# MULTIVARIÁTNA ANALÝZA 2

## 1. Kvadratické formy

**Definícia 1.1.** *Nech $X_1, X_2, ..., X_n$ sú nezávislé, $N(0,1)$ rozdelené náhodné veličiny. Potom*

$$Y = X_1^2 + X_2^2 + ... + X_n^2$$

*má rozdelenie $\chi_n^2$ (centrálne chí kvadrát rozdelenie s $n$ stupňami voľnosti).*

**Veta 1.2.** *Nech $Y \sim \chi_n^2$. $Y$ má hustotu*

$$f_n(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} e^{-\frac{y}{2}} y^{\frac{n}{2}-1} & \text{pre } y > 0, \\ 0 & \text{inde.} \end{cases}$$

*Dôkaz.* Pozri [Anděl, str. 79].

*Poznámka.* $\chi_n^2$ rozdelenie je špeciálny prípad gama rozdelenia s parametrami $a, p$ $(a > 0, p > 0)$, ktoré má hustotu

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{a^p}{\Gamma(p)} e^{-ax} x^{p-1} & \text{pre } x > 0, \\ 0 & \text{inde.} \end{cases}$$

Označujeme ho $\Gamma(a,p)$. Platí, že $\chi_n^2$ je rozdelenie $\Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{n}{2}\right)$.
( $\Gamma(p) = \int_0^\infty e^{-t} t^{p-1} dt,\ p > 0.$)

**Definícia 1.3.** *Nech $X_1, X_2, ..., X_n$ sú nezávislé, $X_i \sim N(\mu_i, 1),\ i = 1, 2, ..., n$. Nech $\lambda = \sum_{i=1}^n \mu_i^2 \neq 0$. Náhodná veličina*

$$Y = X_1^2 + X_2^2 + ... + X_n^2$$

*má necentrálne $\chi^2$ rozdelenie s $n$ stupňami voľnosti a oeficientom necentrality $\lambda$. Označujeme ho $\chi_{n,\lambda}^2$.*

**Veta 1.4.** *Nech $X_1, X_2, ..., X_n$ sú nezávislé, $X_i \sim N(\mu_i, 1),\ i = 1, 2, ..., n$. Rozdelenie pravdepodobnosti náhodnej veličiny $Y = \sum_{i=1}^n X_i^2$, (teda $\chi_{n,\lambda}^2$, kde $\lambda = \sum_{i=1}^n \mu_i^2$) závisí len od $n$ a $\lambda$ (nezávisí od jednotlivých $\mu_1, ..., \mu_n$).*

*Dôkaz.* Pozri [Anděl, str. 80].

**Lema 1.5.** *Nech $X \sim N(\mu, 1)$. Náhodná veličina $X^2$ má hustotu*

$$f_{X^2}(t) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\frac{t+\mu^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}\sqrt{t}} \left(1 + \dfrac{\mu^2 t}{2!} + \dfrac{(\mu^2 t)^2}{4!} + \ldots\right) & t > 0, \\ 0 & t \leqq 0. \end{cases}$$

*Dôkaz.* $X^2$ má distribučnú funkciu pre $t > 0$

$$F_{X^2}(t) = P\{X^2 < t\} = P\{-\sqrt{t} < X < \sqrt{t}\} = \int_{-\sqrt{t}}^{\sqrt{t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2}} dx.$$

Preto je hľadaná hustota pre $t > 0$

$$f_{X^2}(t) = \frac{dF_{X^2}(t)}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\sqrt{t}-\mu)^2}{2}} + \frac{1}{2\sqrt{t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(-\sqrt{t}-\mu)^2}{2}} =$$

$$= \frac{e^{-\frac{t+\mu^2}{2}}}{2\sqrt{t}\sqrt{2\pi}} \left(e^{\mu\sqrt{t}} + e^{-\mu\sqrt{t}}\right) =$$

$$= \frac{e^{-\frac{t+\mu^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}\sqrt{t}} \left(1 + \frac{\mu^2 t}{2!} + \frac{(\mu^2 t)^2}{4!} + \ldots\right).$$

Samozrejme pre $t \leqq 0$ je $f_{X^2}(t) = 0$. $\square$

*Poznámka.* Použili sme vzorec

$$\frac{d}{dy} \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dx + \beta'(y) f[\beta(y), y] - \alpha'(y) f[\alpha(y), y].$$

Počítajme teraz charakteristickú funkciu náhodnej veličiny $\xi = X^2$.

$$\psi_\xi(t) = \mathcal{E}(e^{it\xi}) = \int_0^\infty e^{itx} f_\xi(x) dx =$$

$$= \int_0^\infty e^{itx} \frac{e^{-\frac{x+\mu^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}\sqrt{x}} \left(1 + \frac{\mu^2 x}{2!} + \frac{(\mu^2 x)^2}{4!} + \ldots\right) dx.$$

Postupne pre prvý člen

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{itx} e^{-\frac{x+\mu^2}{2}} x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{e^{-\frac{\mu^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-x(\frac{1}{2}-it)} x^{-\frac{1}{2}} dx =$$

(substitúcia $x(\frac{1}{2} - it) = w$)

$$= \frac{e^{-\frac{\mu^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-w} \frac{w^{\frac{1}{2}-1}}{\sqrt{\frac{1}{2} - it}} dw = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\frac{1}{2} - it}} e^{-\frac{\mu^2}{2}} \Gamma(\tfrac{1}{2}).$$

Pre druhý člen

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{itx}e^{-\frac{x+\mu^2}{2}}x^{-\frac{1}{2}}\frac{\mu^2 x}{2!}dx = \frac{\mu^2 e^{-\frac{\mu^2}{2}}}{2!\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{-x(\frac{1}{2}-it)}x^{\frac{3}{2}-1}dx =$$

(substitúcia $x(\frac{1}{2}-it)=w$)

$$= \frac{\mu^2 e^{-\frac{\mu^2}{2}}}{2!\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{-w}\frac{w^{\frac{3}{2}-1}}{\sqrt{(\frac{1}{2}-it)^3}}dw = \frac{\mu^2}{2!\sqrt{2\pi}\sqrt{(\frac{1}{2}-it)^3}}e^{-\frac{\mu^2}{2}}\Gamma(\tfrac{3}{2}).$$

Pre tretí člen

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{itx}e^{-\frac{x+\mu^2}{2}}x^{-\frac{1}{2}}\frac{(\mu^2)^2 x^2}{4!}dx = \frac{(\mu^2)^2 e^{-\frac{\mu^2}{2}}}{4!\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{-x(\frac{1}{2}-it)}x^{\frac{5}{2}-1}dx =$$

(substitúcia $x(\frac{1}{2}-it)=w$)

$$= \frac{(\mu^2)^2 e^{-\frac{\mu^2}{2}}}{4!\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{-w}\frac{w^{\frac{5}{2}-1}}{\sqrt{(\frac{1}{2}-it)^5}}dw = \frac{(\mu^2)^2}{4!\sqrt{2\pi}\sqrt{(\frac{1}{2}-it)^5}}e^{-\frac{\mu^2}{2}}\Gamma(\tfrac{5}{2}),$$

atď.

Dostávame

$$\psi_\xi(t) = \frac{e^{-\frac{\mu^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)(\mu^2)^0}{0!\left(\frac{1}{2}-it\right)^{\frac{1}{2}}} + \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)(\mu^2)^1}{2!\left(\frac{1}{2}-it\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)(\mu^2)^2}{4!\left(\frac{1}{2}-it\right)^{\frac{5}{2}}} + ...\right] =$$

$$= \frac{e^{-\frac{\mu^2}{2}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{1-2it}}\left[\frac{\sqrt{\pi}(\mu^2)^0}{0!\left(\frac{1}{2}-it\right)^0} + \frac{\sqrt{\pi}\frac{1}{2}(\mu^2)^1}{2.1!\left(\frac{1}{2}-it\right)^1} + \frac{\sqrt{\pi}\frac{3}{2}\frac{1}{2}(\mu^2)^2}{4.3.2!\left(\frac{1}{2}-it\right)^2} + \right.$$
$$\left. + \frac{\sqrt{\pi}\frac{5}{2}\frac{3}{2}\frac{1}{2}(\mu^2)^3}{6.5.4.3!\left(\frac{1}{2}-it\right)^3} + \frac{\sqrt{\pi}\frac{7}{2}\frac{5}{2}\frac{3}{2}\frac{1}{2}(\mu^2)^4}{8.7.6.5.4!\left(\frac{1}{2}-it\right)^4} + ...\right] =$$

$$= \frac{e^{-\frac{\mu^2}{2}}}{\sqrt{1-2it}}\left[\frac{(\mu^2)^0}{0!4^0\left(\frac{1}{2}-it\right)^0} + \frac{(\mu^2)^1}{1!4^1\left(\frac{1}{2}-it\right)^1} + \frac{(\mu^2)^2}{2!4^2\left(\frac{1}{2}-it\right)^2} + ...\right] =$$

$$= \frac{e^{-\frac{\mu^2}{2}}e^{\frac{\mu^2}{2(1-2it)}}}{\sqrt{1-2it}} = \frac{e^{\frac{it\mu^2}{1-2it}}}{\sqrt{1-2it}}. \tag{1.1}$$

Ak máme $X_1, X_2, ..., X_k$ nezávislé, $X_i \sim N(\mu_i, 1)$, tak charakteristická funkcia

$$\psi_{X_i^2}(t) = \frac{e^{\frac{it\mu_i^2}{1-2it}}}{\sqrt{1-2it}} \tag{1.2}$$

a charakteristická funkcia náhodnej veličiny $Y = X_1^2 + X_2^2 + ... + X_k^2$ je

$$\psi_Y(t) = \psi_{X_1^2}(t)\psi_{X_2^2}(t)...\psi_{X_k^2}(t) = \frac{e^{\frac{it}{1-2it}\sum_{j=1}^k \mu_j^2}}{(1-2it)^{\frac{k}{2}}} = \frac{e^{\frac{it\lambda}{1-2it}}}{(1-2it)^{\frac{k}{2}}}, \tag{1.3}$$

kde $\lambda = \sum_{j=1}^k \mu_j^2$.

**Veta 1.6.** *Nech náhodné premenné* $X_1, X_2, ..., X_n$ *sú nezávislé,* $X_i \sim N(\mu_i, 1),\ i = 1, 2, ..., n$. *Potom*

$$T = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i X_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} b_i X_i + c$$

*má* $\chi^2_{k,\delta}$ *rozdelenie práve vtedy ak*

*(i)* $\gamma_i = 0$ *alebo 1 pre* $i = 1, 2, ..., n$,
*(ii)* *ak* $\gamma_i = 0 \;\Rightarrow\; b_i = 0$ *pre* $i = 1, 2, ..., n$,
*(iii)* $c = \sum_{i=1}^{n} b_i^2$.

*Ak sú podmienky (i),(ii) a (iii) splnené, tak* $k = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i$ *a* $\delta = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i (b_i + \mu_i)^2$.

*Dôkaz.* Porovnáme charakteristické funkcie $\psi_T(.)$ a $\psi_Y(.)$, kde $Y \sim \chi^2_{k,\delta}$. Platí

$$\psi_T(t) = \mathcal{E}\left(e^{itT}\right) = \mathcal{E}\left( e^{it\left[\sum_{\substack{j=1\\ \gamma_j\neq 0}}^{n} \gamma_j X_j^2 + 2\sum_{\substack{j=1\\ \gamma_j\neq 0}}^{n} b_j X_j + c + 2\sum_{\substack{j=1\\ \gamma_j=0}}^{n} b_j X_j\right]} \right) =$$

$$= \mathcal{E}\left( e^{it\left[\sum_{\substack{j=1\\ \gamma_j\neq 0}}^{n} \gamma_j (X_j + \frac{b_j}{\gamma_j})^2 + c - \sum_{\substack{j=1\\ \gamma_j\neq 0}}^{n} \frac{b_j^2}{\gamma_j} + 2\sum_{\substack{j=1\\ \gamma_j=0}}^{n} b_j X_j\right]} \right) =$$

$$= e^{it\left[c - \sum_{\substack{j=1\\ \gamma_j\neq 0}}^{n} \frac{b_j^2}{\gamma_j}\right]} \mathcal{E}\left( e^{it2\sum_{\substack{j=1\\ \gamma_j=0}}^{n} b_j X_j} \right) \prod_{\substack{j=1\\ \gamma_j\neq 0}}^{n} \mathcal{E}\left( e^{it\gamma_j\left(X_j + \frac{b_j}{\gamma_j}\right)^2} \right) =$$

$$= e^{it\left[c - \sum_{\substack{j=1\\ \gamma_j\neq 0}}^{n} \frac{b_j^2}{\gamma_j}\right]} \prod_{\substack{j=1\\ \gamma_j=0}}^{n} \psi_{\xi_j}(2b_j t) \prod_{\substack{j=1\\ \gamma_j\neq 0}}^{n} \psi_{\xi_j^2}(\gamma_j t),$$

kde $\xi_i \sim N\left(\mu_i + \frac{b_i}{\gamma_i}, 1\right)$ ak $\gamma_i \neq 0$ a $\xi_i \sim N(\mu_i, 1)$ ak $\gamma_i = 0$. Podľa (1.2) je

$$(1.4) \quad \psi_T(t) = e^{it\left(c - \sum_{\substack{j=1\\ \gamma_j\neq 0}}^{n} \frac{b_j^2}{\gamma_j}\right)} e^{i2t\sum_{\substack{j=1\\ \gamma_j=0}}^{n} \mu_j b_j - 2t^2 \sum_{\substack{j=1\\ \gamma_j=0}}^{n} b_j^2} \times \frac{1}{\prod_{\substack{j=1\\ \gamma_j\neq 0}}^{n} \sqrt{1 - 2it\gamma_j}} e^{it\sum_{\substack{j=1\\ \gamma_j\neq 0}}^{n} \frac{\gamma_j\left(\mu_j + \frac{b_j}{\gamma_j}\right)^2}{1 - 2it\gamma_j}}.$$

Podľa (1.3) pre charakteristickú funkciu $Y \sim \chi^2_{k,\delta}$ platí

$$(1.5) \quad \psi_Y(t) = \frac{1}{\prod_{j=1}^{k} \sqrt{1 - 2it}} e^{\frac{it\delta}{1 - 2it}}.$$

Porovnaním (1.4) a (1.5) musí platiť pre každé $t \in \mathcal{R}$

$$\prod_{\substack{j=1\\ \gamma_j \neq 0}}^{n} \sqrt{1-2it\gamma_j} = \prod_{l=1}^{k} \sqrt{1-2it}$$

a súčasne

$$e^{it\left(c-\sum_{\substack{j=1\\ \gamma_j\neq 0}}^{n} \frac{b_j^2}{\gamma_j}\right)} e^{i2t\sum_{\substack{j=1\\ \gamma_j=0}}^{n} \mu_j b_j - 2t^2 \sum_{\substack{j=1\\ \gamma_j=0}}^{n} b_j^2} e^{it\sum_{\substack{j=1\\ \gamma_j\neq 0}}^{n} \frac{\gamma_j\left(\mu_j+\frac{b_j}{\gamma_j}\right)^2}{1-2it\gamma_j}} = e^{\frac{it\delta}{1-2it}},$$

z čoho je jasne vidieť, ako dokončíme dôkaz. $\square$

**Veta 1.7.** *Nech $\boldsymbol{\xi} \sim N_n(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{I})$, $\mathbf{A}_{n,n}$ je symetrická, $\mathbf{b} \in \mathcal{R}^n$ a $c \in \mathcal{R}$. Náhodná premenná $T = \boldsymbol{\xi}'\mathbf{A}\boldsymbol{\xi} + 2\mathbf{b}'\boldsymbol{\xi} + c$ má $\chi^2_{k,\delta}$ rozdelenie práve vtedy ak*

*(i)* $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$,
*(ii)* $\mathbf{b} \in \mu(\mathbf{A})$,
*(iii)* $c = \mathbf{b}'\mathbf{b}$.

*Ak sú podmienky (i),(ii) a (iii) splnené, tak $k = h(\mathbf{A})$, $\delta = (\mathbf{b}+\boldsymbol{\mu})'\mathbf{A}(\mathbf{b}+\boldsymbol{\mu})$.*

*Dôkaz.* Pre $\mathbf{A}$ existuje ortogonálna matica $\mathbf{P}$, že platí $\mathbf{P}'\mathbf{A}\mathbf{P} = \boldsymbol{\Lambda}$ (diagonálna matica), $\mathbf{P}'\mathbf{P} = \mathbf{P}\mathbf{P}' = \mathbf{I}$ (pozri napr. Rao, str. 62). Potom $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{P}'\boldsymbol{\xi} \sim N(\mathbf{P}'\boldsymbol{\mu}, \mathbf{I})$ a $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{P}\boldsymbol{\eta}$. Preto

$$T = \boldsymbol{\xi}'\mathbf{A}\boldsymbol{\xi} + 2\mathbf{b}'\boldsymbol{\xi} + c = \boldsymbol{\eta}'\mathbf{P}'\mathbf{A}\mathbf{P}\boldsymbol{\eta} + 2\mathbf{b}'\mathbf{P}\boldsymbol{\eta} + c = \boldsymbol{\eta}'\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\eta} + 2\mathbf{b}'\mathbf{P}\boldsymbol{\eta} + c.$$

Podľa vety 1.6 má $T$ rozdelenie $\chi^2_{k,\delta}$ práve vtedy ak

(i) $\{\boldsymbol{\Lambda}\}_{ii} = 0$ alebo 1 pre $i = 1, 2, ..., n$ $\Leftrightarrow \boldsymbol{\Lambda}^2 = \boldsymbol{\Lambda}$ $\Leftrightarrow \mathbf{P}'\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{P}'\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{P}'\mathbf{A}^2\mathbf{P} = \mathbf{P}'\mathbf{A}\mathbf{P}$ $\Leftrightarrow \mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$,
(ii) $\{\boldsymbol{\Lambda}\}_{ii} = 0 \Rightarrow \{\mathbf{P}'\mathbf{b}\}_i = 0$, čo je ekvivalentné s tým, že $\mathbf{P}'\mathbf{b} \in \mu(\boldsymbol{\Lambda}) \Leftrightarrow \mathbf{P}\mathbf{P}'\mathbf{b} = \mathbf{b} \in \mu(\mathbf{P}\mathbf{P}'\mathbf{A}\mathbf{P}) = \mu(\mathbf{A}\mathbf{P}) = \mu(\mathbf{A})$,
(iii) $c = (\mathbf{b}'\mathbf{P})\mathbf{P}'\mathbf{b} = \mathbf{b}'\mathbf{b}$.

Ak sú podmienky (i),(ii) a (iii) splnené, potom podľa vety 1.6 $k = \sum_{i=1}^{n}\{\boldsymbol{\Lambda}\}_{ii} = tr\boldsymbol{\Lambda} = h(\boldsymbol{\Lambda}) = h(\mathbf{P}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{P}') = h(\mathbf{A})$ a $\delta = \sum_{i=1}^{n}\{\boldsymbol{\Lambda}\}_{ii}(\{\mathbf{P}'\mathbf{b}\}_i + \{\mathbf{P}'\boldsymbol{\mu}\}_i)^2 = (\mathbf{b}'\mathbf{P} + \boldsymbol{\mu}'\mathbf{P})\boldsymbol{\Lambda}(\mathbf{P}'\mathbf{b} + \mathbf{P}'\boldsymbol{\mu}) = (\mathbf{b}+\boldsymbol{\mu})'\mathbf{P}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{P}'(\mathbf{b}+\boldsymbol{\mu}) = (\mathbf{b}+\boldsymbol{\mu})'\mathbf{A}(\mathbf{b}+\boldsymbol{\mu})$. $\square$

**Veta 1.8.** *Nech $\boldsymbol{\xi} \sim N_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, $\mathbf{A}_{n,n}$ je symetrická, $\mathbf{b} \in \mathcal{R}^n$ a $c \in \mathcal{R}$. Náhodná premenná $T = \boldsymbol{\xi}'\mathbf{A}\boldsymbol{\xi} + 2\mathbf{b}'\boldsymbol{\xi} + c$ má $\chi^2_{k,\delta}$ rozdelenie práve vtedy ak*

*(i)* $\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}$ $\Leftrightarrow$ $(\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A})^3 = (\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A})^2$,
*(ii)* $\boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{A}\boldsymbol{\mu} + \mathbf{b}) \in \mu(\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma})$,
*(iii)* $(\mathbf{A}\boldsymbol{\mu} + \mathbf{b})'\boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{A}\boldsymbol{\mu} + \mathbf{b}) = \boldsymbol{\mu}'\mathbf{A}\boldsymbol{\mu} + 2\mathbf{b}'\boldsymbol{\mu} + c$.

*Ak sú podmienky (i),(ii) a (iii) splnené, tak $k = tr(\mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma})$ a $\delta = (\mathbf{b}+\mathbf{A}\boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{b}+\mathbf{A}\boldsymbol{\mu})$.*

*Dôkaz.* Faktorizujeme maticu $\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{J}\mathbf{J}'$, kde $\mathbf{J}$ je typu $n \times h(\boldsymbol{\Sigma})$ (pozri Anděl, str. 64). Vieme, že $P\{\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\mu} + \mathbf{J}\boldsymbol{\eta}\} = 1$, kde $\boldsymbol{\eta} \sim N_{h(\boldsymbol{\Sigma})}(\mathbf{0}, \mathbf{I})$ (Anděl, str. 76). Teda

$$T = \boldsymbol{\xi}'\mathbf{A}\boldsymbol{\xi} + 2\mathbf{b}'\boldsymbol{\xi} + c = (\boldsymbol{\mu} + \mathbf{J}\boldsymbol{\eta})'\mathbf{A}(\boldsymbol{\mu} + \mathbf{J}\boldsymbol{\eta}) + 2\mathbf{b}'(\boldsymbol{\mu} + \mathbf{J}\boldsymbol{\eta}) + c =$$

$$= \boldsymbol{\eta}'\mathbf{J}'\mathbf{A}\mathbf{J}\boldsymbol{\eta} + 2(\boldsymbol{\mu} + \mathbf{J}\boldsymbol{\eta})'\mathbf{J}\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\mu}\mathbf{A}\boldsymbol{\mu} + 2\mathbf{b}'\boldsymbol{\mu} + c.$$

Podľa vety 1.7 má $T$ rozdelenie $\chi^2_{k,\delta}$ práve vtedy ak

(1) $\mathbf{J}'\mathbf{A}\mathbf{J}\mathbf{J}'\mathbf{A}\mathbf{J} = \mathbf{J}'\mathbf{A}\mathbf{J}$,

(2) $\mathbf{J}'(\mathbf{A}\boldsymbol{\mu} + \mathbf{b}) \in \mu(\mathbf{J}'\mathbf{A}\mathbf{J})$,

(3) $(\mathbf{A}\boldsymbol{\mu} + \mathbf{b})'\mathbf{J}\mathbf{J}'(\mathbf{A}\boldsymbol{\mu} + \mathbf{b}) = \boldsymbol{\mu}'\mathbf{A}\boldsymbol{\mu} + 2\mathbf{b}'\boldsymbol{\mu} + c.$

Ďalej platí

$$\mathbf{J}'\mathbf{A}\mathbf{J}\mathbf{J}'\mathbf{A}\mathbf{J} = \mathbf{J}'\mathbf{A}\mathbf{J} \Rightarrow \mathbf{J}\mathbf{J}'\mathbf{A}\mathbf{J}\mathbf{J}'\mathbf{A}\mathbf{J}\mathbf{J}' = \mathbf{J}\mathbf{J}'\mathbf{A}\mathbf{J}\mathbf{J}',$$

čiže

$$\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma},$$

a tiež naopak

$$\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma} \;\Rightarrow\; \mathbf{J}\mathbf{J}'\mathbf{A}\mathbf{J}\mathbf{J}'\mathbf{A}\mathbf{J}\mathbf{J}' = \mathbf{J}\mathbf{J}'\mathbf{A}\mathbf{J}\mathbf{J}' \;\Rightarrow$$

$$(\mathbf{J}'\mathbf{J})^{-1}\mathbf{J}'.\mathbf{J}\mathbf{J}'\mathbf{A}\mathbf{J}\mathbf{J}'\mathbf{A}\mathbf{J}\mathbf{J}'.\mathbf{J}(\mathbf{J}'\mathbf{J})^{-1} = (\mathbf{J}'\mathbf{J})^{-1}\mathbf{J}'.\mathbf{J}\mathbf{J}'\mathbf{A}\mathbf{J}\mathbf{J}'.\mathbf{J}(\mathbf{J}'\mathbf{J})^{-1},$$

čiže

$$\mathbf{J}'\mathbf{A}\mathbf{J}\mathbf{J}'\mathbf{A}\mathbf{J} = \mathbf{J}'\mathbf{A}\mathbf{J},$$

čo dokazuje prvú časť (i).

Ekvivalencia

$$\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma} \;\Leftrightarrow\; (\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A})^3 = (\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A})^2$$

je jedným smerom ($\Rightarrow$) zrejmá. Ku opaku potrebujeme nasledovné tvrdenie

$$\exists\ \mathbf{D}_{n,n} :\ \boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}\mathbf{D}. \tag{1.6}$$

Tvrdenie (1.6) dokážeme takto:

$$h(\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}) = h(\mathbf{J}\mathbf{J}'\mathbf{A}\mathbf{J}\mathbf{J}') \geqq h((\mathbf{J}'\mathbf{J})^{-1}\mathbf{J}'.\mathbf{J}\mathbf{J}'\mathbf{A}\mathbf{J}\mathbf{J}'.\mathbf{J}(\mathbf{J}'\mathbf{J})^{-1}) = h(\mathbf{J}'\mathbf{A}\mathbf{J}).$$

Podľa Anděl, str. 62 je

$$h(\mathbf{J}'\mathbf{A}\mathbf{J}) = h(\mathbf{J}'\mathbf{A}\mathbf{J}\mathbf{J}'\mathbf{A}\mathbf{J}) \geqq h(\mathbf{J}\mathbf{J}'\mathbf{A}\mathbf{J}\mathbf{J}'\mathbf{A}\mathbf{J}) = h(\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}\mathbf{J}), \tag{1.7}$$

ale

$$h(\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}\mathbf{J}) = h(\mathbf{J}\mathbf{J}'\mathbf{A}\mathbf{J}\mathbf{J}'\mathbf{A}\mathbf{J}) \geqq h((\mathbf{J}'\mathbf{J})^{-1}\mathbf{J}'.\mathbf{J}\mathbf{J}'\mathbf{A}\mathbf{J}\mathbf{J}'\mathbf{A}\mathbf{J}) =$$

$$= h(\mathbf{J}'\mathbf{A}\mathbf{J}\mathbf{J}'\mathbf{A}\mathbf{J}) = h(\mathbf{J}'\mathbf{A}\mathbf{J}), \tag{1.8}$$

a preto z (1.7) a (1.8)

$$h(\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}) = h(\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}\mathbf{J}) \leqq h(\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}) \leqq h(\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}),$$

teda

$$h(\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}) = h(\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}).$$

Pretože zrejme $\mu(\mathbf{\Sigma A \Sigma A}) \subset \mu(\mathbf{\Sigma A \Sigma})$ a hodnosti matíc vytvárajúcich tieto podpriestory sa rovnajú, platí

$$\mu(\mathbf{\Sigma A \Sigma A}) = \mu(\mathbf{\Sigma A \Sigma})$$

a dostávame vzťah (1.6).

Z predpokladu $(\mathbf{\Sigma A})^3 = (\mathbf{\Sigma A})^2$ pomocou (1.6) dostávame

$$\mathbf{\Sigma A \Sigma A \Sigma A D} = \mathbf{\Sigma A \Sigma A D} \Rightarrow \mathbf{\Sigma A \Sigma A \Sigma} = \mathbf{\Sigma A \Sigma},$$

čím sme (i) úplne dokázali.

Poďme teraz dokázať (ii), čiže dokázať, že

$$\mathbf{J}'(\mathbf{A}\boldsymbol{\mu} + \mathbf{b}) \in \mu(\mathbf{J}'\mathbf{A}\mathbf{J}) \Leftrightarrow \mathbf{\Sigma}(\mathbf{A}\boldsymbol{\mu} + \mathbf{b}) \in \mu(\mathbf{\Sigma A \Sigma}).$$

Ak $\mathbf{J}'(\mathbf{A}\boldsymbol{\mu} + \mathbf{b}) \in \mu(\mathbf{J}'\mathbf{A}\mathbf{J})$, tak $\mathbf{J}\mathbf{J}'(\mathbf{A}\boldsymbol{\mu} + \mathbf{b}) \in \mu(\mathbf{J}\mathbf{J}'\mathbf{A}\mathbf{J}) = \mu(\mathbf{\Sigma A J}) =$
$= \mu(\mathbf{\Sigma A J J}'\mathbf{A \Sigma}) = \mu(\mathbf{\Sigma A \Sigma A \Sigma}) = \mu(\mathbf{\Sigma A \Sigma})$ (podľa (i)).

Naopak ak $\mathbf{\Sigma}(\mathbf{A}\boldsymbol{\mu} + \mathbf{b}) \in \mu(\mathbf{\Sigma A \Sigma})$, tak $(\mathbf{J}'\mathbf{J})^{-1}\mathbf{J}'.\mathbf{J}\mathbf{J}'(\mathbf{A}\boldsymbol{\mu} + \mathbf{b}) = \mathbf{J}'(\mathbf{A}\boldsymbol{\mu} + \mathbf{b}) \in \mu((\mathbf{J}'\mathbf{J})^{-1}\mathbf{J}'.\mathbf{J}\mathbf{J}'\mathbf{A}\mathbf{J}\mathbf{J}') = \mu(\mathbf{J}'\mathbf{A}\mathbf{J}\mathbf{J}') \subset \mu(\mathbf{J}'\mathbf{A}\mathbf{J})$, čím sme dokázali (ii). Samozrejme (iii) už máme dokázané (je ekvivalentné (1)). Dôkaz vety už dokončíme jednoducho. Podľa vety 1.7 je totiž $k = h(\mathbf{J}\mathbf{J}'\mathbf{A}) = tr(\mathbf{\Sigma A}) = tr(\mathbf{A \Sigma})$ a $\delta = ([\mathbf{J}'(\mathbf{A}\boldsymbol{\mu} + \mathbf{b})]'\mathbf{J}'\mathbf{A}\mathbf{J}[\mathbf{J}'(\mathbf{A}\boldsymbol{\mu} + \mathbf{b})]) = (\mathbf{A}\boldsymbol{\mu} + \mathbf{b})'\mathbf{\Sigma A \Sigma}(\mathbf{A}\boldsymbol{\mu} + \mathbf{b})$. $\square$

Uvedieme bez dôkazu vety o nezávislosti kvadratických foriem. Podrobnejšie pozri [Rao, Mitra, kapitola 9].

**Veta 1.9.** *Nech* $\mathbf{Y} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{\Sigma})$ a $Q_1 = \mathbf{Y}'\mathbf{A}\mathbf{Y}, Q_2 = \mathbf{Y}'\mathbf{B}\mathbf{Y}$ *dve kvadratické formy. Nutné a postačujúce podmienky nezávislosti* $Q_1$ *a* $Q_2$ *sú*

*(a)* $\mathbf{\Sigma A \Sigma B \Sigma} = \mathbf{0}, \mathbf{\Sigma A \Sigma B}\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}, \mathbf{\Sigma B \Sigma A}\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$ a $\boldsymbol{\mu}'\mathbf{A \Sigma B}\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$, *ak* $\mathbf{A}$ *a* $\mathbf{B}$ *sú symetrické, nemusia byť pozitívne semidefinitné, pričom* $\mathbf{\Sigma}$ *nemusí byť regulárna.*

*(b)* $\mathbf{A \Sigma B \Sigma} = \mathbf{0}, \mathbf{A \Sigma B}\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$, *ak* $\mathbf{A}$ *je pozitívne semidefinitná.*

*(c)* $\mathbf{A \Sigma B} = \mathbf{0}$, *ak* $\mathbf{A}$ *aj* $\mathbf{B}$ *sú pozitívne semidefinitné.*

*(d)* $\mathbf{A \Sigma B} = \mathbf{0}$, *ak* $\mathbf{\Sigma}$ *je regulárna,* $\mathbf{A}$ *a* $\mathbf{B}$ *sú symetrické, nemusia byť pozitívne semidefinitné.*

**Veta 1.10.** *Nech* $\mathbf{Y} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{\Sigma})$ a $Q_1 = \mathbf{Y}'\mathbf{A}\mathbf{Y} + 2\mathbf{a}'\mathbf{Y} + \alpha,\ Q_2 = \mathbf{Y}'\mathbf{B}\mathbf{Y} + 2\mathbf{b}'\mathbf{Y} + \beta$ *dve lineárne-kvadratické formy. Nutné a postačujúce podmienky nezávislosti* $Q_1$ *a* $Q_2$ *sú*

*(a)* $\mathbf{\Sigma A \Sigma B \Sigma} = \mathbf{0}, \mathbf{\Sigma A \Sigma b} = \mathbf{0}, \mathbf{\Sigma B \Sigma a} = \mathbf{0}$ a $\mathbf{a}'\mathbf{\Sigma b} = 0$, *ak* $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$, *pričom* $\mathbf{\Sigma}$ *nemusí byť regulárna.*

*(b)* $\mathbf{A \Sigma B} = \mathbf{0}, \mathbf{B \Sigma a} = \mathbf{0}, \mathbf{A \Sigma b} = \mathbf{0}$ a $\mathbf{a}'\mathbf{\Sigma b} = 0$, *ak* $\mathbf{\Sigma}$ *je regulárna, pričom* $\boldsymbol{\mu}$ *môže byť aj nenulový vektor.*

## 2. Wishartovo rozdelenie

### 2.1. Úvodné poznámky a definícia

Majme $\mathbf{U}_i \sim N_p(\boldsymbol{\mu}_i, \mathbf{\Sigma}),\ i = 1, 2, ..., k$, ktoré sú nezávislé, $\mathbf{\Sigma}$ je pozitívne definitná matica. Označme $\mathbf{U}_i = (U_{1i}, U_{2i}, ..., U_{pi})'$, $\mathbf{Y}_j = (U_{j1}, U_{j2}, ..., U_{jk})'$, $j =$

$1, 2, ..., p$ a

$$\begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} & \dots & U_{1k} \\ U_{21} & U_{22} & U_{23} & \dots & U_{2k} \\ \vdots & & & & \\ U_{p1} & U_{p2} & U_{p3} & \dots & U_{pk} \end{pmatrix} = \mathcal{U}'_{p,k}.$$

Teda

$$\mathcal{U}' = (\mathbf{U}_1 \vdots \mathbf{U}_1 \vdots \dots \vdots \mathbf{U}_k) = \begin{pmatrix} \mathbf{Y}'_1 \\ \mathbf{Y}'_2 \\ \vdots \\ \mathbf{Y}'_p \end{pmatrix}.$$

Ďalej označme

$$\mathbf{M}'_{p,k} = \begin{pmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \mu_{13} & \dots & \mu_{1k} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \mu_{23} & \dots & \mu_{2k} \\ \vdots & & & & \\ \mu_{p1} & \mu_{p2} & \mu_{p3} & \dots & \mu_{pk} \end{pmatrix} = (\boldsymbol{\mu}_1 \vdots \boldsymbol{\mu}_2 \vdots \dots \vdots \boldsymbol{\mu}_k).$$

Pre pevný vektor $\mathbf{l} \in \mathcal{R}^p$ sú náhodné veličiny

$$\mathbf{l}'\mathbf{U}_i \sim N(\mathbf{l}'\boldsymbol{\mu}_i, \mathbf{l}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{l} = \sigma_l^2), \quad i = 1, 2, ..., k$$

nezávislé (lebo $\mathbf{U}_i$ sú nezávislé). Náhodný vektor $\mathcal{U}\mathbf{l} = {}_{\mathbf{l}}\mathbf{Y}_{k,1}$ je lineárna kombinácia normálne rozdelených nezávislých náhodných vektorov, pričom

$$(2.1) \qquad {}_{\mathbf{l}}\mathbf{Y} \sim N_k(\mathbf{M}\mathbf{l}, \sigma_l^2 \mathbf{I}_{k,k}).$$

Ak $\mathbf{b} = (b_1, b_2, ..., b_k)'$ je vektor konštánt, tak

$$(2.2) \qquad \mathcal{U}'\mathbf{b} = b_1\mathbf{U}_1 + ... + b_k\mathbf{U}_k \sim N_p(\mathbf{M}'\mathbf{b}, \mathbf{b}'\mathbf{b}\boldsymbol{\Sigma}).$$

*Poznámka.* Nech

$$\mathbf{A}_{m,n} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \mathbf{B}_{r,s} = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1s} \\ b_{21} & \dots & b_{2s} \\ \vdots & & \\ b_{r1} & \dots & b_{rs} \end{pmatrix}.$$

Kroneckerov súčin matíc $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ je

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{11}\mathbf{B} & a_{12}\mathbf{B} & \dots & a_{1n}\mathbf{B} \\ a_{21}\mathbf{B} & a_{22}\mathbf{B} & \dots & a_{2n}\mathbf{B} \\ \vdots & & & \\ a_{m1}\mathbf{B} & a_{m2}\mathbf{B} & \dots & a_{mn}\mathbf{B} \end{pmatrix}_{mr,ns}.$$

Vlastnosti kroneckerovho súčinu matíc pozri napr. v [Rao].

Ak napíšeme "pod seba" stĺpce matice $\mathbf{K}$, povieme, že sme vykonali na matici operáciu *vec*. Teda

$$vec\mathcal{U}' = \mathbf{U}_{kp,1} = \begin{pmatrix} \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{U}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{U}_k \end{pmatrix}.$$

Ukážte, že

$$vec\mathcal{U}' = \mathbf{U} \sim N_{kp}(vec\mathbf{M}', \mathbf{I}_{k,k} \otimes \mathbf{\Sigma}_{p,p}) \tag{2.3}$$

a (2.2) sa dá zapísať ako

(2.4)

$$\mathcal{U}'\mathbf{b} = (\mathbf{b}' \otimes \mathbf{I}_{k,k})vec\mathcal{U}' \sim N_p((\mathbf{b}' \otimes \mathbf{I}_{p,p})vec\mathbf{M}', (\mathbf{b}' \otimes \mathbf{I}_{p,p})(\mathbf{I}_{p,p} \otimes \mathbf{\Sigma}_{p,p})(\mathbf{b} \otimes \mathbf{I}_{p,p})).$$

*Poznámka.* Nech $\mathbf{b}_1 \neq \mathbf{b}_2,\ \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \in \mathcal{R}^k$. Platí

$$cov(\mathcal{U}'\mathbf{b}_1, \mathcal{U}'\mathbf{b}_2) = (\mathbf{b}_1' \otimes \mathbf{I}_{p,p})(\mathbf{I} \otimes \mathbf{\Sigma})(\mathbf{b}_1 \otimes \mathbf{I}_{p,p}) = \mathbf{b}_1'\mathbf{b}_2 \otimes \mathbf{\Sigma} = \mathbf{b}_1'\mathbf{b}_2\mathbf{\Sigma}.$$

Ak $\mathbf{b}_1'\mathbf{b}_2 = 0$, t.j. ak $\mathbf{b}_1$ a $\mathbf{b}_2$ sú ortogonálne, tak $\mathcal{U}'\mathbf{b}_1$ a $\mathcal{U}'\mathbf{b}_2$ sú neskorelované, t.j. v tomto prípade nezávislé.

Podľa predchádzajúcej poznámky ľahko dokážeme nasledujúcu lemu

**Lema 2.1.** *Ak $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, ..., \mathbf{b}_r,\ r \leqq k$ tvorí ortonormálny systém v $\mathcal{R}^k$, tak*

$$\mathbf{V}_1 = \mathcal{U}'\mathbf{b}_1, ..., \mathbf{V}_r = \mathcal{U}'\mathbf{b}_r$$

*sú navzájom nezávislé a majú normálne rozdelenie, pričom $\mathbf{V}_i \sim N_p(\mathbf{M}'\mathbf{b}_i, \mathbf{\Sigma})$.*

Ľahko dostaneme aj nasledujúci dôsledok

**Dôsledok 2.2.** *Ak $\mathbf{B}_{k,k}$ je ortogonálna matica ($\mathbf{B}\mathbf{B}' = \mathbf{B}'\mathbf{B} = \mathbf{I}$), tak $\mathbf{V}_i = (\mathbf{U}_1 \vdots ... \vdots \mathbf{U}_k)\{\mathbf{B}\}_{.i} = \mathcal{U}'\{\mathbf{B}\}_{.i} \sim N_p(\mathbf{M}'\{\mathbf{B}\}_{.i}, \mathbf{\Sigma}),\quad i = 1, 2, ..., k$ a $cov(\mathbf{V}_i, \mathbf{V}_j) = (\{\mathbf{B}\}_{.i}' \otimes \mathbf{I}_{p,p})(\mathbf{I} \otimes \mathbf{\Sigma})\{\mathbf{B}\}_{.j} \otimes \mathbf{I}) = \{\mathbf{B}\}_{.i}'\{\mathbf{B}\}_{.j} \otimes \mathbf{\Sigma} = \mathbf{0}$ pre $i \neq j$, teda $\mathbf{V}_1, ..., \mathbf{V}_k$ sú nezávislé.*

**Definícia 2.3.** *Združené rozdelenie prvkov matice $\mathbf{S}_{p,p} = \sum_{i=1}^k \mathbf{U}_i\mathbf{U}_i' = \mathcal{U}'\mathcal{U}$ sa nazýva Wishartovo rozdelenie s $k$ stupňami voľnosti a značí $W_p(k, \mathbf{\Sigma}, \mathbf{M})$. Ak $\mathbf{M} = \mathbf{0}$, jedná sa o centrálne rozdelenie, označujeme ho $W_p(k, \mathbf{\Sigma})$.*

*Poznámka.*

(i) $\{\mathbf{S}\}_{ij} = \left\{\sum_{l=1}^k \mathbf{U}_l\mathbf{U}_l'\right\}_{ij} = \sum_{l=1}^k U_{il}U_{jl} = \mathbf{Y}_i'\mathbf{Y}_j = \{\mathcal{U}'\mathcal{U}\}_{ij}$, lebo

$$\mathbf{S}_{p,p} = \begin{pmatrix} \sum_{l=1}^k U_{1l}^2 & \sum_{l=1}^k U_{1l}U_{2l} & \dots & \sum_{l=1}^k U_{1l}U_{pl} \\ \sum_{l=1}^k U_{2l}U_{1l} & \sum_{l=1}^k U_{2l}^2 & \dots & \sum_{l=1}^k U_{2l}U_{pl} \\ \vdots & & & \\ \sum_{l=1}^k U_{pl}U_{1l} & \sum_{l=1}^k U_{pl}U_{2l} & \dots & \sum_{l=1}^k U_{pl}^2 \end{pmatrix}.$$

(ii) Pre $p = 1$ a $\mu_{11} = \mu_{12} = ... = \mu_{1k} = 0$ sú $\mathbf{U}_i = U_{1i} \sim N(0, \sigma^2),\ i = 1, 2, ..., k$ nezávislé, $\mathcal{U}'\mathcal{U} = \sum_{i=1}^k U_{1i}^2 \sim W_1(k, \sigma^2)$. Pretože $\frac{\mathbf{U}_{1i}}{\sigma} \sim N(0, 1)$, má $\sum_{i=1}^k \frac{U_{1i}^2}{\sigma^2} \sim \chi_k^2$ rozdelenie a $\mathcal{U}'\mathcal{U} \sim \sigma^2\chi_k^2$ rozdelenie.

(iii) Pre $k \geqq p$ existuje hustota $W_p(k, \mathbf{\Sigma}, \mathbf{M})$ rozdelenia, ináč nie. Dôkaz je naznačený v [Rao, str. 641].

**Lema 2.4.** *Nech* $\mathbf{S} \sim W_p(k, \mathbf{\Sigma})$ *a* $\mathbf{l} \in \mathcal{R}^p$ *je vektor konštánt. Potom* $\mathbf{l}'\mathbf{S}\mathbf{l} \sim \sigma_{\mathbf{l}}^2 \chi_k^2$ $(\sigma_{\mathbf{l}}^2 = \mathbf{l}'\mathbf{\Sigma}\mathbf{l})$.

*Dôkaz.* $\mathbf{S} = \sum_{i=1}^k \mathbf{U}_i \mathbf{U}_i'$, preto $\mathbf{l}'\mathbf{S}\mathbf{l} = \sum_{i=1}^k \mathbf{l}'\mathbf{U}_i\mathbf{U}_i'\mathbf{l} = \sum_{i=1}^k (\mathbf{l}'\mathbf{U}_i)^2 = {}_{\mathbf{l}}\mathbf{Y}'\, {}_{\mathbf{l}}\mathbf{Y} \sim \sigma_{\mathbf{l}}^2 \chi_{k,\delta}^2$, kde $\delta = \mathbf{l}'\mathbf{M}'\mathbf{M}\mathbf{l}$, lebo ${}_{\mathbf{l}}\mathbf{Y} \sim N_k(\mathbf{M}\mathbf{l}, \sigma_{\mathbf{l}}^2 \mathbf{I}_{k,k})$. Ak $\mathbf{M} = \mathbf{0}$, tak $\delta = 0$. $\square$

**Lema 2.5.** *Nech* $\mathbf{U}_i \sim N_p(\mathbf{0}, \mathbf{\Sigma}), \quad i = 1, 2, ..., k$ *sú nezávislé,* $\mathbf{A}_{k,k}$ *reálna symetrická matica.* $\mathcal{U}'\mathbf{A}\mathcal{U} \sim W_p(r, \mathbf{\Sigma})$ *práve vtedy ak* $\forall\, \mathbf{l} \in \mathcal{R}^p \;\; {}_{\mathbf{l}}\mathbf{Y}'\mathbf{A}\, {}_{\mathbf{l}}\mathbf{Y} \sim \sigma_{\mathbf{l}}^2 \chi_r^2$, $(\sigma_{\mathbf{l}}^2 = \mathbf{l}'\mathbf{\Sigma}\mathbf{l},\ {}_{\mathbf{l}}\mathbf{Y} = \mathcal{U}\mathbf{l})$. *V tomto prípade* $r = h(\mathbf{A}) = tr(\mathbf{A})$.

*Dôkaz.* Z lemy 2.4 vyplýva, že ak $\mathcal{U}'\mathbf{A}\mathcal{U} \sim W_p(r, \mathbf{\Sigma})$, tak $\forall\, \mathbf{l} \in \mathcal{R}^p \;\; {}_{\mathbf{l}}\mathbf{Y}'\mathbf{A}\, {}_{\mathbf{l}}\mathbf{Y} \sim \sigma_{\mathbf{l}}^2 \chi_r^2$. Samozrejme z (2.1) ${}_{\mathbf{l}}\mathbf{Y} \sim N_k(\mathbf{0}, \sigma_{\mathbf{l}}^2 \mathbf{I}_{k,k})$, čiže $\frac{{}_{\mathbf{l}}\mathbf{Y}}{\sigma_{\mathbf{l}}} \sim N_k(\mathbf{0}, \mathbf{I}_{k,k})$. Teda podľa vety 1.8 $\left(\frac{{}_{\mathbf{l}}\mathbf{Y}}{\sigma_{\mathbf{l}}}\right)' \mathbf{A} \frac{{}_{\mathbf{l}}\mathbf{Y}}{\sigma_{\mathbf{l}}} \sim \chi_r^2 \Leftrightarrow \mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$ a v tom prípade $r = h(\mathbf{A}) = tr(\mathbf{A})$.

Naopak ak $\forall\, \mathbf{l} \in \mathcal{R}^p \;\; {}_{\mathbf{l}}\mathbf{Y}'\mathbf{A}\, {}_{\mathbf{l}}\mathbf{Y} = \mathbf{l}'\mathcal{U}'\mathbf{A}\mathcal{U}\mathbf{l} \sim \sigma_{\mathbf{l}}^2 \chi_r^2$, čo je podľa vety 1.8 ekvivalentné tomu, že $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$, pričom v tom prípade $h(\mathbf{A}) = tr(\mathbf{A})$. $\mathbf{A}$ je reálna symetrická matica, idempotentná a $h(\mathbf{A}) = r$. Teda $\mathbf{A}$ je pozitívne semidefinitná a preto existuje ortonormálny systém vektorov $\mathbf{b}_1, ..., \mathbf{b}_k \in \mathcal{R}^k$, že $\mathbf{A} = \sum_{j=1}^r \lambda_j \mathbf{b}_j \mathbf{b}_j'$, $\mathbf{I} = \sum_{j=1}^k \mathbf{b}_j \mathbf{b}_j'$ (reálne čísla $\lambda_1 \geqq \lambda_2 \geqq ... \geqq \lambda_r > 0$ sú vlastné čisla matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{b}_1, ..., \mathbf{b}_r$ im prislúchajúce charakteristické vektory). Z rovnosti $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$ dostávame

$$\sum_{j=1}^r \lambda_j \mathbf{b}_j \mathbf{b}_j' \sum_{s=1}^r \lambda_s \mathbf{b}_s \mathbf{b}_s' = \sum_{t=1}^r \lambda_t \mathbf{b}_t \mathbf{b}_t',$$

čiže

$$\lambda_1^2 \mathbf{b}_1 \mathbf{b}_1' + \lambda_2^2 \mathbf{b}_2 \mathbf{b}_2' + ... \lambda_r^2 \mathbf{b}_r \mathbf{b}_r' = \lambda_1 \mathbf{b}_1 \mathbf{b}_1' + \lambda_2 \mathbf{b}_2 \mathbf{b}_2' + ... \lambda_r \mathbf{b}_r \mathbf{b}_r',$$

z čoho vyplýva, že $\lambda_i^2 = \lambda_i,\ i = 1, 2, ..., r$, čiže $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_r = 1$ (lebo $\lambda_i > 0$). Môžeme písať $\mathbf{A} = \sum_{j=1}^r \mathbf{b}_j \mathbf{b}_j'$ a tiež $\mathcal{U}'\mathbf{A}\mathcal{U} = \sum_{j=1}^r \mathcal{U}'\mathbf{b}_j \mathbf{b}_j' \mathcal{U} = \sum_{j=1}^r \mathbf{V}_j \mathbf{V}_j'$, pričom podľa lemy 2.1 $\mathbf{V}_i \sim N_p(\mathbf{0}, \mathbf{\Sigma})$ a $V_1, V_2, ..., V_r$ sú nezávislé. Z definície preto $\mathcal{U}'\mathbf{A}\mathcal{U} \sim W_p(r, \mathbf{\Sigma})$. $\square$

**Veta 2.6.** *Nech* $\mathbf{S} \sim W_p(k, \mathbf{\Sigma})$ *a* $\mathbf{B}_{p,q}$ *matica konštánt. Potom* $\mathbf{B}'\mathbf{S}\mathbf{B} \sim W_q(k, \mathbf{B}'\mathbf{\Sigma}\mathbf{B})$.

*Dôkaz.* $\mathbf{B}'\mathbf{S}\mathbf{B} = \mathbf{B}'\mathcal{U}'\mathcal{U}\mathbf{B}$, kde

$$\mathcal{U}\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{U}_1' \\ \mathbf{U}_2' \\ \vdots \\ \mathbf{U}_k' \end{pmatrix}_{k,p} \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{V}_1' \\ \mathbf{V}_2' \\ \vdots \\ \mathbf{V}_k' \end{pmatrix},$$

$\mathbf{U}_i \sim N_p(\mathbf{0}, \mathbf{\Sigma})$ sú nezávislé. Preto

$$\begin{pmatrix} \mathbf{V}_1' \\ \mathbf{V}_2' \\ \vdots \\ \mathbf{V}_k' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{U}_1'\mathbf{B} \\ \mathbf{U}_2'\mathbf{B} \\ \vdots \\ \mathbf{U}_k'\mathbf{B} \end{pmatrix}$$

má riadky nezávislé, $cov(\mathbf{B}'\mathbf{U}_i, \mathbf{B}'\mathbf{U}_j) = \mathbf{B}'cov(\mathbf{U}_i, \mathbf{U}_j)\mathbf{B} = \mathbf{0}$ a $\mathbf{B}'\mathbf{U}_i \sim N_q(\mathbf{0}, \mathbf{B}'\mathbf{\Sigma}\mathbf{B})$. Platí $\mathbf{B}'\mathbf{S}\mathbf{B} = \sum_{i=1}^k \mathbf{V}_i \mathbf{V}_i' \sim W_q(k, \mathbf{B}'\mathbf{\Sigma}\mathbf{B})$ (priamo z definície). $\square$

**Dôsledok 2.7.**
*(a) Diagonálne submatice matice* $\mathbf{S}$ *majú tiež Wishartovo rozdelenie, lebo ak*

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \mathbf{S}_{11} & \mathbf{S}_{12} \\ \mathbf{S}_{21} & \mathbf{S}_{22} \end{pmatrix},$$

*kde* $\mathbf{S}_{11}$ *je rozmeru* $l \times l$, *tak*

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I}_{l,l} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \mathbf{S} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{l,l} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{S}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

*(b) Ak* $\mathbf{S} \sim W_p(k, \mathbf{I})$ *a ak pre* $\mathbf{B}_{p,q}$ *platí* $\mathbf{B}'\mathbf{B} = \mathbf{I}$, *potom* $\mathbf{B}'\mathbf{S}\mathbf{B} \sim W_q(k, \mathbf{I})$.

**Veta 2.8.** *Nech* $\mathbf{S} \sim W_p(k, \mathbf{\Sigma})$ *a* $\mathbf{a} \in \mathcal{R}^p$ *je taký vektor konštánt, že* $\mathbf{a}'\mathbf{\Sigma}\mathbf{a} \neq 0$. *Potom* $\dfrac{\mathbf{a}'\mathbf{S}\mathbf{a}}{\mathbf{a}'\mathbf{\Sigma}\mathbf{a}} \sim \chi^2_k$.

*Dôkaz.* Podľa vety 2.6 platí, že $\mathbf{a}'\mathbf{S}\mathbf{a} \sim W_1(k, \mathbf{a}'\mathbf{\Sigma}\mathbf{a})$, čo znamená podľa poznámky (ii) pod definíciou 2.3, že $\dfrac{\mathbf{a}'\mathbf{S}\mathbf{a}}{\mathbf{a}'\mathbf{\Sigma}\mathbf{a}} \sim \chi^2_k$. $\square$

**Veta 2.9.** *Nech* $\mathbf{U}_1, ..., \mathbf{U}_n$ *je náhodný výber z* $N_p(\mathbf{0}, \mathbf{\Sigma})$ *(teda* $\mathcal{U}'\mathcal{U} \sim W_p(n, \mathbf{\Sigma})$*),* $\mathbf{C}_{n,n}$ *je symetrická matica. Platí*

$$\mathcal{U}'\mathbf{C}\mathcal{U} \sim W_p(r, \mathbf{\Sigma}) \Leftrightarrow \mathbf{C}^2 = \mathbf{C}.$$

*V takomto prípade* $r = tr(\mathbf{C})$.

*Dôkaz.* Podľa lemy 2.5 je $\mathcal{U}'\mathbf{C}\mathcal{U} \sim W_p(r, \mathbf{\Sigma}) \Leftrightarrow \forall\, \mathbf{l} \in \mathcal{R}^p \ \ {}_{\mathbf{l}}\mathbf{Y}'\mathbf{C}\ {}_{\mathbf{l}}\mathbf{Y} \sim \sigma^2_{\mathbf{l}}\chi^2_r$, $(\sigma^2_{\mathbf{l}} = \mathbf{l}'\mathbf{\Sigma}\mathbf{l},\ {}_{\mathbf{l}}\mathbf{Y} = \mathcal{U}\mathbf{l})$. V tomto prípade $r = h(\mathbf{C}) = tr(\mathbf{C})$. Pretože podľa (2.1) je $\dfrac{{}_{\mathbf{l}}\mathbf{Y}}{\mathbf{l}'\mathbf{\Sigma}\mathbf{l}} \sim N_p(\mathbf{0}, \mathbf{I})$, je podľa vety 1.7 ${}_{\mathbf{l}}\mathbf{Y}'\mathbf{C}\ {}_{\mathbf{l}}\mathbf{Y} \sim \sigma^2_{\mathbf{l}}\chi^2_r \Leftrightarrow \dfrac{{}_{\mathbf{l}}\mathbf{Y}'}{\mathbf{l}'\mathbf{\Sigma}\mathbf{l}}\mathbf{C}\dfrac{{}_{\mathbf{l}}\mathbf{Y}}{\mathbf{l}'\mathbf{\Sigma}\mathbf{l}} \sim \chi^2_r \Leftrightarrow \mathbf{C}^2 = \mathbf{C}$. V tomto prípade $r = h(\mathbf{C})$. $\square$

**Lema 2.10.** *Nech* $\mathbf{S}_1 \sim W_p(n_1, \mathbf{\Sigma})$, $\mathbf{S}_2 \sim W_p(n_2, \mathbf{\Sigma})$. $\mathbf{S}_1$ *a* $\mathbf{S}_2$ *sú nezávislé. Potom* $\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 \sim W_p(n_1 + n_2, \mathbf{\Sigma})$.

*Dôkaz.* $\mathbf{S}_1 = \mathcal{U}_1'\mathcal{U}_1$, $\mathbf{S}_2 = \mathcal{U}_2'\mathcal{U}_2$, kde $\mathcal{U}_1' = (\mathbf{U}_1 \vdots ... \vdots \mathbf{U}_{n_1})$, $\mathcal{U}_2' = (\mathbf{U}_{n_1+1} \vdots ... \vdots \mathbf{U}_{n_1+n_2})$ a $\mathbf{U}_i \sim N_p(\mathbf{0}, \mathbf{\Sigma}), i = 1, 2, ..., n_1 + n_2$ sú nezávislé. Preto ak označíme $\mathcal{U}' = (\mathcal{U}_1' \vdots \mathcal{U}_2')_{p, n_1+n_2}$, tak $\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 = (\mathcal{U}_1'\mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2'\mathcal{U}_2) = \mathcal{U}'\mathcal{U} \sim W_p(n_1 + n_2, \mathbf{\Sigma})$. $\square$

**Veta 2.11.** *Nech* $\mathbf{C}_{n,n} = \mathbf{C}'$ *je matica konštánt,* $\mathbf{U}_i \sim N_p(\mathbf{0}, \mathbf{\Sigma}), i = 1, 2, ..., n$ *nezávislé. Platí, že* $\mathcal{U}_{p,n}'\mathbf{C}\mathcal{U} \sim \sum_{i=1}^n \lambda_i W_p^{(i)}(1, \mathbf{\Sigma})$, *kde* $\lambda_1, ..., \lambda_n$ *sú vlastné čísla matice* $\mathbf{C}$ *a* $W_p^{(1)}(1, \mathbf{\Sigma}), ..., W_p^{(n)}(1, \mathbf{\Sigma})$ *sú nezávislé.*

*Dôkaz.* Môžeme písať $\mathbf{C} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{p}_i \mathbf{p}_i'$, $\mathbf{I} = \sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i \mathbf{p}_i'$, pričom $\lambda_1 \geqq ... \geqq \lambda_n$ sú vlastné čísla matice $\mathbf{C}$ a $\mathbf{p}_1, ... \mathbf{p}_n$ ortonormálne vektory. Teda $\mathcal{U}'\mathbf{C}\mathcal{U} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathcal{U}'\mathbf{p}_i\mathbf{p}_i'\mathcal{U} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{V}_i\mathbf{V}_i'$, kde $\mathbf{V}_i \sim N_p(\mathbf{0}, \mathbf{\Sigma})$ a sú nezávislé (lema 2.1). Z lemy 2.9 vieme, že $\mathcal{U}'\mathbf{p}_i\mathbf{p}_i'\mathcal{U} = \mathbf{V}_i\mathbf{V}_i' \sim W_p^{(i)}(1, \mathbf{\Sigma})$. $\square$

**Lema 2.12.** *Pre matice príslušných rozmerov platí*

$$vec\mathbf{ABC} = (\mathbf{C}' \otimes \mathbf{A})vec\mathbf{B}, \tag{2.5}$$

$$tr\mathbf{AB} = (vec\mathbf{B}')'vec\mathbf{A}.$$

*Dôkaz.* Lemu dokážte ako cvičenie.

**Veta 2.13.** *Nech* $\mathbf{U}_i \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, $i = 1, 2, ..., n$, $\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, ..., \mathbf{U}_n$ *sú nezávislé,* $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2$ *symetrické a idempotentné.* $\mathcal{U}'\mathbf{C}_1\mathcal{U}$ *a* $\mathcal{U}'\mathbf{C}_2\mathcal{U}$ *sú nezávislé, ak* $\mathbf{C}_1\mathbf{C}_2 = \mathbf{0}$.

*Dôkaz.* Ak $\mathcal{U}'\mathbf{C}_1$ a $\mathcal{U}'\mathbf{C}_2$ sú nezávislé, tak sú nezávislé aj $\mathcal{U}'\mathbf{C}_1\mathcal{U}$ a $\mathcal{U}'\mathbf{C}_2\mathcal{U}$. $\mathcal{U}'\mathbf{C}_1$ a $\mathcal{U}'\mathbf{C}_2$ sú nezávislé práve vtedy ak sú nezávislé $\mathbf{I}\mathcal{U}'\mathbf{C}_1$ a $\mathbf{I}\mathcal{U}'\mathbf{C}_2$ a to je práve vtedy ak sú nezávislé $vec(\mathbf{I}\mathcal{U}'\mathbf{C}_1)$ a $vec(\mathbf{I}\mathcal{U}'\mathbf{C}_2)$, čiže podľa lemy 2.12 ak sú nezávislé vektory $(\mathbf{C}_1' \otimes \mathbf{I})vec\mathcal{U}'$ a $(\mathbf{C}_2' \otimes \mathbf{I})vec\mathcal{U}'$, ktoré sú podľa (2.3) normálne rozdelené, pričom $vec\mathcal{U}' \sim N_{np}(\mathbf{0}, \mathbf{I}_{n,n} \otimes \boldsymbol{\Sigma}_{p,p})$. Pretože $(\mathbf{C}_1' \otimes \mathbf{I})(\mathbf{I} \otimes \boldsymbol{\Sigma})(\mathbf{C}_2 \otimes \mathbf{I}) = (\mathbf{C}_1'\mathbf{C}_2 \otimes \boldsymbol{\Sigma}) = \mathbf{0}$, sú $\mathcal{U}'\mathbf{C}_1$ a $\mathcal{U}'\mathbf{C}_2$ nezávislé. Teraz už ľahko dokončíme dôkaz. $\square$

**Veta 2.14.** *Nech* $\mathbf{S} \sim W_p(k, \boldsymbol{\Sigma})$, $\boldsymbol{\Sigma}$ *je regulárna,* $k \geqq p - 1$. *Platí:*

(a) $\dfrac{\{\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\}_{pp}}{\{\mathbf{S}^{-1}\}_{pp}} \sim \chi^2_{k-(p-1)}$ *a nezávisí od* $\{\mathbf{S}\}_{i,j}$ $i = 1, 2, ..., p-1,\ j = 1, 2, ..., p-1.$

(b) *Pre každý* $\mathbf{l} \in \mathcal{R}^p$ *je* $\dfrac{\mathbf{l}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{l}}{\mathbf{l}'\mathbf{S}^{-1}\mathbf{l}} \sim \chi^2_{k-(p-1)}$.

*Dôkaz.* $\mathbf{S} = \sum_{i=1}^k \mathbf{U}_i\mathbf{U}_i'$, $\mathbf{U}_i \sim N_p(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma})$, $\mathbf{U}_i$ nezávislé,

$$\mathbf{U}_i = \begin{pmatrix} U_{1i} \\ U_{2i} \\ \vdots \\ U_{p-1,i} \\ U_{pi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{U}_i^* \\ U_{pi} \end{pmatrix}, \ i = 1, 2, ..., k, \quad \mathbf{U}_i^* \sim N_{p-1}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}_{11}), \text{ kde}$$

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{11} & \boldsymbol{\Sigma}_{12} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{21} & \boldsymbol{\Sigma}_{22} \end{pmatrix}, \ h(\boldsymbol{\Sigma}_{11}) = p - 1. \text{ Ďalej označme}$$

$$\mathbf{U}_{k,1} = \begin{pmatrix} U_{p1} \\ U_{p2} \\ \vdots \\ U_{pk} \end{pmatrix} \sim N_k(\mathbf{0}, \{\boldsymbol{\Sigma}\}_{pp}\mathbf{I}_{k,k}), \ \mathbf{u}_i = \begin{pmatrix} u_{1i} \\ u_{2i} \\ \vdots \\ u_{p-1,i} \end{pmatrix}, \ i = 1, 2, ..., k,$$

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^k \mathbf{U}_i^*(\mathbf{U}_i^*)' & \sum_{i=1}^k \mathbf{U}_i^* U_{pi} \\ \sum_{i=1}^k U_{pi}(\mathbf{U}_i^*)' & \sum_{i=1}^k U_{pi}^2 \end{pmatrix}.$$

Podľa lemy 4, Anděl, str. 121, $P\{\sum_{i=1}^k \mathbf{U}_i^*(\mathbf{U}_i^*)'$ je pozitívne definitná$\} = 1$, ak $k \geqq p - 1$, teda $P\{h(\sum_{i=1}^k \mathbf{U}_i^*(\mathbf{U}_i^*)') = p - 1\} = 1$. Pre maticu

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{21} & \dots & u_{p-1,1} \\ u_{12} & u_{22} & \dots & u_{p-1,2} \\ \vdots & & & \\ u_{1k} & u_{2k} & \dots & u_{p-1,k} \end{pmatrix}$$

platí

$$\sum_{i=1}^k \mathbf{u}_i\mathbf{u}_i' = \mathbf{X}'\mathbf{X}, \quad \sum_{i=1}^k U_{pi}\mathbf{u}_i' = \mathbf{U}'\mathbf{X} \ \text{ a } \ \sum_{i=1}^k \mathbf{u}_i U_{pi} = \mathbf{X}'\mathbf{U}.$$

(a)

$$\{\mathbf{S}^{-1}\}_{pp} = \{\sum_{i=1}^{k} U_{pi}^2 - \sum_{i=1}^{k} (\mathbf{U}_i^*)' U_{pi} (\sum_{i=1}^{k} \mathbf{U}_i^* (\mathbf{U}_i^*)')^{-1} \sum_{i=1}^{k} U_{pi} \mathbf{U}_i^* \}^{-1} =$$

$$= \{\mathbf{U}'\mathbf{U} - \sum_{i=1}^{k} (\mathbf{U}_i^*)' U_{pi} (\sum_{i=1}^{k} \mathbf{U}_i^* (\mathbf{U}_i^*)')^{-1} \sum_{i=1}^{k} U_{pi} \mathbf{U}_i^* \}^{-1}$$

(pozri Anděl, str. 66). Podmienené rozdelenie $U_{p1}/\mathbf{U}_1^* = \mathbf{u}_1, ..., \mathbf{U}_k^* = \mathbf{u}_k$ je to isté ako $U_{p1}/\mathbf{U}_1^* = \mathbf{u}_1$ (lebo $U_{p1}$ nezávisí od $\mathbf{U}_2^*, ..., \mathbf{U}_k^*$) a teda $U_{p1}/\mathbf{U}_1^* = \mathbf{u}_1 \sim N(0 + \mathbf{\Sigma}_{21}\mathbf{\Sigma}_{11}^{-1}\mathbf{u}_1, \mathbf{\Sigma}_{22} - \mathbf{\Sigma}_{21}\mathbf{\Sigma}_{11}^{-1}\mathbf{\Sigma}_{12})$, čo je $N(\mathbf{\Sigma}_{21}\mathbf{\Sigma}_{11}^{-1}\mathbf{u}_1, \{\mathbf{\Sigma}^{-1}\}_{pp}^{-1})$. Analogicky $U_{pi}/\mathbf{U}_i^* = \mathbf{u}_i \sim N(\mathbf{\Sigma}_{21}\mathbf{\Sigma}_{11}^{-1}\mathbf{u}_i, \{\mathbf{\Sigma}^{-1}\}_{pp}^{-1})$, $i = 2, 3, ..., k$ (pričom $U_{pi}, U_{pj}$ pre $i \neq j$ sú nezávislé). Preto

$$\boldsymbol{\xi} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_k \end{pmatrix} = \mathbf{U}/\mathbf{U}_1^* = \mathbf{u}_1, ..., \mathbf{U}_k^* = \mathbf{u}_k \ \sim N(\begin{pmatrix} \mathbf{\Sigma}_{21}\mathbf{\Sigma}_{11}^{-1}\mathbf{u}_1 \\ \mathbf{\Sigma}_{21}\mathbf{\Sigma}_{11}^{-1}\mathbf{u}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{\Sigma}_{21}\mathbf{\Sigma}_{11}^{-1}\mathbf{u}_k \end{pmatrix}, \{\mathbf{\Sigma}^{-1}\}_{pp}^{-1}\mathbf{I}),$$

pričom podstatné je aj to, že

$$(2.6) \qquad \begin{pmatrix} \mathbf{\Sigma}_{21}\mathbf{\Sigma}_{11}^{-1}\mathbf{u}_1 \\ \mathbf{\Sigma}_{21}\mathbf{\Sigma}_{11}^{-1}\mathbf{u}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{\Sigma}_{21}\mathbf{\Sigma}_{11}^{-1}\mathbf{u}_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1'\mathbf{\Sigma}_{11}^{-1}\mathbf{\Sigma}_{12} \\ \mathbf{u}_2'\mathbf{\Sigma}_{11}^{-1}\mathbf{\Sigma}_{12} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_k'\mathbf{\Sigma}_{11}^{-1}\mathbf{\Sigma}_{12} \end{pmatrix} = \mathbf{X}\boldsymbol{\gamma}.$$

Dostávame, že rozdelenie $\dfrac{1}{\{\mathbf{S}^{-1}\}_{pp}}/\mathbf{U}_1^* = \mathbf{u}_1, ..., \mathbf{U}_k^* = \mathbf{u}_k$ je rozdelenie

$$\boldsymbol{\xi}'\boldsymbol{\xi} - \sum_{i=1}^{k} \mathbf{u}_i'\xi_i (\sum_{j=1}^{k} \mathbf{u}_j\mathbf{u}_j')^{-1} \sum_{i=1}^{k} \mathbf{u}_i\xi_i = \boldsymbol{\xi}'(\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}')\boldsymbol{\xi}.$$

Podľa vety 1.8 má kvadratická forma $\boldsymbol{\xi}'(\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}')\boldsymbol{\xi}$ rozdelenie $\{\mathbf{\Sigma}^{-1}\}_{pp}^{-1}\chi^2_{k-(p-1)}$, ktoré vďaka (2.6) nezávisí od podmienky (teda od $\{\mathbf{S}\}_{ij}$, $i, j \in \{1, 2, ..., p-1\}$) a je preto aj nepodmieneným rozdelením. Dostávame, že

$$\frac{\{\mathbf{\Sigma}^{-1}\}_{pp}}{\{\mathbf{S}^{-1}\}_{pp}} \sim \chi^2_{k-(p-1)}.$$

Pretože dôkaz sme úplne analogicky mohli urobiť pre ${}_r\mathbf{U} = (U_{r1}, U_{r2}, ..., U_{rk})'$, $r \in \{1, 2, ..., p\}$ platí,

$$\frac{\{\mathbf{\Sigma}^{-1}\}_{rr}}{\{\mathbf{S}^{-1}\}_{rr}} \sim \chi^2_{k-(p-1)}, \quad r \in \{1, 2, ..., p\}.$$

(b) Vezmime ortogonálnu maticu $\mathbf{B}$, ktorá má prvý riadok $\dfrac{1}{\parallel \mathbf{l} \parallel}\mathbf{l}'$. Podľa vety 2.6 platí $\mathbf{BSB}' \sim W_p(k, \mathbf{B\Sigma B}')$. Pretože

$$(\mathbf{BSB}')^{-1} = \mathbf{BS}^{-1}\mathbf{B}', \quad (\mathbf{B\Sigma B}')^{-1} = \mathbf{B\Sigma}^{-1}\mathbf{B},$$

dostávame z (a)

$$\frac{\{\mathbf{B}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{B}\}_{11}}{\{\mathbf{B}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{B}\}_{11}} = \frac{\frac{1}{\|\mathbf{l}\|}\mathbf{l}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{l}}{\frac{1}{\|\mathbf{l}\|}\mathbf{l}'\mathbf{S}^{-1}\mathbf{l}} \sim \chi^2_{k-(p-1)}$$

(ortogonálnou transformáciou sa príslušné hodnosti v dôkaze (a) nemenia). $\square$

K dôkazu vety 2.16 potrebujeme nasledujúce tvrdenie:

**Lema 2.15.** *Nech $X \sim \chi^2_m$ a $Y \sim \chi^2_n$ sú nezávislé. Potom $\frac{X}{X+Y} \sim B\left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right)$.*

*Dôkaz.* Pozri Rao, vzťah (3b.1.12), dokážte ako cvičenie.
(náčrt dôkazu: $U \sim \chi^2_m$, $V \sim \chi^2_n$, tak $f_U(u) = \frac{1}{2^{\frac{m}{2}}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} e^{-\frac{u}{2}} u^{\frac{m}{2}-1}$ pre $u > 0$, $f_V(u) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} e^{-\frac{v}{2}} v^{\frac{n}{2}-1}$ pre $v > 0$,

$$\mathbf{t}: \quad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \frac{u}{u+v} \\ u+v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\tau}: \quad \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} zy \\ z(1-y) \end{pmatrix}$$

$$D_{\boldsymbol{\tau}}(y,z) = \det\left(\begin{pmatrix} z & y \\ -z & 1-y \end{pmatrix}\right) = z$$

$f_{U,V}(u,v) = f_U(u) f_V(v)$, $f_{\mathbf{t}(U,V)}(y,z) = \left[2^{\frac{m}{2}}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\right]^{-1} e^{-\frac{zy}{2}} (zy)^{\frac{m}{2}-1} \times$ $\left[2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\right]^{-1} e^{\frac{-z+zy}{2}} [z(1-y)]^{\frac{n}{2}-1} z$

$$f(y) = \int_0^{-\infty} f(y,z)dz = \frac{1}{B\left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right)} y^{\frac{m}{2}-1}(1-y)^{\frac{n}{2}-1}$$

**Veta 2.16.** *Nech $\mathbf{S}_1 \sim W_p(k_1, \boldsymbol{\Sigma})$, $\mathbf{S}_2 \sim W_p(k_2, \boldsymbol{\Sigma})$ sú nezávislé, $\boldsymbol{\Sigma}$ je regulárna. Ak $k_1 \geqq p-1$, tak $\frac{|\mathbf{S}_1|}{|\mathbf{S}_1 + S_2|}$ má rozdelenie ako súčin $\eta_1 \ldots \eta_p$ nezávislých náhodných veličín, $\eta_i \sim B\left(\frac{k_1-p+i}{2}, \frac{k_2}{2}\right)$ a nezávisí od $\{\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2\}_{ij}$, $i,j \in \{1,2,...,p-1\}$.*

*Dôkaz.* Označme $\mathbf{S}_1 = \sum_{i=1}^{k_1} \mathbf{U}_i \mathbf{U}_i'$, $\mathbf{S}_2 = \sum_{i=k_1+1}^{k_1+k_2} \mathbf{U}_i \mathbf{U}_i'$ kde $\mathbf{U}_i \sim N_p(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma})$, $i = 1,2,...,k_1+k_2$ a nezávislé.

$$\mathbf{U}_i = \begin{pmatrix} U_{1i} \\ U_{2i} \\ \vdots \\ U_{p-1,i} \\ U_{pi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{U}_i^* \\ U_{pi} \end{pmatrix}, \ i = 1,2,...,k_1+k_2, \quad \mathbf{U}_i^* \sim N_{p-1}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}_{11}), \text{ kde}$$

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{11} & \boldsymbol{\Sigma}_{12} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{21} & \boldsymbol{\Sigma}_{22} \end{pmatrix}, \ h(\boldsymbol{\Sigma}_{11}) = p-1.$$

Ďalej označme

$$\mathbf{U}_{k_1+k_2,1} = \begin{pmatrix} U_{p1} \\ U_{p2} \\ \vdots \\ U_{p,k_1+k_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^{(1)}\mathbf{U}_{k_1,1} \\ {}^{(2)}\mathbf{U}_{k_2,1} \end{pmatrix} \sim N_{k_1+k_2}(\mathbf{0}, \{\boldsymbol{\Sigma}\}_{pp}\mathbf{I}),$$

$$\mathbf{u}_i = \begin{pmatrix} u_{1i} \\ u_{2i} \\ \vdots \\ u_{p-1,i} \end{pmatrix}, \ i = 1,2,...,k_1+k_2,$$

$$\mathbf{S}_1 = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{k_1} \mathbf{U}_i^*(\mathbf{U}_i^*)' & \sum_{i=1}^{k_1} \mathbf{U}_i^* U_{pi} \\ \sum_{i=1}^{k_1} U_{pi}(\mathbf{U}_i^*)' & \sum_{i=1}^{k_1} U_{pi}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{S}_{11} & \mathbf{S}_{12} \\ \mathbf{S}_{21} & \mathbf{S}_{22} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{k_1+k_2} \mathbf{U}_i^*(\mathbf{U}_i^*)' & \sum_{i=1}^{k_1+k_2} \mathbf{U}_i^* U_{pi} \\ \sum_{i=1}^{k_1+k_2} U_{pi}(\mathbf{U}_i^*)' & \sum_{i=1}^{k_1+k_2} U_{pi}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\mathbf{S}_1+\mathbf{S}_2)_{11} & (\mathbf{S}_1+\mathbf{S}_2)_{12} \\ (\mathbf{S}_1+\mathbf{S}_2)_{21} & (\mathbf{S}_1+\mathbf{S}_2)_{22} \end{pmatrix}.$$

Podľa lemy 4, Anděl, str. 121, $P\{\sum_{i=1}^{k_1} \mathbf{U}_i^*(\mathbf{U}_i^*)'$ je pozitívne definitná$\} = 1$, (pretože $k_1 \geqq p-1$), teda $P\{h(\sum_{i=1}^{k_1} \mathbf{U}_i^*(\mathbf{U}_i^*)') = p-1\} = 1$. (Samozrejme aj $P\{h(\sum_{i=1}^{k_1+k_2} \mathbf{U}_i^*(\mathbf{U}_i^*)') = p-1\} = 1$. Ďalej označme

$$\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{21} & \dots & u_{p-1,1} \\ u_{12} & u_{22} & \dots & u_{p-1,2} \\ \vdots & & & \\ u_{1k_1} & u_{2k_1} & \dots & u_{p-1,k_1} \end{pmatrix}, \mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} u_{1,k_1+1} & u_{2,k_1+1} & \dots & u_{p-1,k_1+1} \\ u_{1,k_1+2} & u_{2,k_1+2} & \dots & u_{p-1,k_1+2} \\ \vdots & & & \\ u_{1,k_1+k_2} & u_{2,k_1+k_2} & \dots & u_{p-1,k_1+k_2} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \end{pmatrix}.$$

Úplne analogicky ako vo vete 2.14 (a jej dôkaze) dostávame

$$\sum_{i=1}^{k_1} \mathbf{u}_i\mathbf{u}_i' = \mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1, \quad \sum_{i=1}^{k_1} U_{pi}\mathbf{u}_i' = {}^{(1)}\mathbf{U}'\mathbf{X}_1, \quad \sum_{i=1}^{k_1} \mathbf{u}_i U_{pi} = \mathbf{X}_1' \, {}^{(1)}\mathbf{U}$$

a

$$\sum_{i=k_1+1}^{k_1+k_2} \mathbf{u}_i\mathbf{u}_i' = \mathbf{X}_2'\mathbf{X}_2, \quad \sum_{i=k_1}^{k_1+k_2} U_{pi}\mathbf{u}_i' = {}^{(2)}\mathbf{U}'\mathbf{X}_2, \quad \sum_{i=k_1}^{k_1+k_2} \mathbf{u}_i U_{pi} = \mathbf{X}_2' \, {}^{(2)}\mathbf{U}.$$

Konečne

$$\{\mathbf{S}_1^{-1}\}_{pp} = \{ {}^{(1)}\mathbf{U}' \, {}^{(1)}\mathbf{U} - \sum_{i=1}^{k_1} (\mathbf{U}_i^*)' U_{pi} (\sum_{i=1}^{k_1} \mathbf{U}_i^*(\mathbf{U}_i^*)')^{-1} \sum_{i=1}^{k_1} U_{pi}\mathbf{U}_i^* \}^{-1},$$

$$\{(\mathbf{S}_1+\mathbf{S}_2)^{-1}\}_{pp} = \{( {}^{(1)}\mathbf{U}' \vdots \, {}^{(2)}\mathbf{U}') \begin{pmatrix} {}^{(1)}\mathbf{U} \\ {}^{(2)}\mathbf{U} \end{pmatrix} - \\ - \sum_{i=1}^{k_1+k_2} (\mathbf{U}_i^*)' U_{pi} (\sum_{i=1}^{k_1+k_2} \mathbf{U}_i^*(\mathbf{U}_i^*)')^{-1} \sum_{i=1}^{k_1+k_2} U_{pi}\mathbf{U}_i^* \}^{-1}.$$

Pretože platí (Anděl, str. 66)

$$\{\mathbf{\Sigma}^{-1}\}_{pp} = (\mathbf{\Sigma}_{22} - \mathbf{\Sigma}_{21}\mathbf{\Sigma}_{11}^{-1}\mathbf{\Sigma}_{12})^{-1} = |\mathbf{\Sigma}_{22} - \mathbf{\Sigma}_{21}\mathbf{\Sigma}_{11}^{-1}\mathbf{\Sigma}_{12}|^{-1},$$

čiže

$$\{\mathbf{\Sigma}^{-1}\}_{pp} = \frac{|\mathbf{\Sigma}_{11}|}{|\mathbf{\Sigma}_{11}||\mathbf{\Sigma}_{22} - \mathbf{\Sigma}_{21}\mathbf{\Sigma}_{11}^{-1}\mathbf{\Sigma}_{12}|} = \frac{|\mathbf{\Sigma}_{11}|}{|\mathbf{\Sigma}|},$$

dostávame

$$(2.7)\quad \{\mathbf{S}_1^{-1}\}_{pp}^{-1} = \frac{|\mathbf{S}_1|}{|\mathbf{S}_{11}|} = {}^{(1)}\mathbf{U}'\ {}^{(1)}\mathbf{U} - \sum_{i=1}^{k_1}(\mathbf{U}_i^*)'U_{pi}(\sum_{i=1}^{k_1}\mathbf{U}_i^*(\mathbf{U}_i^*)')^{-1}\sum_{i=1}^{k_1}U_{pi}\mathbf{U}_i^*,$$

$$(2.8)\quad \{(\mathbf{S}_1+\mathbf{S}_2)^{-1}\}_{pp}^{-1} = \frac{|\mathbf{S}_1+\mathbf{S}_2|}{|(\mathbf{S}_1+\mathbf{S}_2)_{11}|} = (\ {}^{(1)}\mathbf{U}' \vdots\ {}^{(2)}\mathbf{U}')\begin{pmatrix} {}^{(1)}\mathbf{U} \\ {}^{(2)}\mathbf{U}\end{pmatrix} -$$
$$- \sum_{i=1}^{k_1+k_2}(\mathbf{U}_i^*)'U_{pi}(\sum_{i=1}^{k_1+k_2}\mathbf{U}_i^*(\mathbf{U}_i^*)')^{-1}\sum_{i=1}^{k_1+k_2}U_{pi}\mathbf{U}_i^*.$$

Zhodne ako vo vete 2.14 sa ukáže, že

$$\boldsymbol{\xi} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{\xi}_1 \\ \boldsymbol{\xi}_2\end{pmatrix} = \mathbf{U}/\mathbf{U}_1^* = \mathbf{u}_1, ..., \mathbf{U}_{k_1+k_2}^* = \mathbf{u}_{k_1+k_2} \sim$$

$$\sim N_{k_1+k_2}(\begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{21}\boldsymbol{\Sigma}_{11}^{-1}\mathbf{u}_1 \\ \boldsymbol{\Sigma}_{21}\boldsymbol{\Sigma}_{11}^{-1}\mathbf{u}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\Sigma}_{21}\boldsymbol{\Sigma}_{11}^{-1}\mathbf{u}_{k_1+k_2}\end{pmatrix} = \mathbf{X}\boldsymbol{\gamma}, \{\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\}_{pp}\mathbf{I}),$$

pričom $\boldsymbol{\xi}_1$ je $k_1$ rozmerný a $\boldsymbol{\xi}_2$ je $k_2$ rozmerný náhodný vektor. Preto podmienené rozdelenie

$$\{(\mathbf{S}_1+\mathbf{S}_2)^{-1}\}_{pp}^{-1}/\mathbf{U}_1^* = \mathbf{u}_1, ..., \mathbf{U}_{k_1+k_2}^* = \mathbf{u}_{k_1+k_2}$$

je rozdelenie kvadratickej formy

$$\boldsymbol{\xi}'\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}'\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{\xi} \sim \{\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\}_{pp}^{-1}\chi^2_{k_1+k_2-p+1},$$

pričom nezáleží na podmienke a preto je totožné s nepodmieneným rozdelením a je nezávislé od rozdelenia

$$\{\mathbf{S}_1^{-1}\}_{pp}^{-1}/\mathbf{U}_1^* = \mathbf{u}_1, ..., \mathbf{U}_{k_1+k_2}^* = \mathbf{u}_{k_1+k_2},$$

ktoré je rozdelením kvadratickej formy

$$\boldsymbol{\xi}_1'\boldsymbol{\xi}_1 - \boldsymbol{\xi}_1'\mathbf{X}_1(\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1)^{-1}\mathbf{X}_1'\boldsymbol{\xi}_1 =$$

$$= (\boldsymbol{\xi}_1' \vdots \boldsymbol{\xi}_2')\left(\begin{pmatrix}\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\mathbf{X}_1 \\ \mathbf{0}\end{pmatrix}(\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1)^{-1}(\mathbf{X}_1' \vdots \mathbf{0})\right)\begin{pmatrix}\boldsymbol{\xi}_1 \\ \boldsymbol{\xi}_2\end{pmatrix} = \boldsymbol{\xi}'\mathbf{A}\boldsymbol{\xi} \sim$$
$$\sim \{\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\}_{pp}^{-1}\chi^2_{k_1-p+1},$$

nezávisí na podmienke a je preto totožné s nepodmieneným rozdelením. Podľa vety 1.8 je

$$\{(\mathbf{S}_1+\mathbf{S}_2)^{-1}\}_{pp}^{-1} - \{\mathbf{S}_1^{-1}\}_{pp}^{-1}/\mathbf{U}_1^* = \mathbf{u}_1, ..., \mathbf{U}_{k_1+k_2}^* = \mathbf{u}_{k_1+k_2} =$$

$$\boldsymbol{\xi}'\left\{\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{k_2,k_2}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\mathbf{X}_1[(\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1+\mathbf{X}_2'\mathbf{X}_2)^{-1}-(\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1)^{-1}]\mathbf{X}_1 & \mathbf{X}_1(\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1+\mathbf{X}_2'\mathbf{X}_2)^{-1}\mathbf{X}_2'\\ \mathbf{X}_2(\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1+\mathbf{X}_2'\mathbf{X}_2)^{-1}\mathbf{X}_1' & \mathbf{X}_2(\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1+\mathbf{X}_2'\mathbf{X}_2)^{-1}\mathbf{X}_2'\end{pmatrix}\right\}\boldsymbol{\xi} =$$

$$= \boldsymbol{\xi}'\mathbf{B}\boldsymbol{\xi} \sim \{\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\}_{pp}^{-1}\chi^2_{k_2},$$

nezáleží od podmienky a je preto opäť totožné s nepodmieneným rozdelením. Mimo toho ľahko sa ukáže, že

$$\{(\mathbf{S}_1+\mathbf{S}_2)^{-1}\}_{pp}^{-1} - \{\mathbf{S}_1^{-1}\}_{pp}^{-1}/\mathbf{U}_1^* = \mathbf{u}_1, ..., \mathbf{U}_{k_1+k_2}^* = \mathbf{u}_{k_1+k_2}$$

nezávisí od

$$\{\mathbf{S}_1^{-1}\}_{pp}^{-1}/\mathbf{U}_1^* = \mathbf{u}_1, ..., \mathbf{U}_{k_1+k_2}^* = \mathbf{u}_{k_1+k_2}$$

(lebo $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$). Preto

$$\frac{\{\mathbf{S}_1^{-1}\}_{pp}^{-1}}{\{(\mathbf{S}_1+\mathbf{S}_2)^{-1}\}_{pp}^{-1} - \{\mathbf{S}_1^{-1}\}_{pp}^{-1} + \{\mathbf{S}_1^{-1}\}_{pp}^{-1}}\Bigg/\mathbf{U}_1^* = \mathbf{u}_1, ..., \mathbf{U}_{k_1+k_2}^* = \mathbf{u}_{k_1+k_2}$$

je rozdelené ako

$$\frac{\chi^2_{k_1-p+1}}{\chi^2_{k_1-p+1}+\chi^2_{k_2}}, \tag{2.9}$$

pričom $\chi^2_{k_2}$ a $\chi^2_{k_1-p+1}$ v (2.9) sú nezávislé. Podľa lemy 2.15 má preto $\frac{\{\mathbf{S}_1^{-1}\}_{pp}^{-1}}{\{(\mathbf{S}_1+\mathbf{S}_2)^{-1}\}_{pp}^{-1}}$ rozdelenie $B\left(\frac{k_1-p+1}{2}, \frac{k_2}{2}\right)$ a nezávisí od $\{\mathbf{S}_1+\mathbf{S}_2\}_{ij},\ i,j \in \{1,2,..., p-1\}$.

Označme hlavný determinant rádu $r$ matice $\mathbf{C}_{p,p}$, teda $det\begin{pmatrix}c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1r}\\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2r}\\ \vdots & & & \\ c_{r1} & c_{r2} & \dots & c_{rr}\end{pmatrix}$ ako $|\mathbf{C}|_r,\quad r \in \{1,2,...,p\}$. Využijúc (2.7) a (2.8) dostávame, že rozdelenie

$$\frac{|\mathbf{S}_1|}{|\mathbf{S}_1+S_2|}\Bigg/\mathbf{U}_1^* = \mathbf{u}_1, ..., \mathbf{U}_{k_1+k_2}^* = \mathbf{u}_{k_1+k_2} =$$

$$= \frac{\frac{|\mathbf{S}_1|_p}{|\mathbf{S}_1|_{p-1}}}{\frac{|\mathbf{S}_1+\mathbf{S}_2|_p}{|\mathbf{S}_1+\mathbf{S}_2|_{p-1}}}\frac{\frac{|\mathbf{S}_1|_{p-1}}{|\mathbf{S}_1|_{p-2}}}{\frac{|\mathbf{S}_1+\mathbf{S}_2|_{p-1}}{|\mathbf{S}_1+\mathbf{S}_2|_{p-2}}}\cdots\frac{|\mathbf{S}_1|_1}{|\mathbf{S}_1+S_2|_1}\Bigg/\mathbf{U}_1^* = \mathbf{u}_1, ..., \mathbf{U}_{k_1+k_2}^* = \mathbf{u}_{k_1+k_2},$$

pričom

$$= \frac{\frac{|\mathbf{S}_1|_p}{|\mathbf{S}_1|_{p-1}}}{\frac{|\mathbf{S}_1+\mathbf{S}_2|_p}{|\mathbf{S}_1+\mathbf{S}_2|_{p-1}}}\Bigg/\mathbf{U}_1^* = \mathbf{u}_1, ..., \mathbf{U}_{k_1+k_2}^* = \mathbf{u}_{k_1+k_2} \sim B\left(\frac{k_1-p+1}{2}, \frac{k_2}{2}\right)$$

a nezávisí od

$$\frac{\frac{|\mathbf{S}_1|_{p-1}}{|\mathbf{S}_1|_{p-2}}}{\frac{|\mathbf{S}_1+\mathbf{S}_2|_{p-1}}{|\mathbf{S}_1+\mathbf{S}_2|_{p-2}}} \Big/ \mathbf{U}_1^* = \mathbf{u}_1, ..., \mathbf{U}_{k_1+k_2}^* = \mathbf{u}_{k_1+k_2},$$

ktoré má $B\left(\frac{k_1-p+1}{2}, \frac{k_2}{2}\right)$ rozdelenie nezávislé od podmienky, atď. Teda $\frac{|\mathbf{S}_1|}{|\mathbf{S}_1+S_2|}$ má rozdelenie ako súčin $\eta_1...\eta_p$ navzájom nezávislých náhodných veličín, pričom $\eta_i \sim B\left(\frac{k_1-p+i}{2}, \frac{k_2}{2}\right)$. $\square$

**Veta 2.17.** *Ak $\mathbf{U}_1, ..., \mathbf{U}_n$ sú nezávislé, $N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ rozdelené, $\mathbf{S} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (\mathbf{U}_i - \overline{\mathbf{U}})(\mathbf{U}_i - \overline{\mathbf{U}})'$, kde $\overline{\mathbf{U}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathbf{U}_i$, tak $n\mathbf{S} \sim W_p(n-1, \boldsymbol{\Sigma})$.*

*Dôkaz.* $n\mathbf{S} = \sum_{i=1}^n (\mathbf{U}_i - \overline{\mathbf{U}})(\mathbf{U}_i - \overline{\mathbf{U}})' = \sum_{i=1}^n \mathbf{U}_i\mathbf{U}_i' - n\overline{\mathbf{U}}\ \overline{\mathbf{U}}' = \mathcal{U}'\mathcal{U} - \frac{1}{n}\mathcal{U}'\mathbf{1}_{n,1}\mathbf{1}_{1,n}'\mathcal{U} = \mathcal{U}'(\mathbf{I} - \frac{1}{n}\mathbf{1}\mathbf{1}')\mathcal{U} = \mathcal{U}'\mathbf{A}\mathcal{U} = \tilde{\mathcal{U}}'\mathbf{A}\tilde{\mathcal{U}}$, kde $\tilde{\mathcal{U}}' = (\mathbf{U}_1 - \boldsymbol{\mu}, ..., \mathbf{U}_n - \boldsymbol{\mu})$, lebo $(\boldsymbol{\mu}, ..., \boldsymbol{\mu})\mathbf{A} = \mathbf{0}$. Podľa lemy 2.5 $\tilde{\mathcal{U}}'\mathbf{A}\tilde{\mathcal{U}} \sim W_p(r, \boldsymbol{\Sigma}) \Leftrightarrow \forall \mathbf{l} \in \mathcal{R}^p\ \mathbf{l}'\tilde{\mathcal{U}}'\mathbf{A}\tilde{\mathcal{U}}\mathbf{l} \sim (\mathbf{l}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{l})\chi_r^2$, pričom v tomto prípade $r = h(\mathbf{A}) = tr(\mathbf{A})$. Pretože

$$\tilde{\mathcal{U}}\mathbf{l} = \begin{pmatrix} (\mathbf{U}_1 - \boldsymbol{\mu})'\mathbf{l} \\ (\mathbf{U}_2 - \boldsymbol{\mu})'\mathbf{l} \\ \vdots \\ (\mathbf{U}_n - \boldsymbol{\mu})'\mathbf{l} \end{pmatrix} = {}_1\tilde{\mathbf{Y}} \sim N_n(\mathbf{0}, (\mathbf{l}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{l})\mathbf{I})$$

(pozri (2.1)), má $\mathbf{l}'\tilde{\mathcal{U}}'\mathbf{A}\tilde{\mathcal{U}}\mathbf{l}$ rozdelenie $\chi_r^2$ (podľa vety 1.8) práve vtedy ak $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$. V tomto prípade $r = h(\mathbf{A}) = tr(\mathbf{A})$. Je zrejmé, že v našom prípade $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$ a $r = h(\mathbf{A}) = tr(\mathbf{A}) = n-1$, preto $n\mathbf{S} \sim W_p(n-1, \boldsymbol{\Sigma})$. $\square$

**Veta 2.18.** *Ak $\mathbf{U}_1, ..., \mathbf{U}_k$ sú nezávislé, $N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ rozdelené, tak $\overline{\mathbf{U}} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^k \mathbf{U}_i$ a $k\mathbf{S} = \sum_{i=1}^k \mathbf{U}_i\mathbf{U}_i' - k\overline{\mathbf{U}}\ \overline{\mathbf{U}}'$ sú nezávislé, pričom $\overline{\mathbf{U}} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \frac{1}{k}\boldsymbol{\Sigma})$ a $k\mathbf{S} \sim W_p(k-1, \boldsymbol{\Sigma})$.*

*Dôkaz.* Nech $\mathbf{C}_{k,k}$ je ortogonálna matica taká, že jej $k-$ty stĺpec je $(\frac{1}{\sqrt{k}}, ..., \frac{1}{\sqrt{k}})'$. Označme

$$(\mathbf{U}_1 \vdots ... \vdots \mathbf{U}_k)\mathbf{C} = (\mathbf{V}_1 \vdots ... \vdots \mathbf{V}_k).$$

Potom $\mathbf{V}_k = \frac{1}{\sqrt{k}}(\mathbf{U}_1 + ... + \mathbf{U}_k) = \sqrt{k}\ \overline{\mathbf{U}}$ resp. $\overline{\mathbf{U}} = \frac{1}{\sqrt{k}}\mathbf{V}_k$,

$$k\mathbf{S} = \sum_{i=1}^k \mathbf{U}_i\mathbf{U}_i' - k\overline{\mathbf{U}}\ \overline{\mathbf{U}}' = (\mathbf{U}_1 \vdots ... \vdots \mathbf{U}_k)\begin{pmatrix} \mathbf{U}_1' \\ \mathbf{U}_2' \\ \vdots \\ \mathbf{U}_k' \end{pmatrix} - k\frac{1}{\sqrt{k}}\mathbf{V}_k\frac{1}{\sqrt{k}}\mathbf{V}_k' =$$

$$= (\mathbf{V}_1 \vdots ... \vdots \mathbf{V}_k)\mathbf{C}'\mathbf{C}\begin{pmatrix} \mathbf{V}_1' \\ \mathbf{V}_2' \\ \vdots \\ \mathbf{V}_k' \end{pmatrix} - \mathbf{V}_k\mathbf{V}_k' = \sum_{i=1}^k \mathbf{V}_i\mathbf{V}_i' - \mathbf{V}_k\mathbf{V}_k' = \sum_{i=1}^{k-1} \mathbf{V}_i\mathbf{V}_i'.$$

Pretože $\mathbf{V}_1, ..., \mathbf{V}_k$ sú nezávislé, dostávame tvrdenie lemy (pomocou vety 2.17). $\square$

## 3. Hotellingovo $T^2$ rozdelenie

Nech $\mathbf{S}_{p,p}$ je matica náhodných veličín (náhodná matica) $\mathbf{d}_{p,1}$ nahodný vektor nezávislý na $\mathbf{S}$, $\mathbf{S} \sim W_p(k, \mathbf{\Sigma})$, $\mathbf{d} \sim N_p(\boldsymbol{\delta}, c^{-1}\mathbf{\Sigma})$. Hotellingova zovšeobecnená štatistika $T^2$ je definovaná ako

$$T^2 = ck\mathbf{d}'\mathbf{S}^{-1}\mathbf{d} = \frac{k\mathbf{d}'\mathbf{S}^{-1}\mathbf{d}}{\mathbf{d}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{d}} c\mathbf{d}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{d}.$$

V nasledujúcom budeme uvažovať $\boldsymbol{\delta} = \mathbf{0}$, $c = 1$, $\mathbf{\Sigma} = \mathbf{I}$, teda $\mathbf{S} \sim W_p(k, \mathbf{I})$, $\mathbf{d} \sim N_p(\mathbf{0}, \mathbf{I})$. Hotellingovo $T^2(p,k)$ rozdelenie je

$$T^2 = k\mathbf{d}'\mathbf{S}^{-1}\mathbf{d}$$

a píšeme $k\mathbf{d}'\mathbf{S}^{-1}\mathbf{d} \sim T^2(p,k)$.

**Veta 3.1.** *Nech* $\mathbf{X} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{\Sigma})$ *a* $\mathbf{S} \sim W_p(k, \mathbf{\Sigma})$ *sú navzájom nezávislé,* $\mathbf{\Sigma}$ *regulárna. Potom*

$$k(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})'\mathbf{S}^{-1}(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}) \sim T^2(p,k).$$

*Dôkaz.* $\mathbf{\Sigma} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}'$, $\mathbf{I} = \mathbf{U}\mathbf{U}', \mathbf{\Lambda} = diag\{\lambda_1, ..., \lambda_p\}$, $\lambda_1 \geqq \lambda_2 \geqq ... \geqq \lambda_p > 0$, $\mathbf{\Sigma}^{-\frac{1}{2}} = \mathbf{U}diag\{\lambda_1^{-\frac{1}{2}}, ..., \lambda_p^{-\frac{1}{2}}\}\mathbf{U}'$, $\mathbf{\Sigma}^{\frac{1}{2}} = \mathbf{U}diag\{\lambda_1^{\frac{1}{2}}, ..., \lambda_p^{\frac{1}{2}}\}\mathbf{U}'$. Položíme $\mathbf{d}^* = \mathbf{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})$, $\mathbf{S}^* = \mathbf{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{S}\mathbf{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}$, teda $(\mathbf{S}^*)^{-1} = \mathbf{\Sigma}^{\frac{1}{2}}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{\Sigma}^{\frac{1}{2}}$. Zrejme $\mathbf{d}^* \sim N_p(\mathbf{0}, \mathbf{I})$, $\mathbf{S}^* \sim W_p(k, \mathbf{I})$ a preto podľa definície $k(\mathbf{d}^*)'(\mathbf{S}^*)^{-1}\mathbf{d}^* = k(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})'\mathbf{S}^{-1}(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}) \sim T^2(p,k)$. □

**Dôsledok 3.2.** *Majme* $\mathbf{U}_1, ..., \mathbf{U}_n$ *nezávislé,* $\mathbf{U}_i \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{\Sigma})$, $\mathbf{\Sigma}$ *regulárna,* $\overline{\mathbf{U}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathbf{U}_i$, $\mathbf{S} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (\mathbf{U}_i - \overline{\mathbf{U}})(\mathbf{U}_i - \overline{\mathbf{U}})'$, $\mathbf{S}_* = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (\mathbf{U}_i - \overline{\mathbf{U}})(\mathbf{U}_i - \overline{\mathbf{U}})'$. *Potom*

$$(n-1)(\overline{\mathbf{U}} - \boldsymbol{\mu})'\mathbf{S}^{-1}(\overline{\mathbf{U}} - \boldsymbol{\mu}) = n(\overline{\mathbf{U}} - \boldsymbol{\mu})'\mathbf{S}_*^{-1}(\overline{\mathbf{U}} - \boldsymbol{\mu}) \sim T^2(p, n-1).$$

*Dôkaz.* $\overline{\mathbf{U}} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \frac{1}{n}\mathbf{\Sigma})$, teda $\sqrt{n}\,\overline{\mathbf{U}} \sim N_p(\sqrt{n}\boldsymbol{\mu}, \mathbf{\Sigma})$, $\mathbf{S}_* = \frac{n}{n-1}\mathbf{S}$, čiže $(n-1)\mathbf{S}^{-1} = n\mathbf{S}_*^{-1}$, ďalej $n\mathbf{S} \sim W_p(n-1, \mathbf{\Sigma})$ (pozri vetu 2.17), $\overline{\mathbf{U}}$ a $\mathbf{S}$ sú nezávislé (veta 2.18), teda

$$(n-1)\sqrt{n}(\overline{\mathbf{U}} - \boldsymbol{\mu})'(n\mathbf{S})^{-1}\sqrt{n}(\overline{\mathbf{U}} - \boldsymbol{\mu}) = (n-1)(\overline{\mathbf{U}} - \boldsymbol{\mu})'\mathbf{S}^{-1}(\overline{\mathbf{U}} - \boldsymbol{\mu}) =$$

$$= n(\overline{\mathbf{U}} - \boldsymbol{\mu})'\mathbf{S}_*^{-1}\sqrt{n}(\overline{\mathbf{U}} - \boldsymbol{\mu}) \sim T^2(p, n-1). \qquad \square$$

**Veta 3.3.**

$$T^2(p,m) = \frac{mp}{m-p+1}F_{p,m-p+1}.$$

*Dôkaz.* Podľa definície má $T^2(p,m)$ rozdelenie náhodná veličina $m\mathbf{d}'\mathbf{S}^{-1}\mathbf{d}$, kde $\mathbf{d} \sim N_p(\mathbf{0}, \mathbf{I})$, $\mathbf{S} \sim W_p(m, \mathbf{I})$. Teda náhodná veličina

$$\frac{m\mathbf{d}'\mathbf{S}^{-1}\mathbf{d}}{\mathbf{d}'\mathbf{d}}\mathbf{d}'\mathbf{d} = m\frac{\mathbf{d}'\mathbf{d}}{\dfrac{\mathbf{d}'\mathbf{d}}{\mathbf{d}'\mathbf{S}^{-1}\mathbf{d}}}. \tag{3.1}$$

Podľa vety 2.14 (b) menovateľ v (3.1) nezáleží od $\mathbf{d}$ a má $\chi^2_{m-p+1}$ rozdelenie (pre ľubovoľnú realizáciu náhodného vektora $\mathbf{d}$ má $\chi^2_{m-p+1}$ rozdelenie), čitateľ v (3.1) má podľa vety 1.7 $\chi^2_p$ rozdelenie. Preto (3.1) je podiel dvoch nezávislých náhodných veličín, s $\chi^2$ rozdelením, a síce rozdelenie (3.1) je

$$T^2(p,m) = \frac{m\chi^2_p}{\chi^2_{m-p+1}} = \frac{mp\dfrac{\chi^2_p}{p}}{(m-p+1)\dfrac{\chi^2_{m-p+1}}{m-p+1}} = \frac{mp}{m-p+1}F_{p,m-p+1}. \qquad \square$$

**Lema 3.4.** *Súčin $k$ navzájom nezávislých náhodných veličín s rozdelením $B(\gamma_i,\delta_i)$, $i=1,2,...,k$ takých, že $\gamma_i=\gamma_{i+1}+\delta_{i+1}$, $i=1,2,...,k-1$ má rozdelenie $B(\gamma_k,\delta_1+...+\delta_k)$.*

*Dôkaz.* Pozri viac v Rao, 3a.3.

**Lema 3.5.** *Nech $\mathbf{d}\sim N_p(\mathbf{0},\mathbf{I})$ a $\mathbf{S}\sim W_p(m,\mathbf{I})$ sú nezávislé, teda $m\mathbf{d}'\mathbf{S}^{-1}\mathbf{d}\sim T^2(p,m)$, $m\geqq p-1$. Platí*

$$\left(1+\frac{T^2(p,m)}{m}\right)^{-1} = \frac{|\mathbf{S}|}{|\mathbf{S}+\mathbf{d}\mathbf{d}'|}\sim B\left(\frac{m-p+1}{2},\frac{p}{2}\right).$$

*Dôkaz.* Podľa Anděl, str. 63 pre determinant štvorcovej matice $\begin{pmatrix}\mathbf{S} & \mathbf{d}\\ \mathbf{d}' & -1\end{pmatrix}$ platí

$$\begin{vmatrix}\mathbf{S} & \mathbf{d}\\ \mathbf{d}' & -1\end{vmatrix} = -|\mathbf{S}+\mathbf{d}\mathbf{d}'| = -|\mathbf{S}|(1+\mathbf{d}'\mathbf{S}^{-1}\mathbf{d}),$$

teda

$$\left(1+\frac{T^2(p,m)}{m}\right)^{-1} = (1+\mathbf{d}'\mathbf{S}^{-1}\mathbf{d})^{-1} = \frac{|\mathbf{S}|}{|\mathbf{S}+\mathbf{d}\mathbf{d}'|},$$

pričom $\mathbf{S}\sim W_p(m,\mathbf{I})$, $\mathbf{d}\mathbf{d}'\sim W_p(1,\mathbf{I})$, (nezávisí od $\mathbf{S}$) a podľa lemy 2.10 $\mathbf{S}+\mathbf{d}\mathbf{d}'\sim W_p(m+1,\mathbf{I})$. Preto podľa vety 2.16 má $\dfrac{|\mathbf{S}|}{|\mathbf{S}+\mathbf{d}\mathbf{d}'|}$ rozdelenie ako súčin navzájom nezávislých náhodných veličín s rozdelením beta a parametrami

$$\left(\frac{m-p+1}{2},\frac{1}{2}\right),\left(\frac{m-p+2}{2},\frac{1}{2}\right),...,\left(\frac{m}{2},\frac{1}{2}\right).$$

Podľa lemy 3.4 má tento súčin $B\left(\dfrac{m-p+1}{2},\dfrac{p}{2}\right)$ rozdelenie. $\square$

**Dôsledok 3.6.** *Nech $\overline{\mathbf{X}}$ a $\mathbf{S}$ je aritmetický priemer a výberová kovariančná matica z výberu rozsahu $n$ z rozdelenia $N_p(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma})$. Potom*

$$\frac{n-p}{p}(\overline{\mathbf{X}}-\boldsymbol{\mu})'\mathbf{S}^{-1}(\overline{\mathbf{X}}-\boldsymbol{\mu})\sim F_{p,n-p}.$$

*Dôkaz.* Podľa dôsledku 3.2 má $(n-1)(\overline{\mathbf{X}}-\boldsymbol{\mu})'\mathbf{S}^{-1}(\overline{\mathbf{X}}-\boldsymbol{\mu}) \sim T^2(p,n-1)$ rozdelenie, čiže podľa vety 3.3 má

$$\frac{n-p}{p}(\overline{\mathbf{X}}-\boldsymbol{\mu})'\mathbf{S}^{-1}(\overline{\mathbf{X}}-\boldsymbol{\mu}) \sim \frac{n-p}{p(n-1)}T^2(p,n-1) =$$

$$= \frac{n-p}{p(n-1)}\frac{p(n-1)}{n-1-p+1}F_{p,n-1-p+1} = F_{p,n-p}$$

rozdelenie. $\square$

## 4. Iné rozdelenia vyskytujúce sa pri multivariátnych štatistických analýzach

**Definícia 4.1.** *Nech* $\mathbf{A} \sim W_p(m,\mathbf{I})$, $\mathbf{B} \sim W_p(n,\mathbf{I})$ *sú nezávislé,* $m \geqq p-1$. *Potom hovoríme, že náhodná veličina*

$$\Lambda = \frac{|\mathbf{A}|}{|\mathbf{A}+\mathbf{B}|} = |\mathbf{I}+\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}|^{-1}$$

*má Wilksovo lambda-rozdelenie s parametrami* $p,m,n$. *Označujeme ho* $\Lambda(p,m,n)$

**Veta 4.2.** *Wilksovo* $\Lambda(p,m,n)$ *rozdelenie,* $m \geqq p-1$, *je totožné s rozdelením súčinu* $\eta_1 \ldots \eta_p$ *nezávislých náhodných veličín, pričom* $\eta_i \sim B\left(\frac{m-p+i}{2},\frac{n}{2}\right)$.

*Dôkaz.* Ak $\mathbf{A} \sim W_p(m,\mathbf{I})$, $\mathbf{B} \sim W_p(n,\mathbf{I})$ sú nezávislé, tak podľa vety 2.16 má

$$\Lambda = \frac{|\mathbf{A}|}{|\mathbf{A}+\mathbf{B}|} = |\mathbf{I}+\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}|^{-1}$$

rovnaké rozdelenie ako súčin $\eta_1 \ldots \eta_p$ nezávislých náhodných veličín, pričom $\eta_i \sim B\left(\frac{m-p+i}{2},\frac{n}{2}\right)$. $\square$

*Poznámka.* Ak $\mathbf{S}_1 \sim W_p(k_1,\mathbf{I})$, $\mathbf{S}_2 \sim W_p(k_2,\mathbf{I})$ sú nezávislé, $k_1 \geqq p-1$, tak

$$\Lambda = \frac{|\mathbf{S}_1|}{|\mathbf{S}_1+\mathbf{S}_2|}$$

má rozdelenie rovnaké ako súčin $\eta_1 \ldots \eta_p$ nezávislých náhodných veličín, pričom $\eta_i \sim B\left(\frac{k_1-p+i}{2},\frac{k_2}{2}\right)$, čo je podľa vety 2.16 to isté ako rozdelenie

$$\frac{|\mathbf{G}_1|}{|\mathbf{G}_1+\mathbf{G}_2|},$$

kde $\mathbf{G}_1 \sim W_p(k_1,\boldsymbol{\Sigma})$, $\mathbf{G}_2 \sim W_p(k_2,\boldsymbol{\Sigma})$ sú nezávislé, $\boldsymbol{\Sigma}$ je regulárna a $k_1 \geqq p-1$. Teda $\Lambda$ nezáleži od $\boldsymbol{\Sigma}$ a môžeme ju zadefinovať ako

$$\Lambda = \frac{|\mathbf{G}_1|}{|\mathbf{G}_1+\mathbf{G}_2|},$$

kde $\mathbf{G}_1 \sim W_p(k_1, \mathbf{\Sigma})$, $\mathbf{G}_2 \sim W_p(k_2, \mathbf{\Sigma})$ sú nezávislé, $\mathbf{\Sigma}$ je regulárna a $k_1 \geqq p-1$.

*Poznámka.* Ak $\mathbf{S} \sim W_p(n-1, \mathbf{\Sigma})$, $\mathbf{d} \sim N_p(\mathbf{0}, \mathbf{\Sigma})$ sú nezávislé, tak Wilksovo lambda-rozdelenie s parametrami $p, n-1, 1$ je to isté ako rozdelenie náhodnej veličiny $\dfrac{|\mathbf{S}|}{|\mathbf{S}+\mathbf{dd}'|}$, teda (podľa lemy 3.5) $B\left(\dfrac{n-p}{2}, \dfrac{p}{2}\right)$.

Zo vzťahov medzi beta rozdelením a $F$ rozdelením možno odvodiť vzťahy medzi $\Lambda$ a $F$ rozdelením:

(a) $$\frac{1-\Lambda(p,m,1)}{\Lambda(p,m,1)} \sim \frac{p}{m-p+1} F_{p,m-p+1}$$

(b) $$\frac{1-\Lambda(1,m,n)}{\Lambda(1,m,n)} \sim \frac{n}{m} F_{n,m}$$

(c) $$\frac{1-\sqrt{\Lambda(p,m,2)}}{\sqrt{\Lambda(p,m,2)}} \sim \frac{p}{m-p+1} F_{2p,2(m-p+1)}$$

(d) $$\frac{1-\sqrt{\Lambda(2,m,n)}}{\sqrt{\Lambda(2,m,n)}} \sim \frac{n}{m-1} F_{2n,2(m-1)}.$$

Pre ostatné hodnoty $n$ a $p$ za podmienky, že $m$ je veľké, možno použiť Bartlettovu asymptotickú aproximáciu

$$-\left\{m - \frac{1}{2}(p-n+1)\right\} \ln \Lambda(p,m,n) \sim \chi^2_{np}.$$

Pri hľadaní simultánnych intervalov spoľahlivosti parametrov multivariátnych lineárnych modelov sa používa nasledovné rozdelenie.

**Definícia 4.3.** *Nech* $\mathbf{A} \sim W_p(m, \mathbf{\Sigma})$, $\mathbf{B} \sim W_p(n, \mathbf{\Sigma})$ *sú nezávislé,* $m \geqq p$, $\mathbf{\Sigma}$ *je pozitívne definitná. Rozdelenie najväčšej vlastnej hodnoty* $\theta$ *matice* $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}$ *označujeme* $\theta(p,m,n)$.

Podľa Rao, str. 588 toto rozdelenie nezávisí od $\mathbf{\Sigma}$. Poznamenávame tiež, že $\theta$ môžeme definovať ako najväčší koreň rovnice

$$|\mathbf{B} - \theta(\mathbf{A}+\mathbf{B})| = 0.$$

Ak $\lambda$ je vlastná hodnota $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$, tak $\dfrac{\lambda}{1+\lambda}$ je vlastná hodnota $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}$. Keďže ide o monotónnu funkciu premennej $\lambda$, $\theta$ je dané vzťahom

$$\theta = \frac{\lambda_1}{1+\lambda_1},$$

kde $\lambda_1$ značí najväčšiu vlastnú hodnotu matice $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$. Pretože $\lambda_1 > 0$, platí $0 < \theta < 1$. Vzťahy medzi rozdeleniami $\theta, \Lambda$ a $F$ sú:

(a) $\theta(p,m,n)$ a $\theta(n, m+n-p, p)$ majú rovnaké rozdelenie,

(b) $$\frac{\theta(1,m,n)}{1-\theta(1,m,n)} = \frac{1-\Lambda(1,m,n)}{\Lambda(1,m,n)} \sim \frac{n}{m} F_{n,m},$$

(c) $$\frac{\theta(p,m,1)}{1-\theta(p,m,1)} = \frac{1-\Lambda(p,m,1)}{\Lambda(p,m,1)} \sim \frac{p}{m-p+1} F_{p,m-p+1}.$$

## 5. Metóda maximálnej vierohodnosti a test pomerom vierohodnosti

Združenú funkciu hustoty rozdelenia náhodného výberu $\mathbf{X}_{np,1} = (\mathbf{X}_1', ..., \mathbf{X}_n')'$ uvažovanú pri danom $\mathbf{x}$ (realizácia $\mathbf{X} \in \mathcal{R}^p$) ako funkciu vektorového parametra $\boldsymbol{\theta} \in \mathcal{R}^r$ nazývame funkciou vierohodnosti

$$L(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta}) = \prod_{i=1}^{n} f(\mathbf{x}_i;\boldsymbol{\theta}),$$

resp. jej logaritmus, teda

$$l(\mathbf{x},\boldsymbol{\theta}) = l(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_n, \boldsymbol{\theta}) = \ln L(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^{n} \ln f(\mathbf{x}_i;\boldsymbol{\theta}).$$

Vierohodnostnými rovnicami rozumieme systém

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \ln f(\mathbf{x}_i,\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_k} = 0, \quad k = 1, 2, ..., r.$$

Majme náhodný výber $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1', \mathbf{X}_2', ..., \mathbf{X}_n')'$, kde $\mathbf{X}_i \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, $\boldsymbol{\Sigma}$ je regulárna. Potom

$$L(\mathbf{x};\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma}) = |2\pi\boldsymbol{\Sigma}|^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{x}_i-\boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x}_i-\boldsymbol{\mu})},$$

čiže

$$l(\mathbf{x};\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma}) = \ln L(\mathbf{x};\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma}) = -\frac{n}{2}\ln|2\pi\boldsymbol{\Sigma}| - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{x}_i-\boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x}_i-\boldsymbol{\mu}).$$

Platí

$$\begin{aligned}(\mathbf{x}_i-\boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x}_i-\boldsymbol{\mu}) &= (\mathbf{x}_i-\overline{\mathbf{x}}+\overline{\mathbf{x}}-\boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x}_i-\overline{\mathbf{x}}+\overline{\mathbf{x}}-\boldsymbol{\mu}) = \\ &= (\mathbf{x}_i-\overline{\mathbf{x}})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x}_i-\overline{\mathbf{x}}) + (\overline{\mathbf{x}}-\boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\overline{\mathbf{x}}-\boldsymbol{\mu}) + \\ &\quad +2(\mathbf{x}_i-\overline{\mathbf{x}})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\overline{\mathbf{x}}-\boldsymbol{\mu}),\end{aligned}$$

čiže

$$\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{x}_i-\boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x}_i-\boldsymbol{\mu}) = \sum_{i=1}^{n}(\mathbf{x}_i-\overline{\mathbf{x}})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x}_i-\overline{\mathbf{x}}) + n(\overline{\mathbf{x}}-\boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\overline{\mathbf{x}}-\boldsymbol{\mu}) +$$

$$+2\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{x}_i-\overline{\mathbf{x}})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\overline{\mathbf{x}}-\boldsymbol{\mu}) = tr\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{x}_i-\overline{\mathbf{x}})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x}_i-\overline{\mathbf{x}}) + n(\overline{\mathbf{x}}-\boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\overline{\mathbf{x}}-\boldsymbol{\mu}) =$$

$$= tr\left[\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\left\{\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{x}_i-\overline{\mathbf{x}})(\mathbf{x}_i-\overline{\mathbf{x}})'\right\}\right] + n(\overline{\mathbf{x}}-\boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\overline{\mathbf{x}}-\boldsymbol{\mu}) +$$

$$= ntr\left\{\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{S}^{(real)}\right\} + n(\overline{\mathbf{x}}-\boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\overline{\mathbf{x}}-\boldsymbol{\mu}),$$

lebo

$$\mathbf{S}^{(real)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{x}_i - \overline{\mathbf{x}})(\mathbf{x}_i - \overline{\mathbf{x}})' \quad \text{a} \quad 2\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{x}_i - \overline{\mathbf{x}})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\overline{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu}) =$$

$$= 2\left\{ n\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\overline{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu}) - n\overline{\mathbf{x}}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\overline{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu}) \right\} = 0.$$

Dostávame

$$l(\mathbf{x}; \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) = -\frac{n}{2}\ln|2\pi\boldsymbol{\Sigma}| - \frac{n}{2}tr\left\{\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{S}^{(real)}\right\} - \frac{n}{2}tr\left\{\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\overline{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu})(\overline{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu})'\right\}.$$

Ak $n \geqq p + 1$, tak odhady metódou maximálnej vierohodnosti sú

$$\hat{\boldsymbol{\mu}} = \overline{\mathbf{X}}, \quad \hat{\boldsymbol{\Sigma}} = \mathbf{S}$$

(pozri Rao, str. 575,576).

**Definícia 5.1.** $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1', \mathbf{X}_2', ..., \mathbf{X}_n')'$ *je náhodný výber z rozdelenia závislého od parametra* $\boldsymbol{\theta}$. *Testujeme* $H_0: \quad \boldsymbol{\theta} \in \Omega_0 \quad \divideontimes \quad H_1: \quad \boldsymbol{\theta} \in \Omega_1$ *(*$\Omega_1$ *je oblasť v* $\mathcal{R}^q$, $\Omega_0$ *je podoblasť v* $\Omega_1$ *hodnosti* $s$*). Test pomerom vierohodnosti hypotézy* $H_0$ *oproti* $H_1$ *má testovaciu štatistiku (LR-štatistiku t.j. likelihood ratio statistiku, presnejšie jej realizáciu)*

$$\lambda(\mathbf{x}) = \frac{L_0}{L} = \frac{\max_{\theta\in\Omega_0} L(\boldsymbol{\theta})}{\max_{\theta\in\Omega} L(\boldsymbol{\theta})}.$$

*Jeho kritická oblasť na hladine významnosti* $\alpha$ *je* $R = \{\mathbf{x}: \quad \lambda(\mathbf{x}) < c\}$, *kde* $c$ *je určené tak, aby* $\sup_{\theta\in\Omega_0} P\{\mathbf{x} \in R\} = \alpha$.

**Veta 5.2.** *Nech* $\lambda$ *je testovacia štatistika pre test pomerom vierohodnosti* $H_0: \boldsymbol{\theta} \in \Omega_0 \quad \divideontimes \quad H_1: \quad \boldsymbol{\theta} \in \Omega_1 - \Omega_0$ *(*$\Omega_1$ *je oblasť v* $\mathcal{R}^q$*). Za určitých podmienok regulárnosti pre každý* $\boldsymbol{\theta} \in \Omega_0$ *má* $-2\ln\lambda$ *asymptoticky (pre* $n \to \infty$*) rozdelenie* $\chi^2_{q-s}$, *keď* $\Omega_0$ *je podoblasť* $\Omega_1$ *hodnosti* $s$, $(q > s)$, *(* $q - s$ *možno chápať ako počet reštrikcií na parametre* $\theta_1, ..., \theta_r$*).*

Ilustrácia:

(a) Nech $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1', \mathbf{X}_2', ..., \mathbf{X}_n')'$ je náhodný výber z $N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, $\boldsymbol{\Sigma}$ je známa pozitívne definitná matica.

$$H_0: \quad \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_0 \quad \divideontimes \quad H_1: \quad \boldsymbol{\mu} \neq \boldsymbol{\mu}_0.$$

Potom

$$L(\mathbf{x}; \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) = |2\pi\boldsymbol{\Sigma}|^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu})} =$$

$$= |2\pi\boldsymbol{\Sigma}|^{-\frac{n}{2}} e^{\frac{n}{2}tr\left\{\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{S}^{(real)}\right\}} e^{-\frac{n}{2}(\overline{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu})\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\overline{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu})'}.$$

Ak platí $H_0$, tak $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_0$ a

$$\max_{\mu=\mu_0} L(\mathbf{x}; \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) = L(\mathbf{x}; \boldsymbol{\mu}_0, \boldsymbol{\Sigma}) =$$

$$= |2\pi\boldsymbol{\Sigma}|^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{n}{2}tr[\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{S}^{(real)}]} e^{-\frac{n}{2}(\overline{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu}_0)'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\overline{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu}_0)}$$

(je to jediné číslo). Ak $\boldsymbol{\mu}$ "nie je ohraničená", $q = p$, teda $\max_{\mu \in \mathcal{R}^p} L(\mathbf{x}; \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ sa dosahuje pre $\boldsymbol{\mu} = \hat{\boldsymbol{\mu}} = \overline{\mathbf{x}}$ a preto

$$\max_{\mu \in \mathcal{R}^p} L(\mathbf{x}; \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) = L(\mathbf{x}; \hat{\boldsymbol{\mu}}^{(real)}, \boldsymbol{\Sigma}) =$$

$$= |2\pi\boldsymbol{\Sigma}|^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{n}{2} tr[\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{S}^{(real)}]} e^{-\frac{n}{2}(\overline{\mathbf{x}} - \hat{\boldsymbol{\mu}}^{(real)})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\overline{\mathbf{x}} - \hat{\boldsymbol{\mu}}^{(real)})} =$$

$$= |2\pi\boldsymbol{\Sigma}|^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{n}{2} tr[\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{S}^{(real)}]}.$$

Preto testovacia štatistika (vlastne jej realizácia) je

$$-2\ln\lambda(\mathbf{x}) = -2\ln \frac{|2\pi\boldsymbol{\Sigma}|^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{n}{2} tr[\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{S}^{(real)}]} e^{-\frac{n}{2}(\overline{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu}_0)'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\overline{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu}_0)}}{|2\pi\boldsymbol{\Sigma}|^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{n}{2} tr[\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{S}^{(real)}]}} =$$

$$= n(\overline{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu}_0)'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\overline{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu}_0).$$

Je to realizácia štatistiky $n(\overline{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu}_0)'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\overline{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu}_0)$, ktorá má za platnosti $H_0$ podľa vety 1.8 $\chi^2_p$ rozdelenie. (Poznamenávame len, že $h(\Omega_0) = s = 0$, teda aj podľa tvrdenia vety 5.2 sedí pre asymptotiku, že $q - s = p - 0 = p$.)

(b) (Hotellingov jednovýberový $T^2$−test.) Majme náhodný výber $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1', \mathbf{X}_2', ..., \mathbf{X}_n')'$ z $N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, $\boldsymbol{\Sigma}$ je neznáma pozitívne definitná matica.

$$H_0: \quad \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_0 \;\; \asymp \;\; H_1: \quad \boldsymbol{\mu} \neq \boldsymbol{\mu}_0.$$

$\boldsymbol{\Sigma}$ sa musí odhadnúť vzhľadom na $H_0$ ako aj "bez ohraničenia". Dá sa ukázať, že odhady získané metódou maximálnej vierohodnosti (ich realizácie) sú

za platnosti $H_0$ : $\quad \hat{\boldsymbol{\mu}}^{(real)} = \boldsymbol{\mu}_0, \hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{(real)} = \mathbf{S}^{(real)} + \mathbf{d}\mathbf{d}'$, kde $\mathbf{d} = \overline{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu}_0$,

"bez ohraničenia": $\quad \hat{\boldsymbol{\mu}}^{(real)} = \overline{\mathbf{x}}, \hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{(real)} = \mathbf{S}^{(real)}$.

Dostávame, že za platnosti $H_0$

$$\max_{\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_0} L(\mathbf{x}; \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) = L(\mathbf{x}; \boldsymbol{\mu}_0, \mathbf{S}^{(real)} + \mathbf{d}\mathbf{d}') =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{np}{2}}|\mathbf{S}^{(real)} + \mathbf{d}\mathbf{d}'|^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{n}{2}\{tr(\mathbf{S}^{(real)} + \mathbf{d}\mathbf{d}')^{-1}\mathbf{S}^{(real)} + \mathbf{d}'(\mathbf{S}^{(real)} + \mathbf{d}\mathbf{d}')^{-1}\mathbf{d}\}} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{np}{2}}|\mathbf{S}^{(real)} + \mathbf{d}\mathbf{d}'|^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{n}{2} tr(\mathbf{S}^{(real)} + \mathbf{d}\mathbf{d}')^{-1}(\mathbf{S}^{(real)} + \mathbf{d}\mathbf{d}')} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{np}{2}}|\mathbf{S}^{(real)} + \mathbf{d}\mathbf{d}'|^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{np}{2}}.$$

Ďalej

$$\max_{\boldsymbol{\mu} \in \mathcal{R}^p} L(\mathbf{x}; \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) = L(\mathbf{x}; \overline{\mathbf{x}}, \mathbf{S}^{(real)}) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{np}{2}}|\mathbf{S}^{(real)}|^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{n}{2} tr(\mathbf{S}^{(real)})^{-1}\mathbf{S}^{(real)}) - (\overline{\mathbf{x}} - \overline{\mathbf{x}})'(\mathbf{S}^{(real)})^{-1}(\overline{\mathbf{x}} - \overline{\mathbf{x}})} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{np}{2}} |\mathbf{S}^{(real)}|^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{np}{2}},$$

teda testovacia štatistika (LR - štatistika) je

$$-2\ln\lambda(\mathbf{X}) = -2\ln\left(\frac{|\mathbf{S}|}{|\mathbf{S} + (\overline{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu}_0)(\overline{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu}_0)'|}\right)^{\frac{n}{2}} =$$

$$= -n\ln\left(\frac{|\mathbf{S}|}{|\mathbf{S} + (\overline{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu}_0)(\overline{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu}_0)'|}\right). \tag{5.1}$$

Za platnosti $H_0$ je $\sqrt{n}(\overline{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu}_0) \sim N_p(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma})$; podľa vety 2.18 $n\mathbf{S} \sim N_p(n-1, \boldsymbol{\Sigma})$, pričom $\sqrt{n}(\overline{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu}_0)$ a $n\mathbf{S}$ sú nezávislé. Preto podľa poznámky za vetou 4.2

$$\frac{|n\mathbf{S}|}{|n\mathbf{S} + n(\overline{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu}_0)(\overline{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu}_0)'|} = \frac{|\mathbf{S}|}{|\mathbf{S} + (\overline{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu}_0)(\overline{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu}_0)'|}$$

má $\Lambda(p, n-1, 1)$ rozdelenie. Podľa lemy 3.5 je to totožné s rozdelením $(1 + \frac{T^2(p,n-1)}{n-1})^{-1}$, čo je rozdelenie náhodnej veličiny $(1 + (\overline{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu}_0)'\mathbf{S}^{-1}(\overline{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu}_0))^{-1}$ (pozri dôkaz lemy 3.5) a podľa poznámky za vetou 4.2 to je $B\left(\frac{n-p}{2}, \frac{p}{2}\right)$ rozdelenie.

Asymptoticky má teda podľa vety 5.2

$$-2\ln\lambda(\mathbf{X}) = -n\ln\left(\frac{|\mathbf{S}|}{|\mathbf{S} + (\overline{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu}_0)(\overline{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu}_0)'|}\right) = n\ln(1 + (\overline{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu}_0)'\mathbf{S}^{-1}(\overline{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu}_0))$$

$\chi^2_p$ rozdelenie.

Ak chceme použiť neasymptotický test, tak za platnosti $H_0$ má náhodná veličina

$$(1 + (\overline{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu}_0)'\mathbf{S}^{-1}(\overline{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu}_0))^{-1}$$

$B\left(\frac{n-p}{2}, \frac{p}{2}\right)$ rozdelenie, alebo podľa dôsledku 3.6 má za platnosti $H_0$ štatistika

$$\frac{n-p}{p}(\overline{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu}_0)'\mathbf{S}^{-1}(\overline{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu}_0)$$

$F_{p,n-p}$ rozdelenie.

(c) Hypotézu

$$H_0: \quad \boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma}_0 \quad \asymp \quad H_1: \quad \boldsymbol{\Sigma} \neq \boldsymbol{\Sigma}_0$$

( $\boldsymbol{\mu}$ nepoznáme), pričom máme výber z $N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ rozdelenia o rozsahu $n$ testujeme tak, že získame odhady metódou maximálnej vierohodnosti.

Za platnosti $H_0$ : $\hat{\boldsymbol{\mu}}^{(real)} = \overline{\mathbf{x}}$, $\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma}_0$,

"bez ohraničenia": $\hat{\boldsymbol{\mu}}^{(real)} = \overline{\mathbf{x}}$, $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{(real)} = \mathbf{S}^{(real)}$.

Preto za platnosti $H_0$ je

$$\max_{\boldsymbol{\Sigma}=\boldsymbol{\Sigma}_0} l(\mathbf{x};\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma}) = l(\mathbf{x};\overline{\mathbf{x}},\boldsymbol{\Sigma}_0) = -\frac{np}{2}\ln 2\pi - \frac{n}{2}\ln|\boldsymbol{\Sigma}_0| - \frac{n}{2}tr(\boldsymbol{\Sigma}_0^{-1}\mathbf{S}^{(real)})$$

a "bez ohraničenia" je

$$\max_{\boldsymbol{\Sigma}} l(\mathbf{x};\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma}) = l(\mathbf{x};\overline{\mathbf{x}},\mathbf{S}^{(real)}) = -\frac{np}{2}\ln 2\pi - \frac{n}{2}\ln|\mathbf{S}^{(real)}| - \frac{np}{2}.$$

Teda testovacia LR - štatistika je

$$-2\ln\lambda(\mathbf{X}) = ntr(\boldsymbol{\Sigma}_0^{-1}\mathbf{S}) - \ln|\mathbf{S}\boldsymbol{\Sigma}_0^{-1}| - np.$$

Táto náhodná veličina má zložité rozdelenie, ale asymptoticky má $\chi^2_m$ rozdelenie, kde $m = \frac{1}{2}p(p+1)$.

(d) Hypotézu

$$H_0: \quad \boldsymbol{\Sigma}_{12} = \mathbf{0}$$

( $\boldsymbol{\mu}$ nepoznáme), pričom máme výber z $N_p(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma})$ rozdelenia o rozsahu $n$ testujeme tak, že normálne rozdelený náhodný vektor rozdelíme na podvektory s $p_1$ a $p_2$ zložkami, $p_1 + p_2 = p$. Predpokladajme rovnaké delenie kovariančnej matice $\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{11} & \boldsymbol{\Sigma}_{12} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{21} & \boldsymbol{\Sigma}_{22} \end{pmatrix}$. Dá sa ukázať, že odhady metódou maximálnej vierohodnosti za platnosti $H_0$ sú: $\hat{\boldsymbol{\mu}} = \overline{\mathbf{X}}$, $\hat{\boldsymbol{\Sigma}} = \begin{pmatrix} \mathbf{S}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}_{22} \end{pmatrix}$ ($\mathbf{S}_{11}$ a $\mathbf{S}_{22}$ sú príslušné submatice matice $\mathbf{S}$). Test pomerom vierohodnosti má testovaciu štatistiku

$$-2\ln\lambda(\mathbf{X}) = 2\left\{-\frac{np}{2}\ln 2\pi - \frac{n}{2}\ln|\mathbf{S}| - \frac{n}{2}tr(\mathbf{S}^{-1}\mathbf{S}) + \frac{np}{2}\ln 2\pi + \right.$$

$$\left. + \frac{n}{2}\ln|\mathbf{S}_{11}||\mathbf{S}_{22}| + \frac{n}{2}tr\begin{pmatrix} \mathbf{S}_{11}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}_{22}^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{S}_{11} & \mathbf{S}_{12} \\ \mathbf{S}_{21} & \mathbf{S}_{22} \end{pmatrix}\right\} = n\ln\frac{|\mathbf{S}_{11}||\mathbf{S}_{22}|}{|\mathbf{S}|} =$$

$$= -n\ln\frac{|\mathbf{S}|}{|\mathbf{S}_{11}||\mathbf{S}_{22}|} = -n\ln\frac{|\mathbf{S}_{11}||\mathbf{S}_{22} - \mathbf{S}_{21}\mathbf{S}_{11}^{-1}\mathbf{S}_{12}|}{|\mathbf{S}_{11}||\mathbf{S}_{22}|} = -n\ln|\mathbf{I} - \mathbf{S}_{22}^{-1}\mathbf{S}_{21}\mathbf{S}_{11}^{-1}\mathbf{S}_{12}|.$$

Tato štatistika má asymptoticky $\chi^2$ rozdelenie s $p_1p_2$ stupňami voľnosti ($p_1p_2 = q,\ r = 0$).

(d) Hypotéza

$$H_0: \quad \boldsymbol{\Sigma} = diag \quad \text{(špeciálny prípad (c))}$$

( $\boldsymbol{\mu}$ nepoznáme), pričom máme výber z $N_p(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma})$ rozdelenia o rozsahu $n$ je tá istá ako hypotéza

$$H_0: \quad \mathbf{R} = \mathbf{I}$$

($\mathbf{R}$ je korelačná matica). Tvrdí, že zložky vektora $\mathbf{X}$ sú nezávislé. Test pomerom vierohodnosti má testovaciu štatistiku (jej realizáciu)

$$-2\ln\lambda = -n\ln|\mathbf{R}_{\mathbf{X},\mathbf{X}}|$$

($\mathbf{R}_{\mathbf{X},\mathbf{X}}$ je výberová korelačná matica). Táto štatistika má asymptoticky $\chi^2$ rozdelenie s $\frac{1}{2}p(p-1)$ stupňami voľnosti ($q = \frac{p(p+1)}{2},\ r = p$).

# 6. Lineárny model a metóda najmenších štvorcov

## 6.1. Úvod

Majme lineárny regresný model (LRM)

$$\mathbf{Y}_{n,1} = \mathbf{X}_{n,p}\boldsymbol{\beta}_{p,1} + \boldsymbol{\varepsilon}_{n,1}, \tag{6.1}$$

$\mathcal{E}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbf{0}$, $cov(\boldsymbol{\varepsilon}) = \sigma^2\mathbf{I}$.

**Veta 6.1.** $\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = \boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{\varepsilon} = (\mathbf{Y}-\mathbf{X}\boldsymbol{\beta})'(\mathbf{Y}-\mathbf{X}\boldsymbol{\beta})$ *nadobúda minimum (vzhľadom na* $\boldsymbol{\beta}$*) pre* $\hat{\boldsymbol{\beta}}$*, ktoré je (ľubovoľným) riešením normálnych rovníc*

$$\mathbf{X}'\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{X}'\mathbf{Y}. \tag{6.2}$$

*Toto minimum je rovnaké pre všetky riešenia rovníc (6.2).*

*Dôkaz.* $\mu(\mathbf{X}') = \mu(\mathbf{X}'\mathbf{X}) \Longrightarrow \mathbf{X}'\mathbf{Y} \in \mu(\mathbf{X}'\mathbf{X}) \Longrightarrow$ (6.2) sú vždy riešiteľné. Ich ľubovoľné riešenie označme $\hat{\boldsymbol{\beta}}$. Platí

$$(\mathbf{Y}-\mathbf{X}\boldsymbol{\beta})'(\mathbf{Y}-\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) = (\mathbf{Y}-\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}+\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}-\mathbf{X}\boldsymbol{\beta})'(\mathbf{Y}-\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}+\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}-\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) =$$

$$(\mathbf{Y}-\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})'(\mathbf{Y}-\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}) + (\hat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\beta})'\mathbf{X}'\mathbf{X}(\hat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\beta}) \geqq (\mathbf{Y}-\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})'(\mathbf{Y}-\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}).$$

Teraz už dôkaz ľahko dokončíme. $\square$

Označme ešte

$$\hat{\mathbf{Y}} = \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}$$

a

$$R_0^2 = (\mathbf{Y}-\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})'(\mathbf{Y}-\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \mathbf{Y}'(\mathbf{I}-\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^-\mathbf{X}')\mathbf{Y}.$$

## 6.2. Matica plánu X má plnú hodnosť

Nech $h(\mathbf{X}_{n,p}) = p \leqq n$.

**Veta 6.2.** *Majme LRM (6.1), pričom* $h(\mathbf{X}) = p$*. Platí*
*(a)* $\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}$, $\mathcal{E}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \boldsymbol{\beta}$
*(b)* $cov\hat{\boldsymbol{\beta}} = \sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$.

*Dôkaz.* Pozri Anděl.

**Veta 6.3.** *Pre ľubovoľné* $\mathbf{p} \in \mathcal{R}^p$ *má odhad* $\widehat{\mathbf{p}'\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{p}'\hat{\boldsymbol{\beta}}$ *minimálnu disperziu zo všetkých lineárnych nevychýlených odhadov funkcie* $\mathbf{p}'\boldsymbol{\beta}$.

*Dôkaz.* Pozri Anděl.

**Veta 6.4.**

$$\mathcal{E}\left(\frac{R_0^2}{n-p}\right) = \sigma^2.$$

*Dôkaz.*

$$\mathcal{E}\left(\frac{R_0^2}{n-p}\right) = \frac{1}{n-p}\mathcal{E}(\mathbf{Y}'(\mathbf{I}-\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}')\mathbf{Y}) =$$

$$= \frac{1}{n-p}\left\{[\boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}'(\mathbf{I}-\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}')\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + tr[(\mathbf{I}-\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}')\sigma^2\mathbf{I}]\right\} = \sigma^2. \qquad \square$$

**Veta 6.5.** *V LRM (6.1) nech* $\mathbf{Y} \sim N_n(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}, \sigma^2\mathbf{I})$, $h(\mathbf{X}) = p \leqq n$ *Platí*
*(a)* $\hat{\boldsymbol{\beta}} \sim N_n(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1})$,
*(b)* $\dfrac{R_0^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-p}$,
*(c)* $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ a $R_0^2$ *sú nezávislé,*
*(d)* $(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta})'\mathbf{X}'\mathbf{X}(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}) \sim \sigma^2\chi^2_p$ *a nezávisí od* $R_0^2$.

*Dôkaz.*
(a) zrejmé;
(b) $\dfrac{R_0^2}{\sigma^2} = \mathbf{Y}'\dfrac{\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'}{\sigma^2}\mathbf{Y} = (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})'\dfrac{\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'}{\sigma^2}(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})$ má $\chi^2_{h(\mathbf{I}-\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}')}$ rozdelenie podľa vety 1.8;
(c) $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}$ a $\mathbf{Y}'\dfrac{\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'}{\sigma^2}\mathbf{Y}$ sú nezávislé, lebo $\dfrac{\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'}{\sigma^2}$ je pozitívne semidefinitná matica a $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\sigma^2\mathbf{I}\dfrac{\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'}{\sigma^2} = \mathbf{0}$, teda podľa Anděl, str. 81 (alebo podľa vety 1.10) sú $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ a $R_0^2$ nezávislé;
(d) $(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta})'\dfrac{\mathbf{X}'\mathbf{X}}{\sigma^2}(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}) = (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})'\dfrac{\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'}{\sigma^2}(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})$ má podľa vety 1.8 $\chi^2_p$ rozdelenie; $R_0^2 = (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})'(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}) = (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})'(\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}')(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})$ a podľa vety 1.9 sú $(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta})'\mathbf{X}'\mathbf{X}(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta})$ a $R_0^2$ nezávislé. □

*Poznámka.* Hypotézu

$$H_0: \quad \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}_0 \ \asymp \ H_1: \quad \boldsymbol{\beta} \neq \boldsymbol{\beta}_0$$

testujeme štatistikou

$$\frac{(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}_0)'\mathbf{X}'\mathbf{X}(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}_0)}{R_0^2}\frac{n-p}{p},$$

ktorá má za platnosti $H_0$ rozdelenie $F_{p,n-p}$.

Zadefinujme

$$R_H^2 = \min_{\boldsymbol{\beta}:\ \mathbf{A}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{c}} (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})'(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}).$$

**Veta 6.6.** *Nech* $\mathbf{A}_{q,p}$ *má hodnosť* $h(\mathbf{A}) = q$, $\mathbf{c} \in \mathcal{R}^q$. *Platí (za predpokladu normality rozdelenia* $\mathbf{Y}$*)*
*(a)* $R_H^2 - R_0^2 = (\mathbf{A}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{c})'(\mathbf{A}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{A}')^{-1}(\mathbf{A}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{c})$,
*(b)* $\mathcal{E}(R_H^2 - R_0^2) = \sigma^2 q + (\mathbf{A}\boldsymbol{\beta} - \mathbf{c})'(\mathbf{A}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{A}')^{-1}(\mathbf{A}\boldsymbol{\beta} - \mathbf{c})$,
*(c) ak platí* $\mathbf{A}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{c}$, *tak* $F = \dfrac{n-p}{q}\dfrac{R_H^2 - R_0^2}{R_0^2}$ *má* $F_{q,n-p}$ *rozdelenie.*

*Dôkaz.* Platí

$$(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})'(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) = (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})'(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}) + (\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta})'\mathbf{X}'\mathbf{X}(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta})$$

(pozri aj v dôkaze vety 6.1).

$$R_H^2 = \min_{\boldsymbol{\beta}:\ \mathbf{A}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{c}} (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})'(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) =$$

$$\min_{\boldsymbol{\beta}:\ \mathbf{A}\boldsymbol{\beta}=\mathbf{c}} \left[(\mathbf{Y}-\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})'(\mathbf{Y}-\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}) + (\hat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\beta})'\mathbf{X}'\mathbf{X}(\hat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\beta})\right] =$$

$$(\mathbf{Y}-\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})'(\mathbf{Y}-\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}) + \min_{\boldsymbol{\beta}:\ \mathbf{A}\boldsymbol{\beta}=\mathbf{c}} (\hat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\beta})'\mathbf{X}'\mathbf{X}(\hat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\beta}).$$

Hľadajme teda

$$\min_{\boldsymbol{\beta}:\ \mathbf{A}\boldsymbol{\beta}=\mathbf{c}} (\hat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\beta})'\mathbf{X}'\mathbf{X}(\hat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\beta}),$$

čiže

$$\min_{\boldsymbol{\beta}:\ \mathbf{A}\boldsymbol{\beta}=\mathbf{c}} \left[\hat{\boldsymbol{\beta}}'\mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} - 2\hat{\boldsymbol{\beta}}'\mathbf{X}'\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}'\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}\right].$$

Metódou neurčitých Lagrangeových multiplikátorov dostávame

$$\Phi(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\lambda}) = \hat{\boldsymbol{\beta}}'\mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} - 2\hat{\boldsymbol{\beta}}'\mathbf{X}'\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}'\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + 2\boldsymbol{\lambda}'(\mathbf{A}\boldsymbol{\beta}-\mathbf{c})$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\boldsymbol{\beta}} = -2\mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} + 2\mathbf{X}'\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + 2\mathbf{A}'\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\boldsymbol{\lambda}} = 2(\mathbf{A}\boldsymbol{\beta}-\mathbf{c}) = \mathbf{0}$$

(lebo $\dfrac{\partial\mathbf{M}'\mathbf{x}}{\partial\mathbf{x}} = \mathbf{M}$, $\dfrac{\partial\mathbf{x}'\mathbf{M}\mathbf{x}}{\partial\mathbf{x}} = 2\mathbf{M}\mathbf{x}$, pozri Rao, str.98).
Dostávame rovnice

$$\mathbf{X}'\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{A}'\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}$$

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{c},$$

ktorých riešenie $\hat{\boldsymbol{\beta}}_H$ nás zaujíma. Platí postupne

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_H = -(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{A}'\boldsymbol{\lambda} + \hat{\boldsymbol{\beta}}$$

$$\mathbf{A}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{c} = \mathbf{A}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{A}'\boldsymbol{\lambda}$$

$$(\mathbf{A}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{A}')^{-1}(\mathbf{A}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{c}) = \boldsymbol{\lambda},$$

teda

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_H = \hat{\boldsymbol{\beta}} - (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{A}'(\mathbf{A}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{A}')^{-1}(\mathbf{A}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{c}).$$

Preto

$$R_H^2 - R_0^2 = \min_{\boldsymbol{\beta}:\ \mathbf{A}\boldsymbol{\beta}=\mathbf{c}} (\mathbf{Y}-\mathbf{X}\boldsymbol{\beta})'(\mathbf{Y}-\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) - (\mathbf{Y}-\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})'(\mathbf{Y}-\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}) =$$

$$\min_{\boldsymbol{\beta}:\ \mathbf{A}\boldsymbol{\beta}=\mathbf{c}} (\hat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\beta})'\mathbf{X}'\mathbf{X}(\hat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\beta}) = (\hat{\boldsymbol{\beta}}-\hat{\boldsymbol{\beta}}_H)'\mathbf{X}'\mathbf{X}(\hat{\boldsymbol{\beta}}-\hat{\boldsymbol{\beta}}_H) =$$

$$= (\mathbf{A}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{c})'(\mathbf{A}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{A}')^{-1}(\mathbf{A}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{c}).$$

(b) Zrejme $\mathbf{A}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{c} \sim N_q(\mathbf{A}\boldsymbol{\beta} - \mathbf{c}, \sigma^2\mathbf{A}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{A}')$. Preto

$$\mathcal{E}(R_H^2 - R_0^2) = (\mathbf{A}\boldsymbol{\beta} - \mathbf{c})'(\mathbf{A}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{A}')^{-1}(\mathbf{A}\boldsymbol{\beta} - \mathbf{c}) +$$
$$+ tr[(\mathbf{A}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{A}')^{-1}\sigma^2\mathbf{A}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{A}'] =$$

$$= \sigma^2 q + (\mathbf{A}\boldsymbol{\beta} - \mathbf{c})'(\mathbf{A}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{A}')^{-1}(\mathbf{A}\boldsymbol{\beta} - \mathbf{c}).$$

(c) Ak platí $H: \quad \mathbf{A}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{c}$, tak $\mathbf{A}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{c} \sim N_q(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{A}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{A}')$ a

$$(\mathbf{A}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{c})'\frac{(\mathbf{A}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{A}')^{-1}}{\sigma^2}(\mathbf{A}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{c}) =$$

$$= (\mathbf{A}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{c})'\frac{(\mathbf{A}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{A}')^{-\frac{1}{2}}\mathbf{I}[(\mathbf{A}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{A}')^{-\frac{1}{2}}]'}{\sigma^2}(\mathbf{A}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{c}) =$$

$$= \frac{R_H^2 - R_0^2}{\sigma^2} \sim \chi_q^2$$

(podľa vety 1.8). Vo vete 6.5 sme dokázali, že $\dfrac{R_0^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-p}^2$. Ďalej máme

$$R_0^2 = \mathbf{Y}'(\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}')'(\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}')\mathbf{Y}.$$

Pretože

$$cov((\mathbf{A}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{A}')^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{A}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{c}), (\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}')\mathbf{Y}) = \mathbf{0},$$

sú $R_H^2 - R_0^2$ a $R_0^2$ nezávislé. Za platnosti $H: \quad \mathbf{A}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{c}$ má

$$F = \frac{\dfrac{R_H^2 - R_0^2}{\sigma^2 q}}{\dfrac{R_0^2}{\sigma^2(n-p)}} = \frac{n-p}{q}\frac{R_H^2 - R_0^2}{R_0^2} \tag{6.3}$$

$F_{q,n-p}$ rozdelenie. $\square$

*Poznámka.* Hypotézu

$$H: \quad \mathbf{A}_{q,p}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{c}_{q,1}$$

testujeme pomocou štatistiky (6.3).

*Príklad.* Testovanie hypotézy

$$H_0: \quad \mathbf{a}_i'\boldsymbol{\beta} = c_i \;\; \times \;\; H_1: \quad \mathbf{a}_i'\boldsymbol{\beta} \neq c_i.$$

Testovacia štatistika je

$$t_i = \frac{\mathbf{a}_i'\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{a}_i'\boldsymbol{\beta}}{s\sqrt{\mathbf{a}_i'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{a}_i}} = \frac{\mathbf{a}_i'\hat{\boldsymbol{\beta}} - c_i}{s\sqrt{\mathbf{a}_i'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{a}_i}} \sim t_{n-p},$$

kde $s^2 = \dfrac{R_0^2}{n-p}$. Vskutku $R_0^2 \sim \sigma^2\chi_{n-p}^2$ (podľa vety 6.5 (b)). Za platnosti $H_0$ je $\mathbf{a}_i'\hat{\boldsymbol{\beta}} \sim N(\mathbf{a}_i'\boldsymbol{\beta} = c_i, \sigma^2\mathbf{a}_i'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{a}_i)$ (pomocou vety 6.5 (a)), $R_0^2$ a $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ su nezavislé (podľa vety 6.5 (c)), teda

$$\frac{\dfrac{\mathbf{a}_i'\hat{\boldsymbol{\beta}} - c_i}{\sigma\sqrt{\mathbf{a}_i'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{a}_i}}}{\sqrt{\dfrac{R_0^2}{\sigma^2(n-p)}}} = \frac{\mathbf{a}_i'\hat{\boldsymbol{\beta}} - c_i}{s\sqrt{\mathbf{a}_i'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{a}_i}} \sim t_{n-p}.$$

$100(1-\alpha)\%$–ný interval spoľahlivosti pre $\mathbf{a}_i'\boldsymbol{\beta}$ je

$$\left(\mathbf{a}_i'\hat{\boldsymbol{\beta}} - t_{n-p}(1-\tfrac{\alpha}{2})s\sqrt{\mathbf{a}_i'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{a}_i}, \mathbf{a}_i'\hat{\boldsymbol{\beta}} + t_{n-p}(1-\tfrac{\alpha}{2})s\sqrt{\mathbf{a}_i'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{a}_i}\right).$$

Ak chceme testovať, či súčasne platí

$$H_0: \quad \mathbf{a}_i'\boldsymbol{\beta} = c_i \quad i=,2,...,k \;\; \times \;\; H_1: \quad \exists i \in \{1,2,...,k\}\ \mathbf{a}_i'\boldsymbol{\beta} \neq c_i.$$

potom sú tu možnosti:

(a) Bonferroniho metóda je založená na trv. Bonferroniho nerovnosti, ktorá tvrdí, že ak $E_1, E_2, ..., E_k$ sú náhodné udalosti, tak

$$P\left(\bigcap_{i=1}^k E_i\right) \geqq 1 - \sum_{i=1}^k P(E_i^C) = 1 - \sum_{i=1}^k (1-P(E_i)).$$

Dôkaz tejto nerovnosti sa zakladá na rovnosti $\left(\bigcap_{i=1}^r E_i\right)^C = \bigcup_{i=1}^k E_i^C$, z ktorej vyplýva, že

$$P\left(\bigcap_{i=1}^k E_i\right) = 1 - P\left[\left(\bigcap_{i=1}^k E_i\right)^C\right] = 1 - P\left(\bigcup_{i=1}^k E_i^C\right) \geqq 1 - \sum_{i=1}^k (1-P(E_i)),$$

čo vyplýva zo subaditívnosti pravdepodobnostnej miery $P$, a síce $P\left(\bigcup_{i=1}^k E_i^C\right) \leqq \sum_{i=1}^k P(E_i^C)$. Pomocou Bonferroniho nerovnosti dostávame

$$P\left(\bigcap_{i=1}^k \left\{\mathbf{a}_i'\boldsymbol{\beta} \in \left(\mathbf{a}_i'\hat{\boldsymbol{\beta}} \pm t_{n-p}(1-\tfrac{\alpha}{2k})s\sqrt{\mathbf{a}_i'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{a}_i}\right)\right\}\right) \geqq 1 - k\frac{\alpha}{k} = 1-\alpha.$$

(b) Metóda maximálneho modulu.

Nech $\mathbf{a}_1'\hat{\boldsymbol{\beta}}, ..., \mathbf{a}_k'\hat{\boldsymbol{\beta}}$ sú nezávislé, t.j. $\mathbf{a}_i'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{a}_j' = 0$ pre $i \neq j$,

$t_i = \dfrac{\mathbf{a}_i'\hat{\boldsymbol{\beta}} - c_i}{s\sqrt{\mathbf{a}_i'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{a}_i}} \sim t_{n-p}, \quad i = 1,2,...,k$, nech ďalej $v(k, n-p, \alpha)$ je $\alpha$–kritická hodnota rozdelenia $\max_{1 \leqq i \leqq k} |t_i|$, teda

$$1-\alpha = P\left\{\max_{1\leqq i\leqq k} |t_i| \leqq v(k,n-p,\alpha)\right\} = P\left\{|t_i| \leqq v(k,n-p,\alpha) \quad \forall\ i\right\}.$$

Pravdepodobnosť, že $k$ intervalov

$$\mathbf{a}_i'\hat{\boldsymbol{\beta}} \pm v(k,n-p,\alpha)s\sqrt{\mathbf{a}_i'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{a}_i}, \quad i = 1,2,...,k$$

súčasne pokryje všetkých $k$ lineárnych kombinácií $\mathbf{a}_i'\boldsymbol{\beta}$ je $1-\alpha$. Hodnoty $v(k, n-p, \alpha)$ sú napr. v Lamoš, Potocký, tab. VII. Ak sú $\mathbf{a}_i'\hat{\boldsymbol{\beta}}$ lineárne závislé, treba $v$ nahradiť inou hodnotou, pozri napr. Hahn, Hendrickson, Biometrika 58, 1971. Intervaly v tomto prípade zostanú rovnaké.

(c) Scheffeho metóda.

Je založená na vete 6.8, ktorá zase vychádza z nasledujúcej lemy

**Lema 6.7.** *Nech* $\mathbf{M}_{t,t}$ *je pozitívne definitná matica. Pre ľubovoľný* $\mathbf{x} \in \mathcal{R}^t$ *platí*

$$\mathbf{x}'\mathbf{M}\mathbf{x} \leqq 1 \Longleftrightarrow (\mathbf{h}'\mathbf{x})^2 \leqq \mathbf{h}'\mathbf{M}^{-1}\mathbf{h} \ \ \forall\ \mathbf{h} \in \mathcal{R}^t.$$

*Dôkaz.* pozri Anděl, str. 147.

**Veta 6.8.** *Nech lineárny priestor* $\mathcal{B} \subset \mathcal{R}^p$ *je generovaný vektormi* $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_k$*, čiže* $\mathcal{B} = \mu(\mathbf{a}_1 \vdots \dots \vdots \mathbf{a}_k)_{p,k}$ *a nech* $h(\mathbf{a}_1 \vdots \dots \vdots \mathbf{a}_k) = k$*. Potom*

$$P\left\{|\mathbf{a}'\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{a}'\boldsymbol{\beta}| \leqq s\sqrt{kF_{k,n-p}(1-\alpha)\mathbf{a}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{a}} \qquad \forall\ \mathbf{a} \in \mathcal{B}\right\} = 1 - \alpha.$$

*Dôkaz.* Označme $\mathbf{A}' = (\mathbf{a}_1 \vdots \dots \vdots \mathbf{a}_k)$, teda $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1' \\ \vdots \\ \mathbf{a}_k' \end{pmatrix}_{k,p}$, pričom $k(\mathbf{A}) = k$. Podľa vety 6.6 (c) má

$$\frac{(n-p)(\mathbf{A}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{A}\boldsymbol{\beta})'(\mathbf{A}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{A}')^{-1}(\mathbf{A}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{A}\boldsymbol{\beta})}{k(n-p)s^2} =$$

$$= \frac{(\mathbf{A}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{A}\boldsymbol{\beta})'(\mathbf{A}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{A}')^{-1}(\mathbf{A}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{A}\boldsymbol{\beta})}{ks^2} \sim F_{k,n-p}$$

rozdelenie. Teda

$$P\left\{(\mathbf{A}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{A}\boldsymbol{\beta})'\frac{(\mathbf{A}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{A}')^{-1}}{ks^2F_{k,n-p}(1-\alpha)}(\mathbf{A}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{A}\boldsymbol{\beta}) \leqq 1\right\} = 1 - \alpha$$

a podľa lemy 6.7 je

$$P\left\{\left[\mathbf{h}'(\mathbf{A}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{A}\boldsymbol{\beta})\right]^2 \leqq [ks^2F_{k,n-p}(1-\alpha)]\mathbf{h}'\mathbf{A}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{A}'\mathbf{h} \quad \forall \mathbf{h} \in \mathcal{R}^k\right\} = 1 - \alpha,$$

čiže

$$P\left\{\left[(\mathbf{A}'\mathbf{h})'(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta})\right]^2 \leqq ks^2F_{k,n-p}(1-\alpha)(\mathbf{A}'\mathbf{h})'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{A}'\mathbf{h} \quad \forall \mathbf{h} \in \mathcal{R}^k\right\} = 1 - \alpha,$$

čo je to isté ako

$$P\left\{(\mathbf{a}'\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{a}'\boldsymbol{\beta})^2 \leqq ks^2F_{k,n-p}(1-\alpha)\mathbf{a}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{a} \quad \forall \mathbf{a} \in \mu(\mathbf{A}') = \mathcal{B}\right\} = 1 - \alpha. \qquad \square$$

## 6.3. Matica plánu $\mathbf{X}$ nemá plnú hodnosť

Nech $h(\mathbf{X}_{n,p}) = r < p \leqq n$.

Normálne rovnice majú veľa rôznych riešení, pričom jedno riešenie $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ nemôžeme považovať za odhad $\boldsymbol{\beta}$. Treba odstrániť nejednoznačnosť. Robí sa to nasledujúcim spôsobom. Uvažujme maticu $\mathbf{B}_{p-r,p}$, ktorej riadky sú nezávislé, t.j. $h(\mathbf{B}) = p - r$, pričom tieto riadky nezávisia od riadkov matice plánu $\mathbf{X}$. Preto $h\begin{pmatrix}\mathbf{X}\\ \mathbf{B}\end{pmatrix}_{n+p-r,p} = p$ (matica plnej hodnosti v stĺpcoch). Pre maticu $\begin{pmatrix}\mathbf{X}_{n,p}\\ \mathbf{B}_{p-r,p}\end{pmatrix} = \mathbf{F}_{n+p-r,p}$ platí, že $h(\mathbf{F}) = p$. Preto $p \times p$ matica $\mathbf{F}'\mathbf{F} = (\mathbf{X}'\ \mathbf{B}')\begin{pmatrix}\mathbf{X}\\ \mathbf{B}\end{pmatrix} = \mathbf{X}'\mathbf{X} + \mathbf{B}'\mathbf{B}$ je regulárna ($\mu(\mathbf{F}'\mathbf{F}) = \mu(\mathbf{F}')$, čiže aj $h(\mathbf{F}'\mathbf{F}) = h(\mathbf{F}') = h(\mathbf{F}) = p$). K normálnym rovniciam $\mathbf{X}'\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{X}'\mathbf{Y}$ pridáme rovnice $\mathbf{B}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$ a dostávame

$$\mathbf{X}'\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{B}'\mathbf{B}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{F}'\mathbf{F}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{X}'\mathbf{Y},$$

ktorých riešenie

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{F}'\mathbf{F})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}$$

je jediné. Pre toto $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ platí

$$\mathcal{E}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = (\mathbf{F}'\mathbf{F})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} = (\mathbf{F}'\mathbf{F})^{-1}(\mathbf{X}'\mathbf{X} + \mathbf{B}'\mathbf{B})\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}.$$

Dostávame teda "zúženie" systému normálnych rovníc, ktorý má takto jediné riešenie (postup pri analýze rozptylu).

**Definícia 6.9.** $\mathbf{a}'\boldsymbol{\beta}$ *je lineárne nevychýlene odhadnuteľná ak existuje pre ňu lineárny nevychýlený odhad, t.j. ak existuje* $\mathbf{l} \in \mathcal{R}^n$, *že* $\mathcal{E}_\beta(\mathbf{l}'\mathbf{Y}) = \mathbf{a}'\boldsymbol{\beta} \quad \forall \boldsymbol{\beta} \in \mathcal{R}^p$.

**Lema 6.10.** $\mathbf{a}'\boldsymbol{\beta}$ *je lineárne nevychýlene odhadnuteľná práve vtedy ak* $\mathbf{a} \in \mu(\mathbf{X}')$.

*Dôkaz.* nájdete v Anděl.

**Veta 6.11.** *Nech* $\mathbf{a}'\boldsymbol{\beta}$ *je lineárne nevychýlene odhadnuteľná,* $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ *je ľubovoľné riešenie normálnych rovníc, t.j.* $\mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{X}'\mathbf{Y}$. *Potom*

*(a)* $\mathbf{a}'\hat{\boldsymbol{\beta}}$ *je jednoznačný,*

*(b)* $\mathbf{a}'\hat{\boldsymbol{\beta}}$ *je NNLO (najlepší nevychylený lineárny odhad)* $\mathbf{a}'\boldsymbol{\beta}$, *t.j. pre každý iný lineárny nevychýlený odhad* $\widetilde{\mathbf{a}'\boldsymbol{\beta}}$ *funkcie* $\mathbf{a}'\boldsymbol{\beta}$ *platí* $\mathcal{D}(\widetilde{\mathbf{a}'\boldsymbol{\beta}}) - \mathcal{D}(\mathbf{a}'\hat{\boldsymbol{\beta}}) \geqq 0$.

*Dôkaz.* Nájdete v Anděl.

Skôr ako ukážeme test hypotézy $H:\ \mathbf{A}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$, dokážeme si dve lemy.

**Lema 6.12.** *Nech* $\mathbf{A}_{m,k}, \mathbf{B}_{n,k}$ *sú ľubovoľné pevné matice,* $h(\mathbf{B}) = r \leqq \min\{n, k\}$. *Platí*

$$h\begin{pmatrix}\mathbf{A}\\ \mathbf{B}\end{pmatrix} = h[\mathbf{A}(\mathbf{I} - \mathbf{B}'(\mathbf{B}\mathbf{B}')^-\mathbf{B}] + h(\mathbf{B}). \tag{6.4}$$

*Dôkaz.* Matica $(\mathbf{B}' \vdots \mathbf{I} - \mathbf{B}'(\mathbf{B}\mathbf{B}')^-\mathbf{B})_{k,n+k}$ má hodnosť $k$, lebo každý stĺpec matice $\mathbf{B}'$, teda $\mathbf{B}'\mathbf{e}_i$ je kolmý na všetky stĺpce matice $\mathbf{I} - \mathbf{B}'(\mathbf{B}\mathbf{B}')^-\mathbf{B}$, teda na $(\mathbf{I} -$

$\mathbf{B}'(\mathbf{BB}')^-\mathbf{B})\mathbf{e}_j, \quad j = 1,2,...,k$. lebo $\mathbf{e}_i'\mathbf{B}(\mathbf{I}-\mathbf{B}'(\mathbf{BB}')^-\mathbf{B})\mathbf{e}_j = 0, \quad j = 1,2,...,k$. Teda $\mathbf{B}'$ má $r$ lineárne nezávislých stĺpcov, $\mathbf{I}-\mathbf{B}'(\mathbf{BB}')^-\mathbf{B}$ má $k-r$ lineárne nezávislých stĺpcov (lebo $h(\mathbf{I}-\mathbf{B}'(\mathbf{BB}')^-\mathbf{B}) = k-r$). Tiež $\mathbf{B}'\mathbf{e}_i$ je kolmé na $(\mathbf{I}-\mathbf{B}'(\mathbf{BB}')^-\mathbf{B})\mathbf{e}_j, \quad j \in \{1,2,...,k\}$, teda $(\mathbf{B}' \vdots \mathbf{I}-\mathbf{B}'(\mathbf{BB}')^-\mathbf{B})_{k,n+k}$ má $k$ lineárne nezávislých stĺpcov, teda $h(\mathbf{B}' \vdots \mathbf{I}-\mathbf{B}'(\mathbf{BB}')^-\mathbf{B}) = k$ (plná hodnosť v riadkoch). Teraz

$$h\begin{pmatrix}\mathbf{A}\\ \mathbf{B}\end{pmatrix} = h\begin{pmatrix}\mathbf{A}\\ \mathbf{B}\end{pmatrix}(\mathbf{B}' \vdots \mathbf{I}-\mathbf{B}'(\mathbf{BB}')^-\mathbf{B}) = h\begin{pmatrix}\mathbf{AB}' & \mathbf{A}(\mathbf{I}-\mathbf{B}'(\mathbf{BB}')^-\mathbf{B})\\ \mathbf{BB}' & \mathbf{0}\end{pmatrix} =$$

$$= h\left[\begin{pmatrix}\mathbf{I} & -\mathbf{AB}'(\mathbf{BB}')^-\\ \mathbf{0} & \mathbf{I}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{AB}' & \mathbf{A}(\mathbf{I}-\mathbf{B}'(\mathbf{BB}')^-\mathbf{B})\\ \mathbf{BB}' & \mathbf{0}\end{pmatrix}\right] =$$

$$= h\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{A}(\mathbf{I}-\mathbf{B}'(\mathbf{BB}')^-\mathbf{B})\\ \mathbf{BB}' & \mathbf{0}\end{pmatrix} = h(\mathbf{B}) + h[\mathbf{A}(\mathbf{I}-\mathbf{B}'(\mathbf{BB}')^-\mathbf{B})]. \qquad \square$$

**Lema 6.13.** *Ak $h(\mathbf{X}_{n,p}) = r < p \leqq n$, $\mathbf{A}_{q,p}$ má hodnosť $h(\mathbf{A}) = q$, $h\begin{pmatrix}\mathbf{X}\\ \mathbf{A}\end{pmatrix} = r+q$ (riadky $\mathbf{A}$ sú lineárne nezávislé s riadkami $\mathbf{X}$), tak ľubovoľné $\boldsymbol{\theta} \in \mu(\mathbf{X})$ sa dá písať ako $\mathbf{X}\boldsymbol{\delta}$, kde $\mathbf{A}\boldsymbol{\delta} = \mathbf{0}$.*

*Dôkaz.* Zrejme $\mu(\mathbf{X}) \supset \mu(\mathbf{X}(\mathbf{I}-\mathbf{A}'(\mathbf{AA}')^-\mathbf{A}))$. Ale podľa (6.4) je hodnosť $h(\mathbf{X}(\mathbf{I}-\mathbf{A}'(\mathbf{AA}')^-\mathbf{A})) = h\begin{pmatrix}\mathbf{X}\\ \mathbf{A}\end{pmatrix} - h(\mathbf{A}) = r+q-q = r = h(\mathbf{X})$, teda $\mu(\mathbf{X}) = \mu(\mathbf{X}(\mathbf{I}-\mathbf{A}'(\mathbf{AA}')^-\mathbf{A}))$ t.j. každé $\boldsymbol{\theta} \in \mu(\mathbf{X})$ sa dá písať ako $\mathbf{X}\boldsymbol{\delta}$, kde $\mathbf{A}\boldsymbol{\delta} = \mathbf{0}$. $\square$

Ak chceme testovať $H: \quad \mathbf{A}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$ keď $h(\mathbf{X}) = r < p, \quad h(\mathbf{A}_{q,p}) = q$, pričom $h\begin{pmatrix}\mathbf{X}\\ \mathbf{A}\end{pmatrix} = r+q$, tak podľa lemy 6.13

$$R_H^2 = \min_{\boldsymbol{\beta}:\ \mathbf{A}\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}} (\mathbf{Y}-\mathbf{X}\boldsymbol{\beta})'(\mathbf{Y}-\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) = \min_{\boldsymbol{\gamma}} (\mathbf{Y}-\mathbf{X}\boldsymbol{\gamma})'(\mathbf{Y}-\mathbf{X}\boldsymbol{\gamma})' = R_0^2$$

a $H_0$ nevieme testovať (podľa vety 6.6).

**Definícia 6.14.** *Hypotéza $H_0: \ \mathbf{A}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$ je testovateľná, ak riadky matice $\mathbf{A}$ sú lineárne kombinácie riadkov matice $\mathbf{X}$, t.j. ak existuje matica $\mathbf{M}_{q,n}$, že $\mathbf{A} = \mathbf{MX}$.*

*Poznámka.* Hypotéza $H_0: \ \mathbf{A}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$ je testovateľná, ak každá lineárna kombinácia $\mathbf{a}_i'\boldsymbol{\beta} = \{\mathbf{A}\}_{i.}\boldsymbol{\beta}$ je lineárne nevychýlene odhadnuteľná.

*Poznámka.* Ak máme $H_0: \ \mathbf{A}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{c}$, tak vezmime $\boldsymbol{\beta}_0$–ľubovoľné riešenie systému $\mathbf{A}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{c}$ a vytvorme $\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}_0$. Model $\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$ prepíšeme na model $\mathbf{Y}-\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}_0 = \mathbf{X}(\boldsymbol{\beta}-\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}_0)+\boldsymbol{\varepsilon}$, čiže (pri označení observačného vektora $\mathbf{Y}^* = \mathbf{Y}-\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}_0$) dostávame model $\mathbf{Y}^* = \mathbf{X}\boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{\varepsilon}$. V tomto modeli testujeme hypotézu $\mathbf{A}\boldsymbol{\delta} = \mathbf{0}$. Pôvodná hypotéza $H_0: \ \mathbf{A}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{c}$ je teda testovateľná práve vtedy ak hypotéza $\mathbf{A}\boldsymbol{\delta} = \mathbf{0}$ je testovateľná v "novom" modeli, teda ak $\mathbf{A} = \mathbf{MX}$.

**Veta 6.15.** *Nech* $H_0 : \mathbf{A}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{c}$, *kde* $\mathbf{A}_{q,p}$ *má hodnosť* $h(\mathbf{A}) = q \leqq r$, *je testovateľná, t.j.* $\mathbf{A} = \mathbf{MX}$ *(*$\mathbf{Y}$ *je normálne rozdelený). Nech*

$$R_0^2 = \min_{\boldsymbol{\beta}} (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})'(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}),$$

$$R_H^2 = \min_{\boldsymbol{\beta}:\ \mathbf{A}\boldsymbol{\beta}=\mathbf{c}} (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})'(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}).$$

*Ak* $H_0$ *platí, tak*

*(a)* $R_H^2 - R_0^2 = (\mathbf{A}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{c})'(\mathbf{A}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^-\mathbf{A}')^{-1}(\mathbf{A}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{c})$, *kde* $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ *je ľubovoľné riešenie normálnych rovníc* $\mathbf{X}'\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{X}'\mathbf{Y}$,

*(b)* $\dfrac{n-r}{q}\dfrac{R_H^2 - R_0^2}{R_0^2} \sim F_{q,n-r}$.

*Dôkaz.* pozri Anděl.

# 7. Viacrozmerná regresná analýza

## 7.1. Úvod

Na každom z $n$ objektov robíme $p$ meraní. Výsledky meraní na $i-$tom objekte sú realizácie náhodného vektora

$$\mathbf{Y}_i' = (Y_{i1}Y_{i2}...Y_{ip}) = (x_{i1}x_{i2}...x_{iq}) \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & ... & \beta_{1p} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & ... & \beta_{2p} \\ \vdots & & & \\ \beta_{q1} & \beta_{q2} & ... & \beta_{qp} \end{pmatrix} + \varepsilon_i',$$

pričom $Y_{il}$ je meranie $l-$tého znaku na $i-$tom objekte. Všetky merania dávajú maticu $\mathbf{Y}_{n,p}$ náhodných veličín (jej $i-$ty riadok značí $p$ meraní na $i-$tom objekte), teda

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} & ... & Y_{1p} \\ Y_{21} & Y_{22} & ... & Y_{2p} \\ \vdots & & & \\ Y_{n1} & Y_{n2} & ... & Y_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & ... & x_{1q} \\ x_{21} & x_{22} & ... & x_{2q} \\ \vdots & & & \\ x_{n1} & x_{n2} & ... & x_{nq} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & ... & \beta_{1p} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & ... & \beta_{2p} \\ \vdots & & & \\ \beta_{q1} & \beta_{q2} & ... & \beta_{qp} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_1' \\ \boldsymbol{\varepsilon}_2' \\ \vdots \\ \boldsymbol{\varepsilon}_n' \end{pmatrix}$$

čiže

$$\mathbf{Y}_{n,p} = \mathbf{X}_{n,q}\mathbf{B}_{q,p} + \boldsymbol{\varepsilon}_{n,p}. \tag{7.1}$$

V modeli (7.1) je $\mathbf{X}_{n,q}$ daná pevná známa matica, $\mathbf{B}$ matica neznámych parametrov, $\boldsymbol{\varepsilon}_i = (\varepsilon_{i1}\varepsilon_{i2}...\varepsilon_{ip})'$ je chybový vektor na $i-$tom objekte a

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n,p} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \dots & \varepsilon_{1p} \\ \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \dots & \varepsilon_{1p} \\ \vdots & & & \\ \varepsilon_{n1} & \varepsilon_{n2} & \dots & \varepsilon_{np} \end{pmatrix}$$

je matica náhodných chýb. Platí $\boldsymbol{\varepsilon}_i \sim N_p(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma})$, $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, ..., \boldsymbol{\varepsilon}_n$ sú navzájom nezávislé, $\mathbf{B}_{q,p} = (\boldsymbol{\beta}_1, ..., \boldsymbol{\beta}_p)$. Vektor meraní $i-$teho znaku je $(Y_{1i}Y_{2i}...Y_{ni})' = \mathbf{Z}_i \in \mathcal{R}^n$, $i = 1, 2, ..., p$. Teda

$$\mathcal{E}(\mathbf{Z}_j) = \mathbf{X}_{n,q}\boldsymbol{\beta}_j, \quad \boldsymbol{\beta}_j = \begin{pmatrix} \beta_{1j} \\ \beta_{2j} \\ \vdots \\ \beta_{qj} \end{pmatrix} \in \mathcal{R}^q,$$

$$cov(\mathbf{Z}_j) = \sigma_{jj}\mathbf{I}, \quad j = 1, 2, ..., p,$$

$$\sigma_{jj} = \{\boldsymbol{\Sigma}\}_{jj}$$

$$cov(\mathbf{Z}_i, \mathbf{Z}_j) = \begin{pmatrix} cov(Y_{1i}, Y_{1j}) & cov(Y_{1i}, Y_{2j}) & ... & cov(Y_{1i}, Y_{nj}) \\ cov(Y_{2i}, Y_{1j}) & cov(Y_{2i}, Y_{2j}) & ... & cov(Y_{2i}, Y_{nj}) \\ \vdots & & & \\ cov(Y_{ni}, Y_{1j}) & cov(Y_{ni}, Y_{2j}) & ... & cov(Y_{ni}, Y_{nj}) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sigma_{ij} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_{ij} & & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_{ij} \end{pmatrix} = \sigma_{ij}\mathbf{I}_{n,n} = \{\boldsymbol{\Sigma}\}_{ij}\mathbf{I}_{n,n}.$$

Iné vyjadrenie modelu je

$$vec\mathbf{Y} = \mathbf{Z}_{np,1} = \begin{pmatrix} \mathbf{Z}_1 \\ \mathbf{Z}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{Z}_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{X} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & & & \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{X} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\beta}_1 \\ \boldsymbol{\beta}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\beta}_p \end{pmatrix}_{pq,1} + vec\boldsymbol{\varepsilon},$$

čiže

$$vec\mathbf{Y} = (\mathbf{I}_{p,p} \otimes \mathbf{X}_{n,q})vec\mathbf{B} + vec\boldsymbol{\varepsilon},$$

$$cov(vec\mathbf{Y}) = \boldsymbol{\Sigma}_{p,p} \otimes \mathbf{I}_{n,n}.$$

Ak $h(\mathbf{X}) = q \leqq n$, tak najlepší lineárny nevychýlený odhad $\boldsymbol{\beta}_i$ je

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_i = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Z}_i$$

a nevychýlený odhad $\sigma_{ii}$ je

$$\frac{\mathbf{Z}_i'(\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}')\mathbf{Z}_i}{n-q} = \frac{R_0^2(i,i)}{n-q} = \hat{\sigma}_{ii}.$$

Teda NNLO parametrov $\mathbf{B}$ je

$$\hat{\mathbf{B}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}.$$

Označme

$$R_0^2(i,j) = (\mathbf{Z}_i - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}_i)'(\mathbf{Z}_j - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}_j).$$

Pre vektor $\mathbf{Z}_i + \mathbf{Z}_j$ platí

$$\mathcal{E}(\mathbf{Z}_i + \mathbf{Z}_j) = \mathbf{X}(\boldsymbol{\beta}_i + \boldsymbol{\beta}_j), \quad cov(\mathbf{Z}_i + \mathbf{Z}_j) = (\sigma_{ii} + 2\sigma_{ij} + \sigma_{jj})\mathbf{I}.$$

NNLO $\boldsymbol{\beta}_i + \boldsymbol{\beta}_j$ je

$$(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'(\mathbf{Z}_i + \mathbf{Z}_j) = \hat{\boldsymbol{\beta}}_i + \hat{\boldsymbol{\beta}}_j.$$

Nevychýleným odhadom

$$\sigma_{ii} + \widehat{2\sigma_{ij}} + \sigma_{jj} = \frac{(\mathbf{Z}_i + \mathbf{Z}_j)'(\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}')(\mathbf{Z}_i + \mathbf{Z}_j)}{n-q} =$$

$$= \frac{R_0^2(i,i)}{n-q} + \frac{R_0^2(j,j)}{n-q} + 2\frac{R_0^2(i,j)}{n-q},$$

teda nevychýleným odhadom $\sigma_{ij}$ je

$$\hat{\sigma}_{ij} = \frac{R_0^2(i,j)}{n-q}.$$

Matica

$$\mathbf{R}_0 = \begin{pmatrix} R_0^2(1,1) & R_0^2(1,2) & \dots & R_0^2(1,p) \\ R_0^2(2,1) & R_0^2(2,2) & \dots & R_0^2(2,p) \\ \vdots & & & \\ R_0^2(p,1) & R_0^2(p,2) & \dots & R_0^2(p,p) \end{pmatrix}$$

je *zvyškovou maticou súčtov štvorcov a súčinov.* Nevychýleným odhadom matice $\boldsymbol{\Sigma}$ je teda

$$\hat{\boldsymbol{\Sigma}} = \frac{1}{n-q}\mathbf{R}_0.$$

Dá sa písať

$$\mathbf{R}_0 = \mathbf{Y}'(\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}')\mathbf{Y} = \mathbf{Y}'\mathbf{P}\mathbf{Y}.$$

Ak sú merania na jednotlivých objektoch nezávislé a majú mnohorozmerné normálne rozdelenie s tou istou kovariančnou maticou $\boldsymbol{\Sigma}$, potom môžeme považovať $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, ..., \boldsymbol{\varepsilon}_n$ za náhodný výber z $N_p(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma})$. V takom prípade má $vec\boldsymbol{\varepsilon}$ rozdelenie $N_{np}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}_{p,p} \otimes \mathbf{I}_{n,n})$ (vyplýva z definície mnohorozmerného normálneho rozdelenia). Preto v takom prípade $vec\mathbf{Y} \sim N_{np}((\mathbf{I}_{p,p} \otimes \mathbf{X})vec\mathbf{B}, \Sigma_{p,p} \otimes \mathbf{I}_{n,n})$. Platí veta

**Veta 7.1.** *Nech v modeli (7.1) je* $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, ..., \boldsymbol{\varepsilon}_n$ *náhodný výber z* $N_p(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma})$. *Potom*

*(a)* $\hat{\mathbf{B}}$ *má normálne rozdelenie (rozumie sa tým, že* $vec\hat{\mathbf{B}}$ *má mnohorozmerné normálne rozdelenie).*

*(b)* $\mathbf{Y}'\mathbf{P}\mathbf{Y} \sim W_p(n-q, \boldsymbol{\Sigma})$

*(c)* $\hat{\mathbf{B}}$ *a* $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}$ *sú nezávislé (rozumie sa tým, že* $vec\hat{\mathbf{B}}$ *a* $vec\hat{\boldsymbol{\Sigma}}$ *sú nezávislé).*

*Dôkaz.*

(a) Pretože $\hat{\mathbf{B}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}$, je $vec\hat{\mathbf{B}} = vec(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y} = vec(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}\mathbf{I}$ $= (\mathbf{I} \otimes (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}')vec\mathbf{Y}$, z čoho je tvrdenie (a) evidentné.

(b) $\mathbf{Y}'\mathbf{P}\mathbf{Y} = \mathbf{Y}'\mathbf{P}'\mathbf{P}\mathbf{Y} = (\mathbf{P}\mathbf{Y})'\mathbf{P}(\mathbf{X}\mathbf{B} + \boldsymbol{\varepsilon}) = \boldsymbol{\varepsilon}'\mathbf{P}\boldsymbol{\varepsilon} \sim W_p(w, \boldsymbol{\Sigma}) \iff \mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$, (pozri vetu 2.9), čo je splnené. V tomto prípade $w = tr\mathbf{P} = n - q$

(c) $vec\hat{\mathbf{B}} = (\mathbf{I} \otimes (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}')vec\mathbf{Y}$ a $vec\hat{\mathbf{\Sigma}} = \frac{1}{n-q}vec\mathbf{R}_0 = \frac{1}{n-q}vec(\mathbf{Y}'(\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}')\mathbf{Y}) = \frac{1}{n-q}vec(\mathbf{Y}'(\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}')'(\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}')\mathbf{Y})$. Stačí ak ukážeme, že $(\mathbf{I} \otimes (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}')vec\mathbf{Y}$ a $vec(\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}')\mathbf{Y} = (\mathbf{I} \otimes (\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'))vec\mathbf{Y}$ sú nezávislé. Pretože

$$(\mathbf{I} \otimes (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}')[cov(vec\mathbf{Y})](\mathbf{I} \otimes (\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}')) =$$

$$= (\mathbf{I} \otimes (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}')(\mathbf{\Sigma} \otimes \mathbf{I})(\mathbf{I} \otimes (\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}')) = \mathbf{0},$$

dostávame aj tretie tvrdenie vety. □

## 7.2. Testovanie hypotéz

V modeli

$$\mathbf{Y}_{n,p} = \mathbf{X}_{n,q}\mathbf{B}_{q,p} + \boldsymbol{\varepsilon}_{n,p},$$

kde $h(\mathbf{X}) = q(\leqq n)$, $\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_1' \\ \boldsymbol{\varepsilon}_2' \\ \vdots \\ \boldsymbol{\varepsilon}_n' \end{pmatrix}$, pričom $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, ..., \boldsymbol{\varepsilon}_n$ je náhodný výber z $N_p(\mathbf{0}, \mathbf{\Sigma})$, testujeme hypotézu

$$H_0: \quad \mathbf{C}_1\mathbf{B} = \mathbf{D},$$

$\mathbf{C}_1$ je známa $g \times q$ matica, $h(\mathbf{C}_1) = g$, $\mathbf{D}$ je známa $g \times p$ matica.

**Veta 7.2.** *V modeli (7.1) nech* $h(\mathbf{X}) = q$, $n - q \geqq p - 1$, $\mathbf{\Sigma}$ *je regulárna,* $\mathbf{B}_0$ *je ľubovoľné riešenie rovníc* $\mathbf{C}_1\mathbf{B} = \mathbf{D}$. *Označme* $\mathbf{Y}_+ = \mathbf{Y} - \mathbf{X}\mathbf{B}_0$. *Za platnosti* $H_0: \mathbf{C}_1\mathbf{B} = \mathbf{D}$, $(h(\mathbf{C}_1) = g)$ *má*

$$\Lambda = \frac{|\mathbf{Y}'\mathbf{P}\mathbf{Y}|}{|\mathbf{Y}'\mathbf{P}\mathbf{Y} + \mathbf{Y}_+'\mathbf{P}_2\mathbf{Y}_+|}$$

*Wilksovo* $\Lambda(p, n-q, g)$ *rozdelenie, pričom* $\mathbf{P} = \mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'$,
$\mathbf{P}_2 = \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{C}_1'(\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{C}_1')^{-1}\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'$.

*Dôkaz.*

$$\mathbf{Y}'\mathbf{P}\mathbf{Y} = (\mathbf{X}\mathbf{B} + \boldsymbol{\varepsilon})'\mathbf{P}(\mathbf{X}\mathbf{B} + \boldsymbol{\varepsilon}) = \boldsymbol{\varepsilon}'\mathbf{P}\boldsymbol{\varepsilon}.$$

Podľa vety 2.9 má $\mathbf{Y}'\mathbf{P}\mathbf{Y}$ rozdelenie $W_p(r, \mathbf{\Sigma})$ práve vtedy ak $\mathbf{P}^2\mathbf{P}$, pričom v takomto prípade $r = tr\mathbf{P}$. Ľahko sa vidí, že naozaj $\mathbf{P}^2\mathbf{P}$ a $r = tr\mathbf{P} = n - q$, teda $\mathbf{Y}'\mathbf{P}\mathbf{Y} \sim W_p(n-q, \mathbf{\Sigma})$. Tiež platí

$$\mathbf{Y}_+'\mathbf{P}_2\mathbf{Y}_+ = (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\mathbf{B}_0)'\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{C}_1'(\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{C}_1')^{-1}\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\mathbf{B}_0)$$

a za platnosti $H_0$ je

$$\mathbf{Y}_+'\mathbf{P}_2\mathbf{Y}_+ =$$

$$= (\mathbf{X}(\mathbf{B} - \mathbf{B}_0) + \boldsymbol{\varepsilon})'\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{C}_1'(\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{C}_1')^{-1}\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'(\mathbf{X}(\mathbf{B} - \mathbf{B}_0) + \boldsymbol{\varepsilon}) =$$

$$= \boldsymbol{\varepsilon}'\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{C}_1'(\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{C}_1')^{-1}\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{\varepsilon}.$$

Podľa vety 2.9 má $\mathbf{Y}'_+\mathbf{P}_2\mathbf{Y}_+$ rozdelenie $W_p(g,\mathbf{\Sigma})$. Podľa vety 2.13 sú $\mathbf{Y}'\mathbf{P}\mathbf{Y}$ a $\mathbf{Y}'_+\mathbf{P}_2\mathbf{Y}_+$ nezávislé, lebo

$$(\mathbf{I}-\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}')\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{C}_1'(\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{C}_1')^{-1}\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'=\mathbf{0}.$$

Podľa poznámky pod vetou 4.2 má

$$\frac{|\mathbf{Y}'\mathbf{P}\mathbf{Y}|}{|\mathbf{Y}'\mathbf{P}\mathbf{Y}+\mathbf{Y}'_+\mathbf{P}_2\mathbf{Y}_+|}$$

Wilksovo $\Lambda(p,n-q,g)$ rozdelenie. $\square$

Hypotézu $H_0:\ \ \mathbf{C}_1\mathbf{B}=\mathbf{D}$ teda testujeme pomocou $\Lambda(p,n-q,g)$ rozdelenia. Zamietame ju pre malé hodnoty $\Lambda$.

*Poznámka.* Podobne v modeli (7.1), kde $h(\mathbf{X})=q$, $\mathbf{\Sigma}$ je regulárna, môžeme testovať všeobecnejšiu hypotézu

$$H_0:\ \ \mathbf{C}_1\mathbf{B}\mathbf{M}_1=\mathbf{D},$$

kde $\mathbf{M}_1$ je známa $p\times r$ matica s $h(\mathbf{M}_1)=r$. Z modelu (7.1) totiž vyplýva model

$$\mathbf{Y}_{n,p}\mathbf{M}_1=\mathbf{X}_{n,q}\mathbf{B}_{q,p}\mathbf{M}_1+\boldsymbol{\varepsilon}_{n,p}\mathbf{M}_1, \tag{7.2}$$

v ktorom je matica observácií $\mathbf{Y}\mathbf{M}_1$, matica plánu $\mathbf{X}$ a matica "neznámych parametrov" $\mathbf{B}\mathbf{M}_1$, pričom $\boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{\varepsilon}\sim W_p(n,\mathbf{\Sigma})$ a podľa vety 2.6 má $\mathbf{M}_1'\boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{M}_1\sim W_p(r,\mathbf{M}_1'\mathbf{\Sigma}\mathbf{M}_1)$ rozdelenie. $(\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{M}_1)'$ je preto náhodný výber z $N_p(\mathbf{0},\mathbf{M}_1'\mathbf{\Sigma}\mathbf{M}_1)$ rozdelenia. Teraz už úplne analogicky ako vo vete 7.2 dostávame, že za platnosti $H_0:\ \ \mathbf{C}_1\mathbf{B}\mathbf{M}_1=\mathbf{D}$ má

$$\frac{|\mathbf{E}|}{|\mathbf{H}+\mathbf{E}|}$$

$\Lambda(r,n-q,g)$ rozdelenie, pričom $\mathbf{E}=(\mathbf{Y}\mathbf{M}_1)'\mathbf{P}(\mathbf{Y}\mathbf{M}_1)$ a $\mathbf{H}=[(\mathbf{Y}-\mathbf{X}\mathbf{B}_0)\mathbf{M}_1]'\mathbf{P}_2$ $[(\mathbf{Y}-\mathbf{X}\mathbf{B}_0)\mathbf{M}_1]$.

### 7.3. Intervaly spoľahlivosti pre parametre modelu

Pomocou kapitoly 7.2 nájdeme intervaly spoľahlivosti pre lineárne kombinácie $\mathbf{b}'\mathbf{C}_1\mathbf{B}\mathbf{a}$ (alebo $\mathbf{b}'\mathbf{C}_1\mathbf{B}\mathbf{M}_1\mathbf{a}$) v prípadoch, že $\mathbf{a},\mathbf{b}$ sú pevne dané; $\mathbf{a}$ je pevne dané a pre každé $\mathbf{b}$; pre každé $\mathbf{a},\mathbf{b}$.

Nech $\mathbf{B}$ sú skutočné parametre (ich skutočná hodnota). Položíme tentokrát $\mathbf{Y}_+=\mathbf{Y}-\mathbf{X}\mathbf{B}$. Nech $\mathbf{a}\in\mathcal{R}^p$, $\mathbf{b}\in\mathcal{R}^g$ sú pevne dané. Podľa lemy 2.12

$$\mathbf{b}'\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}_+\mathbf{a}=vec(\mathbf{b}'\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}_+\mathbf{a})=$$

$$=vec(\mathbf{b}'\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{a})=(\mathbf{a}'\otimes\mathbf{b}'\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}')vec\boldsymbol{\varepsilon},$$

pričom $cov(vec\boldsymbol{\varepsilon})=cov(vec\mathbf{Y})=\mathbf{\Sigma}_{p,p}\otimes\mathbf{I}_{n,n}$ (pozri kapitolu 7.1). Preto

$$\mathcal{D}(\mathbf{b}'\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}_+\mathbf{a})=\mathcal{D}((\mathbf{a}'\otimes\mathbf{b}'\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}')vec\boldsymbol{\varepsilon})=$$

$$= (\mathbf{a}'\otimes\mathbf{b}'\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}')(\mathbf{\Sigma}\otimes\mathbf{I})(\mathbf{a}\otimes\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{C}_1'\mathbf{b}) = (\mathbf{a}'\mathbf{\Sigma}\mathbf{a})(\mathbf{b}'\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{C}_1'\mathbf{b}).$$

Už v kapitole 7.2 sme ukázali, že $\mathbf{Y}'\mathbf{P}\mathbf{Y} = \mathbf{Y}'(\mathbf{I}-\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}')\mathbf{Y} \sim W_p(n-q,\mathbf{\Sigma})$ a teda pre $\mathbf{a}\neq\mathbf{0}$ je podľa vety 2.8

$$\frac{\mathbf{a}'\mathbf{Y}'\mathbf{P}\mathbf{Y}\mathbf{a}}{\mathbf{a}'\mathbf{\Sigma}\mathbf{a}} \sim \chi^2_{n-q}.$$

Samozrejme

$$\frac{\mathbf{a}'\mathbf{Y}'\mathbf{P}\mathbf{Y}\mathbf{a}}{\mathbf{a}'\mathbf{\Sigma}\mathbf{a}} \sim \chi^2_{n-q} = \frac{\mathbf{a}'\boldsymbol{\varepsilon}'\mathbf{P}\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{a}}{\mathbf{a}'\mathbf{\Sigma}\mathbf{a}} = \frac{(\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{a})'\mathbf{P}\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{a}}{\mathbf{a}'\mathbf{\Sigma}\mathbf{a}}$$

a

$$\mathbf{b}'\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}_+\mathbf{a} = \mathbf{b}'\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{a},$$

pričom $\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{a} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_1'\mathbf{a} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_2'\mathbf{a} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\varepsilon}_n'\mathbf{a} \end{pmatrix} \sim N_n(\mathbf{0},(\mathbf{a}\mathbf{\Sigma}\mathbf{a})\mathbf{I}_{n,n})$. Podľa vety 1.10 sú

$$\frac{\mathbf{a}'\mathbf{Y}'\mathbf{P}\mathbf{Y}\mathbf{a}}{\mathbf{a}'\mathbf{\Sigma}\mathbf{a}} \quad \text{a} \quad \mathbf{b}'\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}_+\mathbf{a}$$

nezávislé, lebo

$$\frac{\mathbf{P}}{\mathbf{a}'\mathbf{\Sigma}\mathbf{a}}(\mathbf{a}'\mathbf{\Sigma}\mathbf{a})\mathbf{I}\frac{1}{2}\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{C}_1'\mathbf{b} = \mathbf{0}.$$

Pretože $\mathbf{b}'\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}_+\mathbf{a} = \mathbf{b}'\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{a}$ má $N_1(0,(\mathbf{a}'\mathbf{\Sigma}\mathbf{a})(\mathbf{b}'\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{C}_1'\mathbf{b}))$ rozdelenie, má $\dfrac{(\mathbf{b}'\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}_+\mathbf{a})^2}{(\mathbf{b}'\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{C}_1'\mathbf{b})(\mathbf{a}'\mathbf{\Sigma}\mathbf{a})}$ rozdelenie $\chi^2_1$ a je nezávislé od $\dfrac{\mathbf{a}'\mathbf{Y}'\mathbf{P}\mathbf{Y}\mathbf{a}}{\mathbf{a}'\mathbf{\Sigma}\mathbf{a}}$, ktoré má $\chi^2_{n-q}$ rozdelenie. Dostávame, že

$$\frac{(\mathbf{b}'\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}_+\mathbf{a})^2}{(\mathbf{b}'\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{C}_1'\mathbf{b})(\mathbf{a}'\mathbf{Y}'\mathbf{P}\mathbf{Y}\mathbf{a})} \sim \frac{1}{n-q}F_{1,n-q}.$$

Pre pevné $\mathbf{a}\in\mathcal{R}^p, \mathbf{b}\in\mathcal{R}^g$

$$P\left\{\frac{(\mathbf{b}'\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}\mathbf{a}-\mathbf{b}'\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{X}\mathbf{B}\mathbf{a})^2}{(\mathbf{b}'\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{C}_1'\mathbf{b})(\mathbf{a}'\mathbf{Y}'\mathbf{P}\mathbf{Y}\mathbf{a})} \leqq \frac{1}{n-q}F_{1,n-q}(1-\alpha)\right\} = 1-\alpha,$$

čiže

$$P\Big\{(\mathbf{b}'\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}\mathbf{a}-\mathbf{b}'\mathbf{C}_1\mathbf{B}\mathbf{a})^2 \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{n-q}F_{1,n-q}(1-\alpha)\mathbf{b}'\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{C}_1'\mathbf{b}\mathbf{a}'\mathbf{Y}'\mathbf{P}\mathbf{Y}\mathbf{a}\Big\} = 1-\alpha,$$

čo je to isté ako

$$(7.3)\quad P\Big\{\mathbf{b}'\mathbf{C}_1\mathbf{B}\mathbf{a}\in\Big(\mathbf{b}'\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}\mathbf{a}-$$

$$-\sqrt{\frac{1}{n-q}F_{1,n-q}(1-\alpha)\mathbf{b}'\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{C}_1'\mathbf{b}\mathbf{a}'\mathbf{Y}'\mathbf{P}\mathbf{Y}\mathbf{a}},\ \mathbf{b}'\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}\mathbf{a}+$$

$$+\sqrt{\frac{1}{n-q}F_{1,n-q}(1-\alpha)\mathbf{b}'\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{C}_1'\mathbf{b}\mathbf{a}'\mathbf{Y}'\mathbf{P}\mathbf{Y}\mathbf{a}}\Big)\Big\} = 1-\alpha.$$

*Poznámka.* Tento výsledok dostaneme aj keď uvažujeme regresný model $\mathbf{Ya} = \mathbf{XBa} + \boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{a}$, kde observačný vektor je $\mathbf{Ya}$, vektor parametrov je $\mathbf{Ba}$ a chybový vektor $\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{a}$ (pozri príklad za vzťahom (6.3)).

Hľadajme teraz intervaly spoľahlivosti, ktoré súčasne pokrývajú všetky $\mathbf{b}'\mathbf{C}_1\mathbf{Ba}$, kde $\mathbf{a} \in \mathcal{R}^p$ je pevné, ale $\mathbf{b}$ sa mení a môže byť ľubovoľné z $\mathcal{R}^g$. Budeme potrebovať nasledujúcu lemu.

**Lema 7.3.** *Nech $\mathbf{A}_{t,t}, \mathbf{N}_{t,t}$ sú symetrické matice, pričom $\mathbf{N}$ je pozitívne definitná. Potom*

*a.) pre ľubovoľné $\mathbf{c} \in \mathcal{R}^t,\ \mathbf{c} \neq \mathbf{0}$*

$$\max_{\substack{\mathbf{x}\in\mathcal{R}^t \\ \mathbf{x}\neq\mathbf{0}}} \frac{(\mathbf{c}'\mathbf{x})^2}{\mathbf{x}'\mathbf{N}\mathbf{x}} = \mathbf{c}'\mathbf{N}^{-1}\mathbf{c}, \tag{7.4}$$

*pričom maximum sa dosahuje pre $\mathbf{x} = \mathbf{N}^{-1}\mathbf{c}$;*

*b.)*

$$\max_{\substack{\mathbf{x}\in\mathcal{R}^t \\ \mathbf{x}\neq\mathbf{0}}} \frac{\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}}{\mathbf{x}'\mathbf{N}\mathbf{x}} = \lambda_1, \tag{7.5}$$

*kde $\lambda_1$ je najväčšia vlastná hodnota matice $\mathbf{A}\mathbf{N}^{-1}$.*

*Dôkaz.* Schwarzova nerovnost tvrdí, že pre ľubovoľné dva vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{R}^t$ platí $(\mathbf{x}'\mathbf{y})^2 \leqq \mathbf{x}'\mathbf{x}\ \mathbf{y}'\mathbf{y}$. Maticu $\mathbf{N}$ môžeme písať ako $\mathbf{N}^{\frac{1}{2}}\mathbf{N}^{\frac{1}{2}}$, maticu $\mathbf{N}^{-1}$ môžeme písať ako $\mathbf{N}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{N}^{-\frac{1}{2}}$ (pozri Anděl, str. 64). Preto pre vektory $\mathbf{u} = N^{\frac{1}{2}}\mathbf{x},\ \mathbf{v} = N^{-\frac{1}{2}}\mathbf{y}$ $(\mathbf{x}, \mathbf{y}$ ľubovoľné z $\mathcal{R}^t)$ platí

$$(\mathbf{u}'\mathbf{v})^2 = (\mathbf{x}'N^{\frac{1}{2}}N^{-\frac{1}{2}}\mathbf{y})^2 = (\mathbf{x}'\mathbf{y})^2 \leqq \mathbf{u}'\mathbf{u}\ \mathbf{v}'\mathbf{v} = \mathbf{x}'\mathbf{N}\mathbf{x}\ \mathbf{y}'\mathbf{N}^{-1}\mathbf{y},$$

čiže pre ľubovoľné $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{R}^t$

$$(\mathbf{x}'\mathbf{y})^2 \leqq \mathbf{x}'\mathbf{N}\mathbf{x}\ \mathbf{y}'\mathbf{N}^{-1}\mathbf{y}. \tag{7.6}$$

a.) Vezmime ľubovoľné $\mathbf{c} \in \mathcal{R}^t,\ \mathbf{c} \neq \mathbf{0}$. Pre každé $\mathbf{x} \in \mathcal{R}^t$ platí zo (7.6)

$$(\mathbf{c}'\mathbf{x})^2 \leqq \mathbf{x}'\mathbf{N}\mathbf{x}\ \mathbf{c}'\mathbf{N}^{-1}\mathbf{c},$$

čiže pre každé $\mathbf{x} \in \mathcal{R}^t,\ \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ platí

$$\frac{(\mathbf{c}'\mathbf{x})^2}{\mathbf{x}'\mathbf{N}\mathbf{x}} \leqq \mathbf{c}'\mathbf{N}^{-1}\mathbf{c},$$

teda

$$\max_{\substack{\mathbf{x}\in\mathcal{R}^t \\ \mathbf{x}\neq\mathbf{0}}} \frac{(\mathbf{c}'\mathbf{x})^2}{\mathbf{x}'\mathbf{N}\mathbf{x}} \leqq \mathbf{c}'\mathbf{N}^{-1}\mathbf{c},$$

pričom je ľahko vidieť, že maximum sa dosahuje pre $\mathbf{x} = \mathbf{N}^{-1}\mathbf{c}$.

b.) Označme $\lambda_1 \geqq \lambda_2 \geqq ... \geqq \lambda_t$ korene rovnice $|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{N}| = 0$. Pretože

$$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{N}| = 0 \Longleftrightarrow |\mathbf{A}\mathbf{N}^{-1} - \lambda\mathbf{I}||\mathbf{N}| = 0 \Longleftrightarrow |\mathbf{A}\mathbf{N}^{-1} - \lambda\mathbf{I}| = 0,$$

sú $\lambda_1, ..., \lambda_t$ aj práve všetky vlastné hodnoty matice $\mathbf{A}\mathbf{N}^{-1}$. Podľa Rao, 1c.3 (II) existuje matica $\mathbf{R}$, ktorá je regulárna a platí

$$\mathbf{A} = \mathbf{R}^{-1'}\mathbf{\Lambda}\mathbf{R}^{-1}, \quad \mathbf{N} = \mathbf{R}^{-1'}\mathbf{R}^{-1}, \tag{7.7}$$

kde

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \lambda_t \end{pmatrix}.$$

Pretože každý vektor $\mathbf{x} \in \mathcal{R}^t$ môžeme písať ako $\mathbf{R}^{-1}\mathbf{u}$, $\mathbf{u} \in \mathcal{R}^t$ (čiže $\mathcal{R}^t = \{\mathbf{R}^{-1}\mathbf{u},\ \mathbf{u} \in \mathcal{R}^t\}$), platí zo (7.7)

$$\max_{\substack{\mathbf{u}\in\mathcal{R}^t \\ \mathbf{u}\neq\mathbf{0}}} \frac{\mathbf{u}'\mathbf{A}\mathbf{u}}{\mathbf{u}'\mathbf{N}\mathbf{u}} = \max_{\substack{\mathbf{u}\in\mathcal{R}^t \\ \mathbf{u}\neq\mathbf{0}}} \frac{\mathbf{u}'\mathbf{R}^{-1'}\mathbf{\Lambda}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{u}}{\mathbf{u}'\mathbf{R}^{-1'}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{u}} = \max_{\substack{\mathbf{x}\in\mathcal{R}^t \\ \mathbf{x}\neq\mathbf{0}}} \frac{\mathbf{x}'\mathbf{\Lambda}\mathbf{x}}{\mathbf{x}'\mathbf{x}} = \lambda_1,$$

lebo

$$\frac{\mathbf{x}'\mathbf{\Lambda}\mathbf{x}}{\mathbf{x}'\mathbf{x}} = \frac{\sum_{i=1}^t \lambda_i x_i^2}{\sum x_i^2} \leqq \lambda_1 \frac{\sum x_i^2}{\sum x_i^2} = \lambda_1$$

a rovnosť sa dosahuje napr. pre $\mathbf{x} = (1, 0, ..., 0)'$. $\square$

Podľa (7.4) sa maximum výrazu

$$\frac{(\mathbf{b}'\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}_+\mathbf{a})^2}{(\mathbf{b}'\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{C}_1'\mathbf{b})(\mathbf{a}'\mathbf{Y}'\mathbf{P}\mathbf{Y}\mathbf{a})} \tag{7.8}$$

dosahuje vzhľadom na $\mathbf{b}$ ($\mathbf{a}$ je pevné, teda $\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}_+\mathbf{a}$ je "fixné") ak

$$\mathbf{b} = (\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{C}_1')^{-1}\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}_+\mathbf{a}$$

a toto maximum je

$$\frac{\mathbf{a}'\mathbf{Y}_+'[\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{C}_1'(\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{C}_1')^{-1}\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}']\mathbf{Y}_+\mathbf{a}}{\mathbf{a}'\mathbf{Y}'\mathbf{P}\mathbf{Y}\mathbf{a}} =$$

$$= \frac{\mathbf{a}'[\mathbf{Y}_+'\mathbf{P}_2\mathbf{Y}_+]\mathbf{a}}{\mathbf{a}'\mathbf{E}\mathbf{a}} = \frac{\mathbf{a}'\mathbf{H}\mathbf{a}}{\mathbf{a}'\mathbf{E}\mathbf{a}}. \tag{7.9}$$

Ľahko sa ukáže (pozri vetu 7.2 a vetu 2.9), že $\mathbf{H} = \mathbf{Y}_+'\mathbf{P}_2\mathbf{Y}_+ \sim W_p(g, \mathbf{\Sigma})$ (tentokrát $\mathbf{Y}_+ = \mathbf{Y} - \mathbf{X}\mathbf{B}$), $\mathbf{E} = \mathbf{Y}'\mathbf{P}\mathbf{Y} \sim W_p(n - q, \mathbf{\Sigma})$, pričom $\mathbf{H}$ a $\mathbf{E}$ sú nezávislé (podľa vety 2.13). Preto podľa vety 2.8 má

$$\frac{\mathbf{a}'\mathbf{H}\mathbf{a}}{\mathbf{a}'\mathbf{\Sigma}\mathbf{a}} \sim \chi_g^2$$

a

$$\frac{\mathbf{a}'\mathbf{E}\mathbf{a}}{\mathbf{a}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{a}} \sim \chi^2_{n-q}$$

a posledné dve náhodné veličiny sú nezávislé. Dostávame, že

$$\frac{n-q}{g}\frac{\mathbf{a}'\mathbf{H}\mathbf{a}}{\mathbf{a}'\mathbf{E}\mathbf{a}} \sim F_{g,n-q}. \tag{7.10}$$

Zo vzťahov (7.8) a (7.10) dostávame, že pre pevné $\mathbf{a} \in \mathcal{R}^p$

$$P\left\{\frac{(\mathbf{b}'\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}_+\mathbf{a})^2}{(\mathbf{b}'\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{C}_1'\mathbf{b})(\mathbf{a}'\mathbf{Y}'\mathbf{P}\mathbf{Y}\mathbf{a})} \leqq \right.$$
$$\left. \leqq \frac{g}{n-q}F_{g,n-q}(1-\alpha) \quad \text{pre každé } \mathbf{b} \in \mathcal{R}^g \right\} = 1-\alpha,$$

čiže

$$P\left\{(\mathbf{b}'\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}\mathbf{a} - \mathbf{b}'\mathbf{C}_1\mathbf{B}\mathbf{a})^2 \leqq \right.$$
$$\left. \leqq \frac{g}{n-q}F_{g,n-q}(1-\alpha)\mathbf{b}'\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{C}_1'\mathbf{b}\mathbf{a}'\mathbf{Y}'\mathbf{P}\mathbf{Y}\mathbf{a} \quad \text{pre každé } \mathbf{b} \in \mathcal{R}^g \right\} =$$
$$= 1-\alpha.$$

Teda intervaly spoľahlivosti, ktoré súčasne pokrývajú všetky kombinácie $\mathbf{b}'\mathbf{C}_1\mathbf{B}\mathbf{a}$ ($\mathbf{a}$ pevné, $\mathbf{b} \in \mathcal{R}^g$ sa mení) s pravdepodobnosťou $1-\alpha$ sú

$$\mathbf{b}'\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}\mathbf{a} \pm \sqrt{\frac{g}{n-q}F_{g,n-q}(1-\alpha)\mathbf{b}'\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{C}_1'\mathbf{b}\mathbf{a}'\mathbf{Y}'\mathbf{P}\mathbf{Y}\mathbf{a}}. \tag{7.11}$$

*Poznámka.* Tento výsledok sa zhoduje s vetou 6.8 (Scheffeho metóda), ak uvažujeme regresný model $\mathbf{Y}\mathbf{a} = \mathbf{X}\mathbf{B}\mathbf{a} + \boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{a}$.

Teraz preberme prípad, keď "sa menia" vektory $\mathbf{a}$ aj $\mathbf{b}$ ($\mathbf{a} \in \mathcal{R}^p,\ \mathbf{b} \in \mathcal{R}^g$). Podľa (7.5) je

$$\max_{\substack{\mathbf{a}\in\mathcal{R}^p\\ \mathbf{a}\neq\mathbf{0}}} \frac{\mathbf{a}'\mathbf{H}\mathbf{a}}{\mathbf{a}'\mathbf{E}\mathbf{a}} = \lambda_1,$$

kde $\lambda_1$ je najväčšia vlastná hodnota matice $\mathbf{H}\mathbf{E}^{-1}$. Poznamenávame len, že $\mathbf{E} \sim W_p(n-q, \boldsymbol{\Sigma})$ a preto $\mathbf{E} = \sum_{i=1}^{n-q} \boldsymbol{\xi}_i\boldsymbol{\xi}_i'$, kde $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, ..., \boldsymbol{\xi}_{n-q}$ sú nezávislé $N_p(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma})$ rozdelené a podľa Anděl, str.121 platí pre $n-q \geqq p$, že $P\{\mathbf{E}$ je pozitívne definitná matica $\} = 1$. Podľa Kubáček, Kubáčková, Volaufová, str. 445 je $\mathbf{H}+\mathbf{E}$ pozitívne definitná matica ($\mathbf{H}$ je pozitívne semidefinitná a $\mathbf{E}$ je pozitívne definitná matica). Preto $\lambda = -1$ nemôže byť vlastným číslom matice $\mathbf{H}\mathbf{E}^{-1}$. Ak by totiž $-1$ bola vlastným číslom matice $\mathbf{H}\mathbf{E}^{-1}$, tak $|\mathbf{H}\mathbf{E}^{-1}+\mathbf{I}| = 0$, ale $|\mathbf{H}\mathbf{E}^{-1}+\mathbf{I}| = |(\mathbf{H}+\mathbf{E})\mathbf{E}^{-1}| = |\mathbf{H}+\mathbf{E}||\mathbf{E}^{-1}| \neq 0$. Ďalej máme, že $\lambda$ ($\neq -1$) je vlastným číslom matice $\mathbf{H}\mathbf{E}^{-1}$ práve vtedy ak

$$|\mathbf{H}\mathbf{E}^{-1} - \lambda\mathbf{I}| = 0 \iff \left(\tfrac{1}{1+\lambda}\right)^p |\mathbf{H}\mathbf{E}^{-1} - \lambda\mathbf{I}||\mathbf{E}| = 0 \iff$$

$$\iff \left(\tfrac{1}{1+\lambda}\right)^p |\mathbf{H} - \lambda\mathbf{E}| = 0 \iff |\mathbf{H}\tfrac{1}{1+\lambda} - \tfrac{\lambda}{1+\lambda}\mathbf{E}| = 0 \iff$$

$$\iff |\mathbf{H}\left(1 - \tfrac{1}{1+\lambda}\right) - \tfrac{\lambda}{1+\lambda}\mathbf{E}| = 0 \iff |\mathbf{H} - \tfrac{\lambda}{1+\lambda}(\mathbf{H}+\mathbf{E})| = 0 \iff$$

$$\iff |(\mathbf{H}+\mathbf{E})^{-1}\mathbf{H} - \tfrac{\lambda}{1+\lambda}\mathbf{I}| = 0,$$

čiže práve vtedy ak $\dfrac{\lambda}{1+\lambda}$ je vlastné číslo matice $(\mathbf{H}+\mathbf{E})^{-1}\mathbf{H}$. Funkcia $\dfrac{\lambda}{1+\lambda}$ je rastúca pre $\lambda \in (-\infty, \infty)$, preto ak $\lambda_1$ je najväčšia vlastná hodnota matice $\mathbf{HE}^{-1}$, tak $\dfrac{\lambda_1}{1+\lambda_1}$ je najväčšia vlastná hodnota matice $(\mathbf{H}+\mathbf{E})^{-1}\mathbf{H}$. Nasledujúce ekvivalencie nám dokazujú, že $\lambda$ je vlastná hodnota $\mathbf{E}^{-1}\mathbf{H}$ práve vtedy ak je vlastnou hodnotou $\mathbf{HE}^{-1}$:

$$(7.12) \qquad |\mathbf{HE}^{-1} - \lambda\mathbf{I}| = 0 \iff |\mathbf{HE}^{-\frac{1}{2}} - \lambda\mathbf{E}^{\frac{1}{2}}||\mathbf{E}^{-\frac{1}{2}}| = 0 \iff$$

$$\iff |\mathbf{E}^{\frac{1}{2}}||\mathbf{E}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{HE}^{-\frac{1}{2}} - \lambda\mathbf{I}||\mathbf{E}^{-\frac{1}{2}}| = 0 \iff |\mathbf{E}^{-\frac{1}{2}}||\mathbf{E}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{HE}^{-\frac{1}{2}} - \lambda\mathbf{I}||\mathbf{E}^{\frac{1}{2}}| = 0 \iff$$

$$\iff |\mathbf{E}^{-1}\mathbf{H} - \lambda\mathbf{I}| = 0.$$

Ak $\lambda$ je vlastná hodnota matice $\mathbf{E}^{-1}\mathbf{H}$ (teda práve aj matice $\mathbf{HE}^{-1}$), tak zo (7.12) je $\lambda \geqq 0$. Preto $\theta = \dfrac{\lambda_1}{1+\lambda_1}$ – najväčšia vlastná hodnota matice $(\mathbf{H}+\mathbf{E})^{-1}\mathbf{H}$ musí byť v intervale $< 0, 1)$. Keď $\theta$ považujeme za náhodnú premennú (najväčšiu vlastnú hodnotu náhodnej matice $(\mathbf{H}+\mathbf{E})^{-1}\mathbf{H}$), tak $\theta$ má podľa definície 4.3 $\theta(p, n-q, g)$ rozdelenie. Platí tiež pre $\alpha-$kritickú hodnotu rozdelenia $\theta$, t.j. pre také $\theta_\alpha$, že $P\{\theta > \theta_\alpha\} = \alpha$, že

$$P\{\theta \leqq \theta_\alpha\} = 1 - \alpha,$$

čiže

$$P\left\{\tfrac{\lambda_1}{1+\lambda_1} = \theta \leqq \theta_\alpha\right\} = 1 - \alpha,$$

$$P\{\lambda_1 \leqq (1+\lambda_1)\theta_\alpha\} = 1 - \alpha,$$

$$P\{\lambda_1(1-\theta_\alpha) \leqq \theta_\alpha\} = 1 - \alpha,$$

$$(7.13) \qquad P\{\lambda_1 \leqq \tfrac{\theta_\alpha}{1-\theta_\alpha}\} = 1 - \alpha$$

(pretože $\lambda_1 \geqq 0$, je $\theta \in < 0, 1)$). Vráťme sa teraz k (7.9). Ak $\mathbf{a} \in \mathcal{R}^p$, $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ (pevné), tak

$$\max_{\substack{\mathbf{b}\in\mathcal{R}^g \\ \mathbf{b}\neq\mathbf{0}}} \frac{(\mathbf{b}'\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}_+\mathbf{a})^2}{(\mathbf{b}'\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{C}_1'\mathbf{b})(\mathbf{a}'\mathbf{Y}'\mathbf{P}\mathbf{Y}\mathbf{a})} = \frac{\mathbf{a}'\mathbf{H}\mathbf{a}}{\mathbf{a}'\mathbf{E}\mathbf{a}}.$$

(pozri (7.10)). Podľa (7.5) je zase

$$\max_{\substack{\mathbf{a}\in\mathcal{R}^p \\ \mathbf{a}\neq\mathbf{0}}} \frac{\mathbf{a}'\mathbf{H}\mathbf{a}}{\mathbf{a}'\mathbf{E}\mathbf{a}} = \lambda_1,$$

kde $\lambda_1$ je najväčšia vlastná hodnota matice $\mathbf{E}^{-1}\mathbf{H}$. Podľa (7.13) $P\{\lambda_1 \leqq \frac{\theta_\alpha}{1-\theta_\alpha}\} = 1-\alpha$. Preto

$$P\Big\{(\mathbf{b}'\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}\mathbf{a} - \mathbf{b}'\mathbf{C}_1\mathbf{B}\mathbf{a})^2 \leqq$$

$$\leqq \frac{\theta_\alpha}{1-\theta_\alpha}\mathbf{b}'\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{C}_1'\mathbf{b}\mathbf{a}'\mathbf{Y}'\mathbf{P}\mathbf{Y}\mathbf{a} \quad \text{pre každé } \mathbf{a} \in \mathcal{R}^p \text{ a každé } \mathbf{b} \in \mathcal{R}^g \Big\} =$$

$$= 1-\alpha,$$

čiže intervaly spoľahlivosti, ktoré súčasne pokrývajú všetky lineárne kombinácie $\mathbf{b}'\mathbf{C}_1\mathbf{B}\mathbf{a}$ s pravdepodobnosťou $1-\alpha$ sú

$$\mathbf{b}'\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}\mathbf{a} \pm \sqrt{\frac{\theta_\alpha}{1-\theta_\alpha}\mathbf{b}'\mathbf{C}_1(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{C}_1'\mathbf{b}\mathbf{a}'\mathbf{Y}'\mathbf{P}\mathbf{Y}\mathbf{a}}.$$

Ak chceme vedieť intervaly spoľahlivosti pre lineárne kombinácie $\mathbf{b}'\mathbf{C}_1\mathbf{B}\mathbf{M}_1\mathbf{a}$, kde $\mathbf{M}_1$ je matica $p \times r$ s hodnosťou $h(\mathbf{M}) = r$, postupujeme tak, že vytvoríme model (7.2) a v ňom postupujeme úplne analogicky ako v tejto kapitole.

*Príklad (Lamoš, Potocký, str.246).* V tabuľke sú uvedené hmotnosť pšenice $Y_i$ a hmotnosť slamy $Z_i$ z $i-$teho pozemku, $i = 1, 2, ..., 7$. $x_{1i} = 1$, $i = 1, 2, ..., 7$ a $x_{2i}$ znamená množstvo hnojiva použitého na $i-$tom pozemku. Za predpokladu, že závislosť $Y_i$ a $Z_i$ od $x_{1i}$ a $x_{2i}$ je lineárna, nájdite regresné koeficienty. Potom testujte hypotézu o tom, či závislosť je významná, t.j. overte, či $\beta_2 = \gamma_2 = 0$. Hladina významnosti $\alpha = 0.05$.

| pozemok | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $Y$ | 30 | 35 | 31 | 18 | 28 | 18 | 29 |
| $Z$ | 35 | 38 | 30 | 20 | 30 | 22 | 28 |
| $x_2$ | 15 | 21 | 18 | 9 | 14 | 9 | 12 |

*Riešene.* Model je

$$Y_i = \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i}$$

$$Z_i = \gamma_1 x_{1i} + \gamma_2 x_{2i}$$