Matematika pro kartografy — cvičná druhá písemka, JS 2016

1. Řešte goniometrickou rovnici $\cos x + \sqrt{3}\,\sin x = 1$.

   $[\frac{2}{3}\pi + 2k\pi]$

2. Obecný člen posloupnosti je dán vztahem $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n + 4$. Určete, zda je tato posloupnost rostoucí nebo klesající.

   [klesající]

3. Vypočítejte limitu posloupnosti $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+a_n}{2n}$, je-li posloupnost $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ zadána rekurentně vztahy $a_0 = 2$, $a_{n+1} = a_n + 3$.

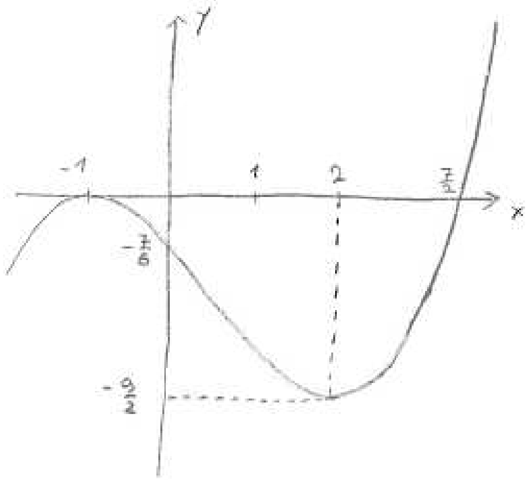
   $[\frac{3}{2}]$

4. Vypočítejte limitu funkce $\lim\limits_{x\to 0} \left(1 - \mathrm{e}^{-x^2}\right) \cos \dfrac{1}{x}$.

   [0]

5. Uvažujte funkci danou předpisem $f(x) = \frac{1}{6}\left(2x^3 - 3x^2 - 12x - 7\right)$. Určete intervaly, na kterých je funkce rostoucí a na kterých klesající, najděte lokální extrémy funkce a načrtněte její graf.

   [rostoucí na $(-\infty, -1\rangle$ a $\langle 2, \infty)$, klesající na $\langle -1, 2\rangle$,
   $f_{\max} = f(-1) = 0$, $f_{\min} = f(2) = -\frac{9}{2}$



]

Vzorce pro goniometrické funkce:

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta,\quad \sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta,$$

$$1-\cos\alpha=2\left(\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2,\quad 1+\cos\alpha=2\left(\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2,\quad \sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}.$$

Vzorce pro derivaci

(1)	pro každé $c\in\mathbb{R}$ je $c'=0$	(11)	$(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
(2)	$(x^a)'=ax^{a-1}$	(12)	$(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
(3)	$(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x$	(13)	$(\operatorname{arctg} x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$
(4)	$(a^x)'=a^x\ln a$	(14)	$(\operatorname{arccotg} x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$
(5)	$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$	(15)	$(cu)'=cu'$
(6)	$(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$	(16)	$(u\pm v)'=u'\pm v'$
(7)	$(\sin x)'=\cos x$	(17)	$(uv)'=u'v+uv'$
(8)	$(\cos x)'=-\sin x$	(18)	$\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$
(9)	$(\operatorname{tg} x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$	(19)	$(u^v)'=u^v\left(v'\ln u+v\dfrac{u'}{u}\right)$
(10)	$(\operatorname{cotg} x)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$	(20)	$(f(\varphi(x))'=f'(\varphi(x))\varphi'(x)$