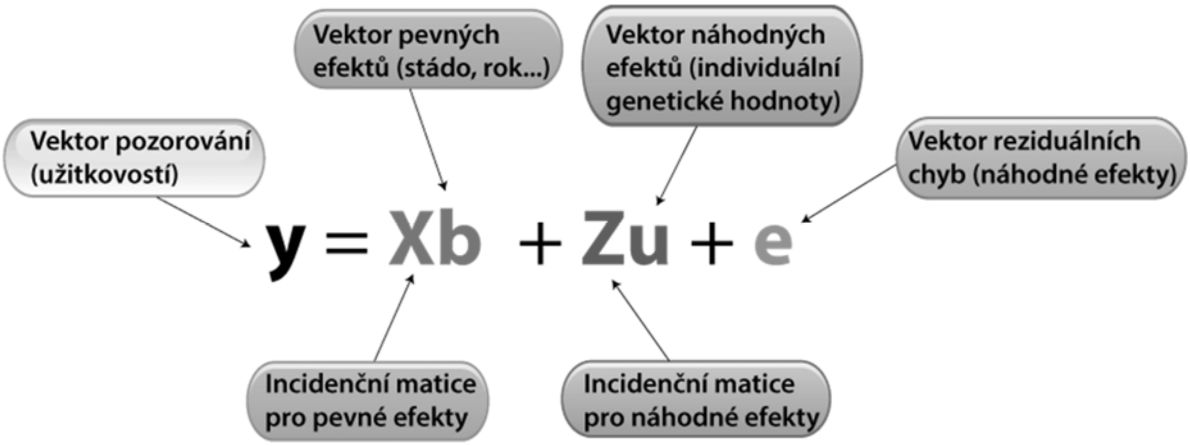
Odhad Var(A) a plemenných hodnot

- ANOVA odhaduje komponenty variance při jednom typu příbuznosti a vybalancovaných datech
- Reálné soubory jsou s nevybalancovanými daty a širokou rodokmenovou strukturou
- Téměř většina šlechtění zvířat je založena na modelech:
  - **REML** (*restricted maximum likelihood*) pro odhad variancí
  - **BLUP** (*best linear unbiased predictors*) pro předpověď plemenných hodnot

Smíšený model



y, **X** , **Z** – zaznamenané hodnoty

Odhad pevných efektů **b**
Odhad náhodných efektů **u**, **e**

Příklad

- Chceme odhadnout plemenné hodnoty tří otců (sire), každý byl pářen s náhodnými matkami (dam) a každý měl dva potomky, vyvíjející se ve dvou různých prostředích (stájích).

Pozorování	y	Otec	Stáj
y_{111}	9	1	1
y_{121}	12	1	2
y_{211}	11	2	1
y_{212}	6	2	1
y_{311}	7	3	1
y_{321}	14	3	2

Základní model

$$\mathbf{y}_{ijk} = \mathbf{b}_j + \mathbf{u}_i + \mathbf{e}_{ijk}$$

Pevný efekt prostředí (stáje)

Plemenná hodnota i-tého otce

- Vektory a matice:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_{111} \\ y_{121} \\ y_{211} \\ y_{212} \\ y_{311} \\ y_{321} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 12 \\ 11 \\ 6 \\ 7 \\ 14 \end{bmatrix} \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

v programu R

```
y <- matrix(c(9,12,11,6,7,14),6,1)
```

Vytvoří sloupcový vektor **y**, s užitkovostmi dcer, s **6**ti řádky a **1** sloupcem

```
X <- matrix(c(1,0,1,1,1,0,
              0,1,0,0,0,1),6,2)
```

Vytvoří designovou matici $\mathbf{X}_{6,2}$ (pro pevný efekt stáje)

```
Z <- matrix(c(1,1,0,0,0,0,
              0,0,1,1,0,0,
              0,0,0,0,1,1),6,3)
```

Vytvoří designovou matici $\mathbf{Z}_{6,3}$ (pro náhodný efekt otce)

Průměry a variance pro $\mathbf{y} = \mathbf{Xb} + \mathbf{Zu} + \mathbf{e}$

- **Průměry**:
  - $E(u) = E(e) = 0$
  - $E(y) = Xb$
- **Variance**:
  - **R** je VCV matice pro rezidua (prostředí); předpoklad že $\mathbf{R} = \sigma^2_e \mathbf{I}$
  - **G** je VCV matice pro plemenné hodnoty
  - VCV matice pro **y** je: $\mathbf{V} = \mathbf{ZGZ}` + \mathbf{R}$

Odhady pevných efektů a předpovědi náhodných efektů

- Ve smíšeném modelu jsou pozorovány **y**, **X** a **Z**
- **b**, **u**, **R** a **G** jsou obecně neznámé
- Provádí se dva současné odhady:

BLUE pro pevné efekty **b**: $\hat{\mathbf{b}} = (\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{y}$

BLUP pro náhodné efekty **u**: $\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{G}\mathbf{Z}'\mathbf{V}^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\mathbf{b}})$

$\mathbf{V} = \mathbf{ZGZ}` + \mathbf{R}$

(Henderson, 1963)

- Předpokládáme, že rezidua nejsou korelována a $\mathbf{R} = \sigma^2_e \mathbf{I}$ (6×6)
  - $\sigma^2_e = 6$ -> $\mathbf{R} = 6\mathbf{I}$
- VCV matice **G**: předpoklad, že otcové jsou nepříbuzní a **G** je diagonální matice (3×3) s prvky σ^2_G = variance otců, kde
  $\sigma^2_G = \sigma^2_A/4$
  - $\sigma^2_A = 8$ -> $\mathbf{G} = 8/4*\mathbf{I}$

- $\mathbf{V} = \mathbf{ZGZ`} + \mathbf{R}$

$$\mathbf{V} = \frac{8}{4}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} + 6\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 8 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{V}^{-1} = \frac{1}{30}\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

v programu R

`I3 <- diag(c(1,1,1))`	Vytvoří jednotkovou matici 3×3 (~ 3 otci)
`G <- 8/4*I3`	Vytvoří genetickou variančně kovarianční matici $\mathbf{G}_{3,3}$
`R <- 6* diag(c(1,1,1,1,1,1))`	Vytvoří prostřeďovou variančně kovarianční matici $\mathbf{R}_{6,6}$
`V <- Z%*%G%*%t(Z) + R`	Vytvoří fenotypovou variančně kovarianční matici $\mathbf{V}_{6,6}$
`invV <- solve(V)`	Vytvoří inverzi matice **V**

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \left(\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 8{,}22222 \\ 13{,}05556 \end{pmatrix}$$

v programu R

```
b <- solve(t(X)%*%invV%*%X) %*% (t(X)%*%invV%*%y)
```

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \mathbf{G}\mathbf{Z}'\mathbf{V}^{-1}\left(\mathbf{y} - \mathbf{X}\mathbf{b}\right) = \begin{pmatrix} -0{,}055556 \\ 0{,}111111 \\ -0{,}055556 \end{pmatrix}$$

v programu R

```
u <- G%*%t(Z)%*%invV %*% (y-(X%*%b))
```

Odvozená soustava normálních rovnic smíšeného modelu (Henderson):

- $\mathbf{u} \sim (0, \mathbf{G}), \mathbf{e}\ \ (0, \mathbf{R}), \mathrm{cov}(\mathbf{u}, \mathbf{e}) = 0$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}'\mathbf{R}^{-1}\mathbf{X} & \mathbf{X}'\mathbf{R}^{-1}\mathbf{Z} \\ \mathbf{Z}'\mathbf{R}^{-1}\mathbf{X} & \mathbf{Z}'\mathbf{R}^{-1}\mathbf{Z} + \mathbf{G}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}'\mathbf{R}^{-1}\mathbf{y} \\ \mathbf{Z}'\mathbf{R}^{-1}\mathbf{y} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X}'\mathbf{R}^{-1}\mathbf{X} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{X}'\mathbf{R}^{-1}\mathbf{Z} = \left(\mathbf{Z}'\mathbf{R}^{-1}\mathbf{X}\right)' = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Z}'\mathbf{R}^{-1}\mathbf{Z} + \mathbf{G}^{-1} = \frac{5}{6}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{X}'\mathbf{R}^{-1}\mathbf{y} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 33 \\ 26 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{Z}'\mathbf{R}^{-1}\mathbf{y} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 21 \\ 17 \\ 21 \end{bmatrix}$$

v programu R

```
XRX <- t(X)%*%solve(R)%*%X
        XRZ <- t(X)%*%solve(R)%*%Z
ZRX <- t(Z)%*%solve(R)%*%X
        ZRZG <- t(Z)%*%solve(R)%*%Z + solve(G)

XRy <- t(X)%*%solve(R)%*%y
ZRy <- t(Z)%*%solve(R)%*%y
```

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}'\mathbf{R}^{-1}\mathbf{X} & \mathbf{X}'\mathbf{R}^{-1}\mathbf{Z} \\ \mathbf{Z}'\mathbf{R}^{-1}\mathbf{X} & \mathbf{Z}'\mathbf{R}^{-1}\mathbf{Z}+\mathbf{G}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}'\mathbf{R}^{-1}\mathbf{y} \\ \mathbf{Z}'\mathbf{R}^{-1}\mathbf{y} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}'\mathbf{R}^{-1}\mathbf{X} & \mathbf{X}'\mathbf{R}^{-1}\mathbf{Z} \\ \mathbf{Z}'\mathbf{R}^{-1}\mathbf{X} & \mathbf{Z}'\mathbf{R}^{-1}\mathbf{Z}+\mathbf{G}^{-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{X}'\mathbf{R}^{-1}\mathbf{y} \\ \mathbf{Z}'\mathbf{R}^{-1}\mathbf{y} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 33 \\ 26 \\ 21 \\ 17 \\ 21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8{,}2222 \\ 13{,}0556 \\ -0{,}0556 \\ 0{,}1111 \\ -0{,}0556 \end{bmatrix}$$

v programu R

```
LS1 <- cbind(XRX, XRZ)

LS2 <- cbind(ZRX, ZRZG)
```

Vytvoří velkou matici levé strany (**LS**)

```
LS <- rbind(LS1, LS2)
```

Vytvoří velkou matici pravé strany (**PS**)

```
PS <- rbind(XRy, ZRy)
```

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X'R^{-1}X} & \mathbf{X'R^{-1}Z} \\ \mathbf{Z'R^{-1}X} & \mathbf{Z'R^{-1}Z+G^{-1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X'R^{-1}y} \\ \mathbf{Z'R^{-1}y} \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{LS}] \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} = [\mathbf{PS}]$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} = [\mathbf{LS}]^{-1} [\mathbf{PS}]$$

Vektor řešení **bu**

```
bu <- solve(LS)%*%PS
```