Teorie her

Monika Kroupová

Obsah

Teorie her

- Statické hry
- Hra v normálním tvaru
- Dominované strategie
- Nashova rovnováha
- Pravděpodobnostní rozšíření a Nashova věta
- Dynamické hry
- Zpětná indukce
- Opakované hry
- Modely duopolu a příklady aplikací v ekonomii

Statické (strategické) hry s úplnou informací

- hráči (jednotlivci) se rozhodují ve stejný okamžik (např. kámen, nůžky, papír)
- hráči mají úplné informace, tzn. vědí, jaké mají ostatní strategie a výplaty
- statická hra se skládá z:
    - množiny hráčů (seznam účastníků hry)
    - množiny akcí (dostupných strategií) každého hráče
    - výplatní funkce jednotlivých hráčů pro každou kombinaci strategií (výplata = užitek z výsledku hry)

Definice

Hra v normálním tvaru pro n hráčů je tvořena prostorem strategií jednotlivých hráčů $S_1, S_2, \dots, S_n$ a výplatními funkcemi $u_1, u_2, \dots, u_n$, kde každé u_i zobrazuje $S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n$ do $\mathbb{R}$. Takovou hru ozn. $H = \{S_1, S_2, \dots, S_n; u_1, u_2, \dots, u_n\}$.

Vězňovo dilema

Dva zločinci jsou obviněni ze spáchání závažného trestného činu. Odsouzeni, ale mohou být, pokud se alespoň jeden z nich přizná. Jestliže se přizná právě jeden z nich, bude osvobozen, zatímco druhý dostane 10 let vězení. Pokud se přiznají oba, dostanou oba 9 let vězení. Pokud se ani jeden nepřizná, půjdou každý na 1 rok do vězení pouze za drobnější přestupek. Za výplaty budeme brát roky strávené na svobodě v následujících 10 letech.

	2P	2N
1P	1,1	10,0
1N	0,10	9,9

- 1P – 1. hráč se přizná, 1N – první hráč se nepřizná
- na 1. místě jsou výplaty prvního, na 2. výplaty druhého hráče

Dominované strategie

Striktně dominovaná strategie je strategie, která ve všech možných situacích dává horší výsledek („je vždy horší“), než jiná pevně daná strategie

Definice

Nechť $H = \{S_1, S_2, \dots, S_n; u_1, u_2, \dots, u_n\}$ je hra v normálním tvaru. Nechť s_i' a s_i'' jsou 2 různé strategie i-tého hráče. Řekneme, že strategie s_i' je striktně dominovaná strategií s_i'', jestliže pro každou kombinaci strategií ostatních hráčů je výplata i-tého hráče při strategii s_i' menší než při strategii s_i'', tedy

$$u_i(s_1, \dots, s_{i-1}, s_i', s_{i+1}, \dots, s_n) < u_i(s_1, \dots, s_{i-1}, s_i'', s_{i+1}, \dots, s_n)$$

pro každou volbu $s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n$ z množiny $S_1 \times \dots \times S_{i-1} \times S_{i+1} \times \dots \times S_n$.

Redukce dominovaných strategií

- předpoklad racionality:
  - oba hráči jsou racionální
  - oba hráči vědí o druhém, že je racionální a vědí, že on to ví o nich
- racionální hráč nehraje striktně dominované strategie
- za předpokladu racionality, striktně dominované strategie ve statických hrách ignorujeme → postupně je eliminujeme (škrtáme) → hra se redukuje na jednodušší

	2P	2N
1P	1,1	10,0
1N	0,10	9,9

- Vězňovo dilema: strategie N je striktně dominovaná strategií P
- výsledek vězňova dilematu je (P,P) (přesto, že (N,N) dává oběma lepší výsledek)

Redukce dominovaných strategií

Příklad

- strategie 1. hráče: A,B
- strategie 2. hráče: C,D,E

	C	D	E
A	2,1	2,3	1,2
B	1,4	1,2	3,1

→ E je striktně dominovaná D (škrtneme E)

	C	D
A	2,1	2,3
B	1,4	1,2

→ B je striktně dominovaná A (škrtneme B)

	C	D
A	2,1	2,3

→ C je striktně dominovaná D (škrtneme C)

- Výsledek hry: první hraje A a druhý hraje D.

Nashova rovnováha

Nashova rovnováha nastává, pokud se nikomu nevyplatí odchýlit od jeho strategie při daných strategiích ostatních hráčů.
(jinak: zafixuji strategie ostatních a ptám se, jestli si polepším, když se odchýlím od své strategie)

Definice

Nechť $H = \{S_1, S_2, \ldots, S_n; u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ je hra v normálním tvaru. Pak n-tice strategií $s_1^*, s_2^*, \ldots, s_n^*$ dává Nashovu rovnováhu, jestliže pro každého hráče je s_i^* nejlepší odpověď (příp. jednou z nejlepších odpovědí, pokud je jich více) na strategii určenou pro ostatních $n-1$ hráčů $s_1^*, \ldots, s_{i-1}^*, s_{i+1}^*, \ldots, s_n^*$. Tedy

$$u_i(s_1^*, \ldots, s_{i-1}^*, s_i^*, s_{i+1}^*, \ldots, s_n^*) \geq u_i(s_1^*, \ldots, s_{i-1}^*, s_i, s_{i+1}^*, \ldots, s_n^*)$$

pro každé $s_i \in S_i$. Jinými slovy, s_i je řešením maximalizační úlohy

$$\max_{s_i \in S_i} u_i(s_1^*, \ldots, s_{i-1}^*, s_i, s_{i+1}^*, \ldots, s_n^*)$$

Využití Nashovy rovnováhy

- všechny hry nemají striktně dominované strategie $\rightarrow$ některé hry nemůžeme analyzovat redukcí striktně dominovaných strategií a musíme použít Nashovu rovnováhu

Příklad

Souboj pohlaví – dva hráči (1. muž,2. žena) se rozhodují, co budou odpoledne dělat, jestli půjdou na koncert (K), nebo na fotbal (F), raději by oba byli spolu než sami, muž preferuje F a žena K.

	2K	2F
1K	$\underline{2},\underline{3}$	0,0
1F	0,0	$\underline{3},\underline{2}$

Postup hledání NR: pro každý řádek hledáme nejlepší odpověď ženy (2. hráče) a příslušnou výplatu podtrhneme, potom pro každý sloupec hledáme nejlepší odpověď muže (1. hráče) a výplatu opět podtrhneme. NR je ta kombinace, ve které jsou podtrženy obě výplaty. V našem případě (K,K) a (F,F)

Vztah Nash. rovnováhy a redukce dominovaných strategií

- pokud redukce dominovaných strategií vede k jednoznačnému výsledku hry $(s_1^*, s_2^* \ldots, s_n^*) \rightarrow$ pak tato kombinace je jedinou Nashovou rovnováhou této hry

Pravděpodobnostní rozšíření a Nashova věta

Smíšené strategie

- hráči volí své akce podle určitého pstního rozdělení
- někdy se hráč snaží zabránit tomu, aby protivník byl schopen odhadnout jeho strategii, a proto volí strategii náhodně

Definice

Nechť $H = \{S_1, S_2, \ldots, S_n; u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ je hra v normálním tvaru, kde $S_i = (s_{i1}, \ldots, s_{ik})$. Pak smíšenou strategií i-tého hráče rozumíme pravděpodobnostní rozdělení na S_i,

$$p_i = (p_{i1}, \ldots, p_{ik}),$$

kde p_{ij} udává s jakou pravděpodobností bude i-tý hráč hrát j-tou strategii. Ryzí strategie můžeme zřejmě chápat jako speciální případ smíšených strategií, kde pravděpodobnostní funkce degeneruje a přiřazuje pravděpodobnost jedna této strategii a pravděpodobnost nula všem ostatním strategiím.

Definice

Uvažujme hru 2 hráčů a jejich strategie $S_1 = (s_{11}, \dots, s_{1J})$ a $S_2 = (s_{21}, \dots, s_{2K})$. Jejich smíšené strategie jsou dány pravděpodobnostními rozděleními $p_1 = (p_{11}, \dots, p_{1J})$ a $p_2 = (p_{21}, \dots, p_{2K})$. Pak očekávané výplaty hráčů při použití těchto strategií budou

$$v_1(p_1, p_2) = \sum_{j=1}^{J} p_{1j} \sum_{i=1}^{K} p_{2i} u_1(s_{1j}, s_{2i})$$

$$v_2(p_1, p_2) = \sum_{i=1}^{K} p_{2i} \sum_{i=1}^{J} p_{1j} u_2(s_{1j}, s_{2i}).$$

Pravděpodobnostní rozšíření a Nashova věta

Nashova rovnováha ve smíšených hrách

Uvažujme hru 2 hráčů v normálním tvaru $H = \{S_1, S_2, u_1, u_2\}$.
Dvojice smíšených strategií (p_1^*, p_2^*) je Nashova rovnováha, jestliže platí

- $v_1(p_1^*, p_2^*) \geq v_1(p_1, p_2^*)$ pro $\forall$ smíšené strategie 1. hráče p_1
- $v_2(p_1^*, p_2^*) \geq v_2(p_1^*, p_2)$ pro $\forall$ smíšené strategie 2. hráče p_2 .

Analogicky pro více hráčů.

Nashova věta

Nechť $H = \{S_1, S_2, \ldots, S_n; u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ je hra v normálním tvaru pro konečný počet hráčů s konečným počtem strategií. Pak existuje alespoň jedna Nashova rovnováha v prostoru smíšených strategií.

- Nashova věta zaručuje existenci NR ve smíšených strategiích pro libovolně konečnou hru.
- Důkaz je založen na větách o pevném bodu.

Hlava nebo orel

Smíšené strategie - příklad

- oba zvolí to samé $\rightarrow$ vyhrává 1. hráč
- oba zvolí různě $\rightarrow$ vyhrává 2. hráč

	2 Orel	2 Hlava
1 Orel	$\underline{1}, -1$	$-1, \underline{1}$
1 Hlava	$-1, \underline{1}$	$\underline{1}, -1$

Hra nemá NR v čistých (ryzích) strategiích. Zkusíme ji najít ve smíšených strategiích.

Hlava nebo orel

Řešení příkladu

	2 Orel (p)	2 Hlava ($1-p$)
1 Orel (q)	$1, -1$	$-1, 1$
1 Hlava($1-q$)	$-1, 1$	$1, -1$

- „užitek z orla = užitek z hlavy“ pro oba hráče

$$u_1(O) = u_1(H)$$

$$1 \cdot p + (-1) \cdot (1-p) = -1 \cdot p + 1 \cdot (1-p) \rightarrow p = \frac{1}{2}$$

$$u_2(O) = u_2(H)$$

$$-1 \cdot q + 1 \cdot (1-q) = 1 \cdot q + (-1) \cdot (1-q) \rightarrow q = \frac{1}{2}$$

- NR $(p^*, q^*) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, tzn. oba volí orla s pstí 0,5 a hlava s pstí 0,5

Dynamické (extenzivní) hry s úplnou informací

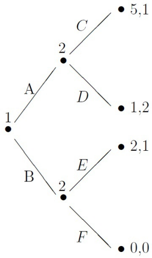
- hráči se rozhodují jeden po druhém (např. piškvorky)
- hru je lepší zapsat v **extenzivním tvaru** místo normálního tvaru, v normálním tvaru se zadávají celkové strategie hráčů, v extenzivním tvaru se zadávají jednotlivé tahy
- hra se skládá:
  - seznam hráčů
  - kdy je kdo na tahu, možnosti hráče na tahu, informace hráče na tahu
  - výplata každého hráče při všech možných kombinacích tahů, které mohli hráči zvolit
- extenzivní hru většinou znázorňujeme pomocí herního stromu
- hlavní metoda řešení – **zpětná indukce**
- je nutné určit i akce v iracionálních situacích

Dynamické (extenzivní) hry s úplnou informací

- Strategie hráče je **úplný plán** jeho akcí, který určuje, kterou z možných akcí hráč zvolí v každé situaci, která může ve hře nastat a v níž je tento hráč na tahu.
- **Informační množina** = soubor rozhodovacích bodů s následujícími vlastnostmi:
  1. hráč je na tahu v každém bodě dané informační množiny
  2. když se hra dostane do některého bodu informační množiny, hráč neví, ve kterém jejím bodě se hra nachází.
- **Podhra** = hra, která začíná v rozhodovacím bodu B, který má následující vlastnosti. Je jednoprvkovou informační množinou, obsahuje všechny rozhodovací body, které v herním schématu následují za B, a nerozděluje žádnou informační množinu. Každou podhru tedy můžeme analyzovat jako samostatnou hru.

Dynamické (extenzivní) hry s úplnou informací

- extenzivní tvar (herní strom)



Uzly – kdo je na tahu (kdo hraje)
Hrany – akce

- normální tvar

	(C,E)	(C,F)	(D,E)	(D,F)
A	5,1	5,1	1,2	1,2
B	2,1	0,0	2,1	0,0

Zpětná indukce

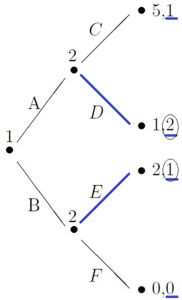
Hru v extenzivním tvaru neřešíme běžným způsobem od počátku stromu (kořene) ke koncovým uzlům, ale naopak. Vycházíme z koncového uzlu a snažíme se najít optimální řešení podhry. Když jej nalezneme, stává se koncovým uzlem toto řešení a přecházíme do další podhry, kde porovnáváme toto řešení s dalšími koncovými uzly. Tímto způsobem projdeme všechny podhry, nalezneme jejich nejlepší řešení a postupně se dostaneme až k výchozímu uzlu – kořenu stromu. Tím nalezneme řešení celé hry.
Vycházíme z předpokladu, že racionální hráč volí při svém rozhodování pro něj nejlepší možnou strategii. Při hledání optimálního řešení podhry hledáme tzv. **dokonalou rovnováhu podhry** pro všechny rozhodovací situace. Výsledek nalezený pomocí zpětné indukce je dokonalá Nashova rovnováha vzhledem k podhrám.

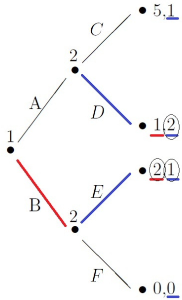
Definice

Nashova rovnováha je dokonalá (perfektní) vzhledem k podhrám, jestliže strategie hráčů dávají Nashovu rovnováhu v každé podhře.

Zpětná indukce

- hru rozdělíme na podhry a postupujeme od konce, tzn. nejdříve řešíme, co bude hrát hráč 2 a potom hráč 1





1. pokud 1 hraje A, pak 2 hraje D (dostane lepší výplatu než z C)
   pokud 1 hraje B, pak 2 hraje E (dostane lepší výplatu než z F)
2. 1 hraje B, protože ví, že 2 zahraje E (má výplatu 2),
   kdyby 1 hrál A, 2 by hrál D a 1 by měl výplatu 1, tzn. horší

Výsledek hry: (B,(D,E)) $\rightarrow$ dokonalá NR vzhledem k podhrám

Normální tvar a hledání NR

	(C,E)	(C,F)	(D,E)	(D,F)
A	$\underline{5}$,1	$\underline{5}$,1	1,$\underline{2}$	$\underline{1}$,$\underline{2}$
B	2,$\underline{1}$	0,0	$\underline{2}$,$\underline{1}$	0,0

1. pokud 1 hraje A, nejlepší odpověď 2 je hrát (D,E) nebo (D,F)
2. pokud 1 hraje B, nejlepší odpověď 2 je hrát (C,E) nebo (D,E)
3. pokud 2 hraje (C,E), nejlepší odpověď 1 je hrát A
4. pokud 2 hraje (C,F), nejlepší odpověď 1 je hrát A
5. pokud 2 hraje (D,E), nejlepší odpověď 1 je hrát B
6. pokud 2 hraje (D,F), nejlepší odpověď 1 je hrát A

Výsledek hry: (B,(D,E)),(A,(D,F))$\rightarrow$ 2 (klasické) NR

Opakované hry

- 1 základní hra se opakuje konečně nebo nekonečně mnohokrát

1) Konečně opakované hry

Definice

Nechť je daná základní statická hra H. Pak $H(T)$ bude označovat hru, ve které se základní hra hraje T-krát. Přitom hráči pozorují výsledky všech předchozích her před tím, než začne další hra. Výplaty v opakované hře jsou součtem výplat v jednotlivých kolech základní hry.

Věta

Pokud základní hra má jedinou NR, pak opakovaná hra $H(T)$ má jedinou rovnováhu perfektní vzhledem k podhrám. Tou je opakování NR v každém kole hry.

2-krát opakované vězňovo dilema

Konečně opakované hry

- řešíme od zadu (zpětná indukce)
  - ve 2. hře hledáme NR → víme, že NR je (P,P) s výplatou (1,1)

	2P	2N
1P	1,1	10,0
1N	0,10	9,9

  - v 1. hře - ke každému prvku přičteme výsledek druhé hry (tzn. +1 pro oba hráče) a hledáme NR

	2P	2N
1P	$\underline{2}$,$\underline{2}$	$\underline{11}$,1
1N	1,$\underline{11}$	10,10

→ NR je opět (P,P)

Diskontování výplat

Konečně i nekonečně opakované hry

- při celkové výplatě jednotlivých hráčů ze všech her obvykle diskontujeme výplaty diskontním faktorem $\delta \in \langle 0, 1 \rangle$, protože hráči preferují výplatu v současnosti před stejně velkou výplatou v budoucnosti
- důvody:
  - časová hodnota peněz (pokud jsou výplaty v penězích, δ představuje bezrizikovou úrok. míru)
  - pst, že hra bude v následujícím kole ukončena (př. smrt hráče)
  - psychologická netrpělivost hráčů
- označme p_i příjem (výplata) z i-té hry, potom současná hodnota příjmu ze všech her je
  - pro konečně opakované hry:
    $PV(p, \delta) = p_1 + \delta p_2 + \cdots + \delta^T p_T = \sum_{t=1}^{T} \delta^{t-1} p_t$
  - pro nekonečně opakované hry:
    $PV(p, \delta) = p_1 + \delta p_2 + \cdots + \delta^t p_t + \cdots = \sum_{t=1}^{\infty} \delta^{t-1} p_t$

2) Nekonečně opakované hry

- používáme průměrnou hodnotu výplat $\rightarrow (1-\delta)\cdot PV(p,\delta)$
  - pokud jsou výplaty shodné a všechny rovny p, pak je průměrná hodnota přímo rovna výplatě z jedné základní hry.

$$(1-\delta)\cdot PV(p,\delta) = (1-\delta)\cdot\sum_{t=1}^{\infty}\delta^{t-1}p = (1-\delta)\cdot\frac{p}{1-\delta} = p$$

Strategie v nekonečně opakovaných hrách

1. Grim trigger strategie (spouštěcí strategie) – „neodpouštět“
2. Tit for tat strategie – „zub za zub“
   „udělej to, co udělal hráč v předchozím období“

Grim trigger strategie

Vězňovo dilema

- hráči v prvním kole spolupracují (tzn. hrají N – nepřiznají se)
- hráč spolupracuje tak dlouho, dokud ho druhý nepodrazí
- po podražení už nikdy nespolupracuje (tzn. hraje do nekonečna P – přiznat se)
- pro jaké δ mají motivaci hráči spolupracovat? Kdy se jim vyplatí zradit?

	2P	2N
1P	1,1	10,0
1N	0,10	9,9

Grim trigger strategie

Vězňovo dilema

- výplata, když oba celou dobu spolupracují

$$9 + 9\delta + 9\delta^2 + \cdots = \frac{9}{1-\delta}$$

- výplata (druhého hráče), když druhý zradí hned v prvním kole

$$10 + 1\delta + 1\delta^2 + \cdots = 10 + \frac{\delta}{1-\delta}$$

- spolupráce bude optimální (NR) při této strategii, pokud:

$$\frac{9}{1-\delta} \geq 10 + \frac{\delta}{1-\delta}$$

tzn. hráči se vyplatí spolupracovat pokud $\delta \geq \frac{1}{9}$

Modely duopolu

1. Cournotův duopol
2. Bertrandův duopol

budeme modelovat situaci, kdy na trhu jsou dvě firmy ($\rightarrow$ duopol), pokud bychom uvažovali

- 1 firmu $\rightarrow$ monopol
- n firem $\rightarrow$ oligopol
- $n \rightarrow \infty$ firem $\rightarrow$ dok. konkurence

Cournotův duopol

- dvě firmy vyrábí stejný výrobek
- firmy se rozhodují současně, jaké množství vyrobí (q_1 a q_2) $\rightarrow$ prostor strategií hráčů je tvořen vyráběným množstvím
- firmy prodávají za stejnou cenu, která je dána průsečíkem poptávky a celkové tržní nabídky
  - předpokládáme lineární poptávku $P(Q) = \alpha - Q$, kde $Q = q_1 + q_2$ (pro $Q \geq \alpha$ je $P(Q) = 0$)
- mezní náklady c jsou konstantní $\rightarrow$ nákladová funkce $C_i(q_i) = cq_i$
- zisky firem jsou π_1 a π_2 (zisk=tržby-náklady)
  - $\pi_1(q_1, q_2) = q_1 \cdot (\alpha - q_1 - q_2) - cq_1$
  - $\pi_2(q_1, q_2) = q_2 \cdot (\alpha - q_1 - q_2) - cq_2$
- řešíme maximalizační úlohy (z definice NR)

$$\max_{0 \leq q_1 < \infty} \pi_1(q_1, q_2^*) \quad \text{a} \quad \max_{0 \leq q_2 < \infty} \pi_2(q_1^*, q_2)$$

Cournotův duopol

- jinak řečeno firmy chtějí maximalizovat zisk

$$\frac{\partial \pi_1(q_1, q_2^*)}{\partial q_1} = \alpha - 2q_1 - q_2^* - c = 0 \quad \rightarrow \quad q_1^* = \frac{1}{2}(\alpha - c - q_2^*)$$
$$\frac{\partial \pi_2(q_1^*, q_2)}{\partial q_2} = \alpha - 2q_2 - q_1^* - c = 0 \quad \rightarrow \quad q_2^* = \frac{1}{2}(\alpha - c - q_1^*)$$

- řešíme soustavu 2 rovnic o 2 neznámých q_1^* a q_2^*:

$$\alpha - 2q_1^* - q_2^* - c = 0$$
$$\alpha - 2q_2^* - q_1^* - c = 0$$

- řešením je NR: $q_1^* = q_2^* = \frac{\alpha - c}{3}$
- celkové vyrobené množství: $Q = q_1^* + q_2^* = \frac{2}{3}(\alpha - c)$
  cena: $P(Q) = \alpha - Q = \frac{1}{3}(\alpha + 2c)$
  zisky: $\pi_1 = \pi_2 = \frac{\alpha-c}{3} \cdot (\alpha - \frac{\alpha-c}{3} - \frac{\alpha-c}{3}) - c\frac{\alpha-c}{3} = \frac{(\alpha-c)^2}{9}$

Bertrandův duopol

- firmy vyrábějí podobné, ne úplně stejné výrobky
- firmy určují cenu p_1 a p_2 $\rightarrow$ prostor strategií je tvořen možnými cenami výrobků
- poptávková funkce je funkcí cen

$$q_1(p_1, p_2) = \alpha - p_1 + b \cdot p_2$$
$$q_2(p_1, p_2) = \alpha - p_2 + b \cdot p_1$$

  kde $b > 0$ je míra s jakou je výrobek firmy 1 náhražkou za výrobek firmy 2
- zisky firem (tržby-náklady)

$$\pi_1(p_1, p_2) = q_1(p_1, p_2) \cdot p_1 - cq_1(p_1, p_2)$$
$$\pi_1(p_1, p_2) = (\alpha - p_1 + bp_2) \cdot p_1 - c(\alpha - p_1 + bp_2)$$

$$\pi_2(p_1, p_2) = q_2(p_1, p_2) \cdot p_2 - cq_2(p_1, p_2)$$
$$\pi_2(p_1, p_2) = (\alpha - p_2 + bp_1) \cdot p_2 - c(\alpha - p_2 + bp_1)$$

Bertrandův duopol

- firmy chtějí maximalizovat zisk

$$\frac{\partial \pi_1(p_1, p_2^*)}{\partial p_1} = \alpha - 2p_1 + bp_2^* + c = 0 \quad \rightarrow \quad p_1^* = \frac{1}{2}(\alpha + bp_2^* + c)$$
$$\frac{\partial \pi_2(p_1^*, p_2)}{\partial p_2} = \alpha - 2p_2 + bp_1^* + c = 0 \quad \rightarrow \quad p_2^* = \frac{1}{2}(\alpha + bp_1^* + c)$$

- řešíme soustavu 2 rovnic o 2 neznámých p_1 a p_2:

$$\alpha - 2p_1^* + bp_2^* + c = 0$$
$$\alpha - 2p_2^* + bp_1^* + c = 0$$

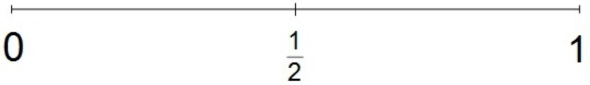
- řešením je NR: $p_1^* = p_2^* = \frac{\alpha+c}{2-b}$
- smysl jen pro $b < 2$ (jinak $p < 0$)
- čím bližší substituty jsou výrobky ($\uparrow b$), tím poroste jejich cena
- rovnovážné množství je $q_1^* = q_2^* = \frac{\alpha+c(b-1)}{2-b}$

Příklady aplikací v ekonomii

1. Problém volební kampaně
2. Kupování hlasů
3. Vstup do monopolního odvětví
4. Teorie obecní pastviny

Problém volební kampaně

- zvolení ideální kampaně vedoucí k vítězství ve volbách
- strana vybírá, kam se zařadí na pravolevém politickém spektru a jejím cílem je přilákat více voličů než 2. strana a vyhrát tak volby ($x = 0$ je levice a $x = 1$ je pravice)



$x_1 \dots$ pozice 1. strany, $x_2 \dots$ pozice 2. strany,

- kandidáti nezávisle na sobě zvolí kampaň $x_i \in [0, 1]$
- volič zvolí tu stranu, která je nejblíž jeho preferencím
- volby vyhraje ten, kdo má nejvíc hlasů (v případě remízy je vítěz vybrán náhodně)
- předp., že kandidátům jde jen o vítězství (nerespektují vlastní přesvědčení)
- NR budeme hledat pomocí optimálních odpovědí

Problém volební kampaně

Jak bude reagovat 1 na pozici strany 2?
Pokud:

- $x_2 < \frac{1}{2}$, pak kandidát 1 zvolí $x_2 < x_1 < 1 - x_2$, aby získal nadpoloviční většinu hlasů a vyhrál tak volby
- $x_2 = \frac{1}{2}$, pak kandidát 1 zvolí $x_1 = \frac{1}{2}$, bude to remíza a tedy má 50 % šanci na vítězství
- $x_2 > \frac{1}{2}$, pak kandidát 1 zvolí $1 - x_2 < x_1 < x_2$, aby získal nadpoloviční většinu hlasů a vyhrál tak volby

stejně bude uvažovat i 2. kandidát (dostaneme to samé jen s opačnými indexy) a průnikem nejlepších odpovědí bude NR
$\rightarrow (x_1, x_2) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

Kupování hlasů

- 2 lobbistické skupiny (X, Y) uplácí k zákonodárců (k je liché)
- každá skupina lobuje za jiný protichůdný zákon a může dát každému z k zákonodárců určitou částku (x_i a y_i)
- každý zákonodárce volí návrh, za který dostal víc peněz
- ocenění skupiny X svého zákonu je V_x a pro Y je ocenění V_y
- hru budeme řešit jako extenzivní (první se rozhodne X a potom Y) $\rightarrow$ zpětná indukce
- ozn. seznam plateb skupiny X zákonodárcům $x = (x_1, \ldots, x_k)$ seznam plateb skupiny Y zákonodárcům $y = (y_1, \ldots, y_k)$
- zákon skupiny Y je přijat, pokud $y_i \geq x_i$ alespoň v $\frac{1}{2}(k+1)$ zákonodárců
- užitková funkce skupiny X (skupina Y analogicky)

$$u_x(x, y) = \begin{cases} V_x - (x_1 + \cdots + x_n) & \text{pokud je přijat zákon } X \\ -(x_1 + \cdots + x_n) & \text{pokud je přijat zákon } Y \end{cases}$$

Kupování hlasů

Řešení - zpětná indukce

- postupujeme od konce, tzn. hledáme nejlepší odpověď skupiny Y na jakoukoliv strategii skupiny X
- většinu zákonodárců označíme jako $\mu \rightarrow \mu = \frac{1}{2}(k+1)$
- m_x bude součet μ nejmenších složek vektoru $x \rightarrow m_x$ je nejmenší částka, kterou skupina X vyplatila nadpoloviční většině zákonodárcům
- aby sk. Y vyhrála, musí u μ zákonodárců vyrovnat částku, kterou dostali od sk.X (tzn. musí zaplatit celkově aspoň m_x)
- nejlepší odpověď Y:
  - $m_x < V_y \rightarrow$ vyrovná platbu sk. X u μ zákonodárců
  - $m_x > V_y \rightarrow$ neplatí nic
  - $m_x = V_y \rightarrow$ vyrovná platbu sk. X u μ zákonodárců, nebo neplatí nic

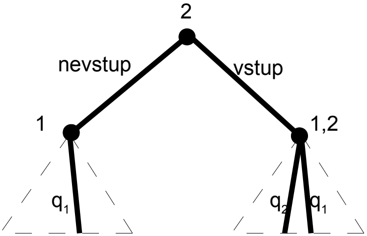
Kupování hlasů

Řešení - zpětná indukce

- sk. X chce dosáhnout toho, aby se sk. Y nevyplatilo zákonodárce přeplatit (tzn. $m_x \geq V_y$) $\rightarrow$ musí každému zákonodárci zaplatit alespoň $\frac{V_y}{\mu}$
- sk. X zaplatí $k \cdot \frac{V_y}{\mu}$ jen pokud nakonec dostane kladnou výplatu, tzn. pokud $V_x > k\frac{V_y}{\mu}$
- optimální odpověď sk. X:
  - $x = (0, \ldots, 0)$, pokud $V_x < k\frac{V_y}{\mu}$
  - $x = (\frac{V_y}{\mu}, \ldots, \frac{V_y}{\mu})$, pokud $V_x > k\frac{V_y}{\mu}$

Vstup do monopolního odvětví

- máme odvětví, ve kterém je 1 firma (monopolista - 1) a druhá firma (vyzyvatel - 2) zvažuje vstup, který je spojen s náklady f
- pokud vyzyvatel nevstoupí, pak je jeho zisk 0
- pokud vyzyvatel vstoupí, firmy se současně rozhodují o q_1 a q_2 (tzn. hrají Cournotův duopol)
- hru budeme řešit zpětnou indukcí



$$\pi_1 = q_1 \cdot P(q_1) - cq_1$$

$$\pi_1 = q_1 \cdot P(q_1, q_2) - cq_1$$

$$\pi_2 = q_2 \cdot P(q_1, q_2) - cq_2 - f$$

Vstup do monopolního odvětví

Řešení

1. Rovnováha podhry po VSTUP
   - firmy se rozhodují o q_1 a q_2 $\rightarrow$ Cournotův duopol (řešili jsme dříve) $\rightarrow q_1 = q_2 = \frac{\alpha - c}{3}$
   - zisk monopolu $\pi_1 = \frac{(\alpha - c)^2}{9}$
   - zisk vyzyvatele $\pi_2 = \frac{(\alpha - c)^2}{9} - f$
2. Rovnováha podhry po NEVSTUP
   - monopol se rozhoduje, kolik vyrobí
   - monopol chce maximalizovat zisk $\pi_1 = q_1 \cdot (\alpha - q_1) - cq_1$
   - $\frac{\partial \pi}{\partial q_1} = \alpha - 2q_1 - c = 0 \rightarrow q_1 = \frac{\alpha - c}{2}$
   - zisk monopolu $\pi_1 = \frac{\alpha - c}{2} \cdot (\alpha - \frac{\alpha - c}{2}) - c\frac{\alpha - c}{2} = \frac{(\alpha - c)^2}{4}$
3. Jak se rozhodne vyzyvatel na začátku?
   - když vstoupí $\pi_2 = \frac{(\alpha - c)^2}{9} - f$, když ne tak $\pi_2 = 0$
   - to bude záviset na f (chce mít kladný zisk)
     - $\frac{(\alpha - c)^2}{9} > f$ – vstoupí a oba budou vyrábět $\frac{\alpha - c}{3}$
     - $\frac{(\alpha - c)^2}{9} < f$ – nevstoupí a v odvětví bude jen 1 firma
     - $\frac{(\alpha - c)^2}{9} = f$ – vstoupí nebo ne (obojí je dokonalá rovnováha vzhledem k podhrám)

Tragédie obecní pastviny

- **společný zdroj**
  - není vylučitelný (nemůžeme někomu zakázat ho využívat)
  - je rivalitní (spotřeba jedním subjektem snižuje spotřebu jiného)
  - je dostupný zdarma
- ponechání společného zdroje k volnému užívání povede k nadměrnému, neefektivnímu využívání
- může dojít k vyčerpání
- příklad pastevectví koz

Tragédie obecní pastviny

Pastevectví koz

- je n farmářů, kteří se nezávisle na sobě rozhodují, kolik koz k_i budou chovat (celkový počet koz je pak $K = k_1 + \cdots + k_n$) na společné pastvině $\rightarrow$ statická hra s úplnou informací
- náklady na nákup a chov kozy c nezávisí na počtu chovaných koz - jsou tedy konstantní (pastvina je zdarma, platíme jen za kozu při nákupu)
- hodnota $h(K)$, kterou farmáři přinese 1 koza závisí na celkovém počtu koz a platí $h'(K) < 0$ a $h''(K) < 0 \rightarrow$ funkce $h(K)$ je klesající a konkávní $\rightarrow$ s rostoucím počtem koz bude na každou kozu připadat méně trávy
- maximální počet, koz které by na daném pozemku dokázaly přežít je pak K_{max} přičemž $h(K_{max}) = 0$
- předp., že kozy jsou libovolně dělitelné $\rightarrow$ prostor strategií můžeme označit $S_i = [0; K_{max})$

Tragédie obecní pastviny

Pastevectví koz - soukromá rovnováha

- výplatní funkce i-tého farmáře $k_i h(k_1 + \cdots + k_n) - ck_i$
- každý farmář bude chtít svoji výplatní funkci maximalizovat

$$\max_{k_i} \left[k_i h(k_i + k^*_{-i}) - ck_i \right]$$

kde $k^*_{-i} = k^*_1 + \cdots + k^*_{i-1} + k^*_{i-1} + \cdots + k^*_n$

- dostaneme tak soustavu n rovnic:

$$h(k_i + k^*_{-i}) + k_i h'(k_i + k^*_{-i}) - c = 0$$

- k_i nahradíme k^*_i, rovnice sečteme a vydělíme n:

$$h(K^*) + \frac{K^*}{n} h'(K^*) - c = 0$$

vyřešením dostaneme $K^* = k^*_1 + \cdots + k^*_n$, tzn. celkový počet koz v rovnovážné situaci

Tragédie obecní pastviny

Pastevectví koz - společenská rovnováha

- pokud budeme hledat společensky optimální počet koz K^{**} (maximalizujeme celkový užitek)

$$\max_K [Kh(K) - cK]$$

- dostaneme rovnici

$$h(K^{**}) + K^{**}h'(K^{**}) - c = 0$$

Tragédie obecní pastviny

Pastevectví koz - porovnání rovnováh

- z předpokladů $h'(K) < 0$ a $h''(K) < 0$ a porovnání rovnic

$$h(K^*) + \frac{K^*}{n} h'(K^*) - c = 0$$
$$h(K^{**}) + K^{**} h'(K^{**}) - c = 0$$

  vyplývá, že

$$K^* > K^{**},$$

  tedy pokud budou na společné pastvině kozy chovány soukromými farmáři, pak bude pozemek využit nad společenské optimum. To je způsobeno tím, že každý sedlák bude zvyšovat počet koz tak dlouho, dokud přírůstek hodnoty jeho stáda zvýšením počtu koz o jednu se přesně vyrovná se ztrátou, která je způsobena snížením produkce všech jeho koz
- naopak u společenského optima je přírůstek produkce poměřován snížením produkce všech koz

Literatura

1. STANĚK, Rostislav. *Základy teorie her*. ESF MU, 2013.
2. BIL, Jaroslav. *Modely trhu v teorii her* [online]. 2008 [cit. 2015-03-30]. Bakalářská práce. Masarykova univerzita, Přírodovědecká fakulta. Vedoucí práce Martin Kolář. Dostupné z: `http://is.muni.cz/th/175203/prif_b`.
3. výukový materiál od doc. Koláře (zájemcům pošlu na mail)