešení ve tvaru putující vlny $U = U(z)$, tj.

$$z = x - ct, \quad U(x - ct) = u(t, x), \quad \lim_{z \rightarrow -\infty} U(z) = 1, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} U(z) = 0.$$

- b) Najděte minimální rychlost c putující vlny.
- c) Pokuste se najít počáteční podmínku takovou, aby počáteční úloha pro uvažovanou rovnici byla explicitně řešitelná.

3. Parciální diferenciální rovnice druhého řádu – modely morfogeneze

1. Uvažujte rovnici reakce-difúze

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} = D \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + f(w)$$

pro neznámou funkci $w = w(\tau, \xi)$ definovanou pro $\tau > 0$, $0 < \xi < L$, s Dirichletovou okrajovou podmínkou

$$w(\tau, 0) = w(\tau, L) = u^*.$$

Přitom $u^* \in \mathbb{R}$ je takové číslo, že $f(u^*) = 0$.

a) Změňte měřítko časové proměnné τ i prostorové proměnné ξ tak, aby se rovnice transformovala na rovnici

$$\frac{\partial v}{\partial t} = D \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \gamma^2 f(v)$$

s Dirichletovou okrajovou podmínkou

$$v(t, 0) = v(t, \pi) = u^*.$$

b) Odvoďte linearizovanou rovnici

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \gamma^2 f'(u^*)u \quad (1)$$

s homogenní Dirichletovou okrajovou podmínkou

$$u(t, 0) = u(t, \pi) = 0. \quad (2)$$

c) Řešte úlohu (1), (2) s počáteční podmínkou

$$u(0, x) = u_0(x) = \sin x.$$

d) Nechť $f'(u^*) > 0$. Rozhodněte, zda zvětšení difuzivity D nebo velikosti L systém stabilizuje nebo destabilizuje.

2. Uvažujte vektorovou rovnici reakce-difúze

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = D \Delta \mathbf{u} + \alpha \mathbf{f}(\mathbf{u})$$

definovanou na oblasti $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a^2 < x^2 + y^2 < (a + \delta)^2\}$. (Tato rovnice může být považována za model růstu chapadel u nezmara.) Parametr δ považujte za tak malý, že rozdíl koncentrací \mathbf{u} při změně souřadnic x, y o vzdálenost nepřevyšující δ je zanedbatelný.

Najděte podmínky, za jakých má řešení rovnice n lokálních extrémů v oblasti Ω . (Takové řešení popisuje nezmara s n chapadly.)

3. Systém rovnic reakce-difúze aktivátoru a inhibitoru je v bezrozměrných veličinách tvaru

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{u^2}{v} - bu, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = d \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + u^2 - v,$$

kde b a d jsou kladné konstanty.

- Která z funkcí u, v představuje koncentraci aktivátoru a která koncentraci inhibitoru?
- Ukažte, že v prostorově homogenním případě (bez difúzních členů) má reakce aktivátoru a inhibitoru asymptoticky stabilní řešení.
- Najděte hodnoty parametrů b a d , pro které difúze systém destabilizuje, a načrtněte je v rovině (b, d) .

4. Obyčejné diferenciální rovnice se zpožděním

1. Jeden z modelů růstu populace velryby grónské (používaný International Whaling Commission) je zapsán rovnicí

$$\frac{dN(t)}{dt} = -\mu N(t) + \mu N(t-T) \left\{ 1 + q \left[1 - \left(\frac{N(t-T)}{K} \right)^z \right] \right\},$$

- kde μ — úmrtnost,
 q — maximální možný nárůst porodnosti oproti úmrtnosti,
 K — kapacita prostředí,
 T — doba k dosažení dospělosti,
 z — míra citlivosti populace na její velikost (tj. vnitrodruhovou konkurenci).

Všechny parametry jsou kladné.

Ukažte, že rovnice popisující vývoj malých odchylek od rovnovážné velikosti populace je

$$\frac{dn(t)}{dt} \approx -\mu n(t) - \mu(qz - 1)n(t-T)$$

a stabilita rovnovážného stavu je tedy určena reálnou částí řešení λ rovnice

$$\lambda = -\mu [1 + (qz - 1)e^{-\lambda T}].$$

Odvodte, že rovnovážný stav je stabilní, pokud

$$\mu T < \mu T_c = \frac{\pi - \cos^{-1} \frac{1}{b}}{\sqrt{b^2 - 1}}, \quad b = qz - 1 > 1$$

a stabilní pro libovolné T , pokud $b < 1$.

2. Růst populace lze modelovat následující rovnicí

$$\frac{dN(t)}{dt} = \alpha N(t-\tau)e^{-\beta N(t-\tau)} - \delta N(t),$$

- kde $N = N(t)$ — velikost populace v čase t ,
 α — maximální porodnost,
 δ — úmrtnost,
 $e^{-\beta N}$ — míra zmenšení porodnosti způsobená vnitrodruhovou konkurencí populace velikosti N .

- Najděte netriviální rovnovážnou velikost populace. Linearizujte rovnici v okolí rovnovážného stavu.
- Najděte hranice oblastí v rovině $(\delta\tau, \alpha\tau)$, ve kterých malé odchylky od rovnovážného stavu
 - (a) monotonně rostou,
 - (b) monotonně klesají,
 - (c) oscilují s klesající amplitudou,
 - (d) oscilují s rostoucí amplitudou.

(Uvedený model použil R. May v roce 1975 k modelování populace *Lucila cuprina* a ukázal dobrou shodu s daty naměřenými Nicholsonem roku 1957.)

3. Model krvetvorby.

Nechť $c(t)$ označuje koncentraci krvinek v krvi (rozměr veličiny c je, řekněme, *počet buněk/mm³*). Předpokládáme, že krvinky z cirkulující krve mizejí rychlostí úměrnou koncentraci s konstantou úměrnosti g (její rozměr je den^{-1}). Kostní dřev reaguje s asi šestidenním zpožděním T na deficit krvinek a produkuje je v závislosti na jejich koncentraci v krvi. Z těchto předpokladů plyne, že modelem krvetvorby je rovnice tvaru

$$\frac{dc(t)}{dt} = \lambda(c(t-T)) - gc(t).$$

Jeden z možných tvarů „produkční funkce“ λ je

$$\lambda(\xi) = \frac{a^m \xi}{a^m + \xi^m},$$

kde a, m jsou kladné konstanty.

Najděte bezrozměrný tvar modelu, jeho stacionární stavy, vyšetřete lineární stabilitu a najděte podmínky pro nestabilitu modelu.

4. Koncentrace kyslíčnicku uhličitého v krvi I.

Předpokládá se, že koncentrace kyslíčnicku uhličitého v krvi závisí na intenzitě dýchání a zpětně řídí intenzitu dýchání s jistým zpožděním $\tau > 0$. Jednoduchý model vývoje koncentrace v bezrozměrných veličinách lze zapsat ve tvaru

$$\frac{dx(t)}{dt} = 1 - ax(t)V(x(t-\tau)), \quad V(x) = \frac{x^m}{1+x^m},$$

kde a, m jsou kladné konstanty.

Ukažte, že existuje kritické zpoždění τ_c takové, že pro $\tau > \tau_c$ je stacionární řešení $x(t) \equiv x^*$ nestabilní. Vypočítejte x^* a odhadněte „periodu“ řešení v případě, že $\tau = \tau_c + \varepsilon$, přičemž $0 < \varepsilon \ll 1$. (Přesněji, najděte nejmenší $p > 0$ takové, že z relací $x(t_0) = x^*$, $x'(t_0) > 0$ plynou $x(t+p) \approx x^*$, $x(t_0+p) > 0$.)

5. Koncentrace kyslíčnicku uhličitého v krvi II.

Jiný model vývoje koncentrace $c = c(t)$ kyslíčnicku uhličitého v krvi je tvaru

$$\frac{dc(t)}{dt} = p - V(c(t-\tau))c(t) = p - \frac{bV_{\max}c(t)c(t-\tau)^m}{a^m + c(t-\tau)^m},$$

kde p, b, a, τ jsou kladné konstanty. Vyjádřete tento model v bezrozměrných veličinách, najděte stacionární řešení a vyšetřete jeho stabilitu v závislosti na parametrech.

Vybraná témata v JS 2016:

- 1.2** Jan Busínský, Kateřina Hůlková
- 1.3** Milena Topolovič, Eva Voreková
- 1.4** Lenka Rebendová, Markéta Vokálová, Kateřina Zpěváková
- 2.3** Michaela Bódiová, Adéla Krátká
- 3.1** Michal Baumgartner, Lenka Heldová, Barbora Šišková
- 3.2** Tereza Šestáková, Roberta Velichová
- 4.3** Markéta Prustoměrská, Tereza Tlamková