



# SPEKTRÁLNÍ ANALÝZA ČASOVÝCH ŘAD



**prof. Ing. Jiří Holčík, CSc.**

**[holcik@iba.muni.cz](mailto:holcik@iba.muni.cz)**

© Institut biostatistiky a analýz

## II. PRINCIPY TOHO, JAK NA TO? POKRAČOVÁNÍ



# NEPERIODICKÁ VELIČINA S NEKONEČNOU ENERGIÍ

## VÝKONOVÝ EXKURZ:

střední výkon periodického signálu:

$$P = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x_a^2(t) dt$$

neperiodický signál je takový periodický signál, jehož perioda  $T_0 \rightarrow \infty$

střední výkon neperiodického signálu

$$P = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x_a^2(t) dt = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{T_0} \cdot E$$

je-li  $E < \infty$ , pak  $P \rightarrow 0$  (nezajímavé);

$E > \infty$ , pak  $P = \lim \infty / \infty = K \in \langle 0, \infty \rangle$  !

$= \rightarrow \infty$

# NEPERIODICKÁ VELIČINA S NEKONEČNOU ENERGIÍ

- ☑ spektrální hustota výkonu:

$$G_{xx}(f) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{S_{xx}(f)}{T_0}$$

- ☑ Wiener-Khinchinovy vztahy:

$$G_{xx}(f) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{T_0} \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) \cdot \exp(-2\pi j f \tau) \cdot d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} g_{xx}(\tau) \cdot \exp(-2\pi j f \tau) \cdot d\tau$$

kde

$$g_{xx}(\tau) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x_a(t) \cdot x_a(t + \tau) \cdot dt$$

AKF náhodných stacionárních ergodických procesů

# NEPERIODICKÁ VELIČINA S NEKONEČNOU ENERGIÍ

- ☑ odhad pouze z konečného intervalu

$$\tilde{g}_{xx}(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x_a(t) \cdot x_a(t + \tau) \cdot dt$$

- ☑ odhad spektrální hustoty výkonu ze signálu v konečném intervalu

$$\tilde{G}_{xx}(f) = \dots = \frac{1}{T_0} \cdot \left| \int_{T_0} x_a(t) \cdot \exp(-2\pi jft) \cdot dt \right|^2$$

# ODHADOVÝ EXKURZ

- ☑ odhad parametru je závislý na volbě úseku analyzované veličiny;
- ☑ protože je výběr intervalu náhodný, je i odhad parametru náhodnou veličinou;
- ☑ základní (požadované) vlastnosti odhadů:
  - **nestrannost** – záruka, že v průměru se bude odhad pohybovat kolem správné hodnoty parametru

$$E\hat{q} = q; \quad \lim_{K \rightarrow \infty} E\hat{q} = q \quad \text{asymptoticky nestranný odhad}$$

- **konzistence** – čím delší bude zkoumaný interval, tím více se bude odhad blížit neznámé hodnotě

$$(\forall \varepsilon > 0) \lim_{K \rightarrow \infty} P(\|\hat{q} - q\| > \varepsilon) = 0$$

# NEPERIODICKÁ VELIČINA S NEKONEČNOU ENERGIÍ

## ☑ **DISKRÉTNÍ POSLOUPNOST**

→ vzorkováním veličiny  $x_a(t)$  vzorkovací frekvencí

$$F > 2f_{\max};$$

→ výsledná posloupnost  $x(nT)$  má  $N$  hodnot

$$(0 \leq n \leq N-1)$$

# NEPERIODICKÁ VELIČINA S NEKONEČNOU ENERGIÍ

→ odhad spektrální hustoty výkonu z konečné posloupnosti (nepřímá metoda)

$$\tilde{P}_{xx}(f) = T_{vz} \sum_{m=-N+1}^{N-1} \tilde{r}_{xx}(mT_{vz}) \cdot \exp(-2\pi j f m T_{vz})$$

→ odhady AK posloupnosti:

$$1) \quad \tilde{r}_{xx1}(mT_{vz}) = \frac{1}{N-|m|} \cdot \sum_{n=0}^{N-|m|-1} x(nT_{vz}) \cdot x(nT_{vz} + mT_{vz}), \quad m = 0, 1, \dots, N-1$$

$$2) \quad \tilde{r}_{xx2}(mT_{vz}) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=0}^{N-|m|-1} x(nT_{vz}) \cdot x(nT_{vz} + mT_{vz}), \quad m = 0, 1, \dots, N-1$$



# NEPERIODICKÁ VELIČINA S NEKONEČNOU ENERGIÍ

→ odhad spektrální hustoty výkonu z konečné posloupnosti (nepřímá metoda)

$$\tilde{P}_{xx}(f) = T_{vz} \sum_{m=-N+1}^{N-1} \tilde{r}_{xx}(mT_{vz}) \cdot \exp(-2\pi j f m T_{vz})$$

→ odhady AK posloupnosti:

$$1) \quad \tilde{r}_{xx1}(mT_{vz}) = \frac{T_{vz}}{(N-|m|)T_{vz}} \cdot \sum_{n=0}^{N-|m|-1} x(nT_{vz}) \cdot x(nT_{vz} + mT_{vz}), \quad m = 0, 1, \dots, N-1$$

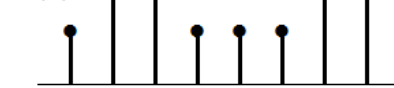
$$2) \quad \tilde{r}_{xx2}(mT_{vz}) = \frac{T_{vz}}{NT_{vz}} \cdot \sum_{n=0}^{N-|m|-1} x(nT_{vz}) \cdot x(nT_{vz} + mT_{vz}), \quad m = 0, 1, \dots, N-1$$

# DISKRÉTNÍ KORELACE - OPAKOVÁNÍ

$N = 8; \quad m = 0; \quad N - |m| = 8$

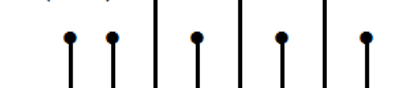
$n = 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad \dots \quad N-1$

$x_1(n)$



$\Sigma \quad x \quad x \quad x \quad x \quad x \quad x \quad x \quad x \quad n$

$x_2(n+m)$



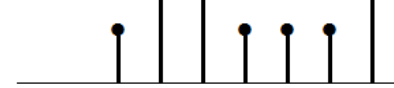
$n$

**a)**

$N = 8; \quad m = 1; \quad N - |m| = 7$

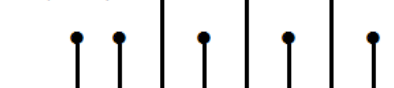
$n = 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad \dots \quad N-1$

$x_1(n)$



$\Sigma \quad x \quad x \quad x \quad x \quad x \quad x \quad x \quad n$

$x_2(n+m)$



$n$

**b)**

$N = 8; \quad m = N-1; \quad N - |m| = 1$

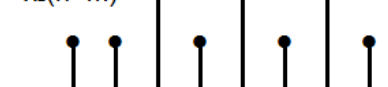
$n = 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad \dots \quad N-1$

$x_1(n)$



$\Sigma \quad x \quad x \quad x \quad x \quad x \quad x \quad x \quad n$

$x_2(n+m)$



$n$

**c)**

$$\tilde{r}_{xx1}(m) = \frac{1}{N - |m|} \sum_{n=0}^{N-|m|-1} x(n)x(n+m); \quad m = 0, 1, \dots, N-1.$$

$$\tilde{r}_{xx2}(m) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-|m|-1} x(n)x(n+m); \quad m = 0, 1, \dots, N-1,$$

# ODHADY AUTOKORELAČNÍ POSLOUPNOSTI

ad1) střední hodnota

$$E[\tilde{r}_{xx1}(mT_{vz})] = \frac{1}{N-|m|} \cdot \underbrace{\sum_{n=0}^{N-|m|-1} E[x(nT_{vz})x(nT_{vz} + mT_{vz})]}_{\text{takhle je definovaná AKF stacionárního diskrétního náhodného procesu}} = \gamma_{xx}(mT_{vz})$$

takhle je definovaná AKF stacionárního diskrétního náhodného procesu

tzn.  $\tilde{r}_{xx1}(mT_{vz})$  je nestranný odhad

rozptyl [Jenkins, G.M., Watts, D.G.: Spectral Analysis & Its Application, Holden-Day, 1968]

$$\text{var}[\tilde{r}_{xx1}(mT_{vz})] \approx \frac{N}{(N-|m|)^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ |\gamma_{xx}(nT_{vz})|^2 + \gamma_{xx}(nT_{vz} - mT_{vz})\gamma_{xx}(nT_{vz} + mT_{vz}) \right]$$

je-li  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\gamma_{xx}(nT_{vz})|^2 < \infty$ , je  $\lim_{N \rightarrow \infty} \text{var}[\tilde{r}_{xx1}(mT_{vz})] = 0$

# ODHADY AUTOKORELAČNÍ POSLOUPNOSTI

ad1) pokračování

Protože  $E[\tilde{r}_{xx1}(mT_{vz})] = \gamma_{xx}(mT_{vz})$  a  $\lim_{N \rightarrow \infty} \text{var}[\tilde{r}_{xx1}(mT_{vz})] = 0$   
je odhad  $\tilde{r}_{xx1}(mT_{vz})$  konzistentní

pro velké hodnoty  $m$  má odhad  $\tilde{r}_{xx1}(mT_{vz})$  velký rozptyl

# ODHADY AUTOKORELAČNÍ POSLOUPNOSTI

ad2) střední hodnota

$$E[\tilde{r}_{xx2}(mT_{vz})] = \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=0}^{N-|m|-1} E[x(nT_{vz})x(nT_{vz} + mT_{vz})] =$$

$$= \frac{N-|m|}{N} \gamma_{xx}(mT_{vz}) = \left(1 - \frac{|m|}{N}\right) \gamma_{xx}(mT_{vz})$$

$$E[\tilde{r}_{xx2}(mT_{vz})] \neq \gamma_{xx}(mT_{vz}) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} E[\tilde{r}_{xx2}(mT_{vz})] = \gamma_{xx}(mT_{vz})$$

$\tilde{r}_{xx2}(mT_{vz})$  je asymptoticky nestranný odhad

# ODHADY AUTOKORELAČNÍ POSLOUPNOSTI

ad2) rozptyl

$$\text{var}[\tilde{r}_{xx2}(mT_{vz})] \approx \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ |\gamma_{xx}(nT_{vz})|^2 + \gamma_{xx}(nT_{vz} - mT_{vz})\gamma_{xx}(nT_{vz} + mT_{vz}) \right]$$

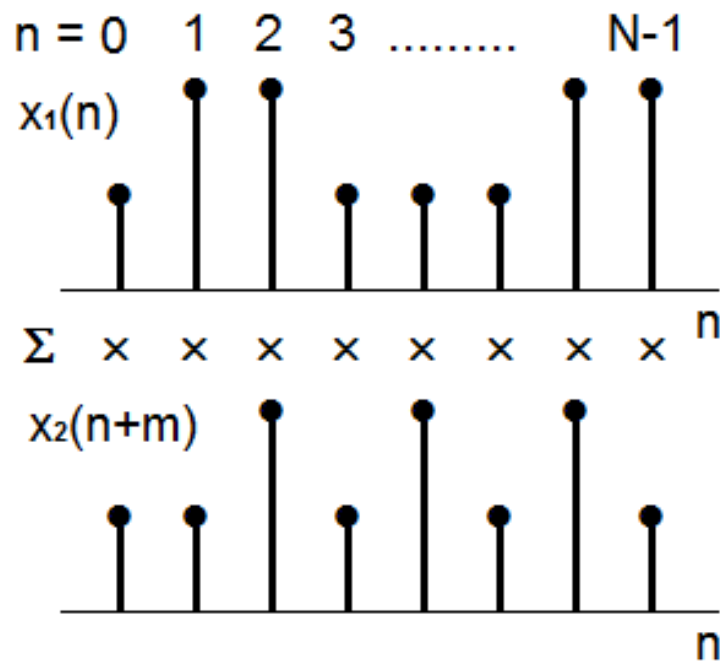
je to menší než pro  $\tilde{r}_{xx1}(mT_{vz})$

$$\text{je-li } \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\gamma_{xx}(nT_{vz})|^2 < \infty, \text{ je } \lim_{N \rightarrow \infty} \text{var}[\tilde{r}_{xx1}(mT_{vz})] = 0$$

a tak  $\tilde{r}_{xx2}(mT_{vz})$  je také konzistentní

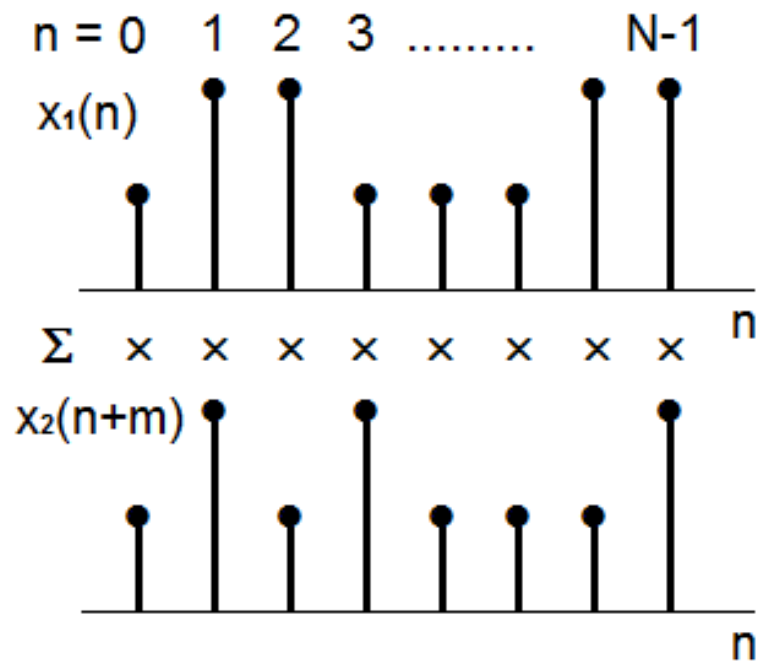
# KRUHOVÁ DISKRÉTNÍ KORELACE - OPAKOVÁNÍ -

$N = 8; \quad m = 0; \quad N - |m| = 8$



**a)**

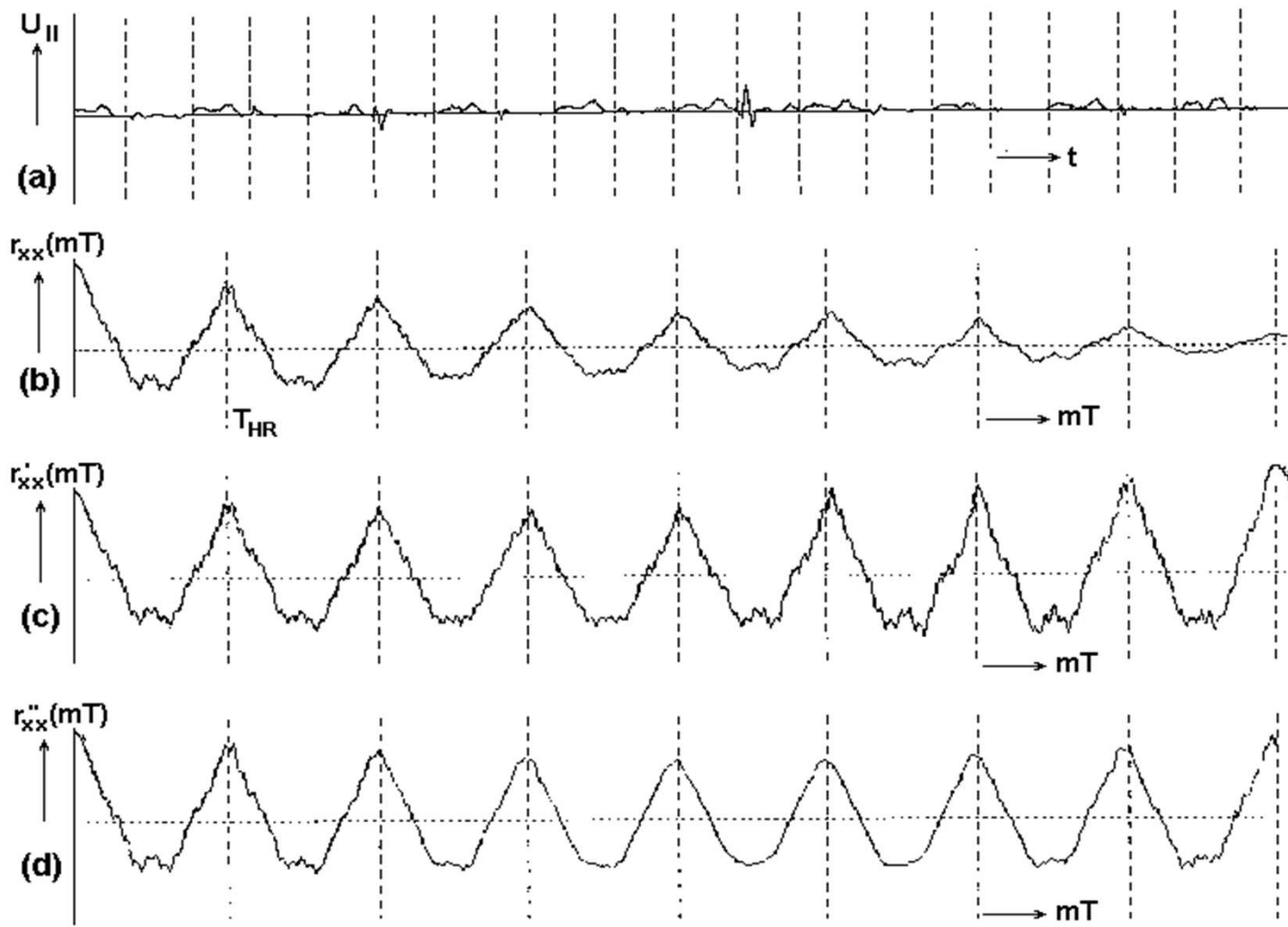
$N = 8; \quad m = 3; \quad N - |m| = 5$



**b)**

# DISKRÉTNÍ KORELACE - OPAKOVÁNÍ

## PŘÍKLAD ZE ŽIVOTA



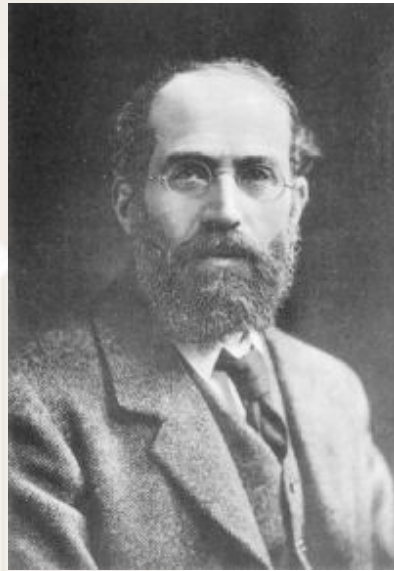


# NEPERIODICKÝ SIGNÁL S NEKONEČNOU ENERGIÍ

- ☑ dosadíme-li do vztahu pro výpočet odhadu spektrální hustoty výkonu za  $\tilde{r}_{xx}$  podle 2), dostaneme
- ☑ **periodogram** (Schuster 1898) (přímá metoda)

$$\begin{aligned}\tilde{P}_{xx}(f) &= \frac{1}{NT_{vz}} \left| T_{vz} \sum_{n=0}^{N-1} x(nT_{vz}) \cdot \exp(-2\pi jfnT_{vz}) \right|^2 \approx \\ &\approx \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot \exp(-2\pi jfn) \right|^2 = \frac{1}{N} |X(f)|^2\end{aligned}$$

# SIR FRANZ ARTHUR FRIEDRICH SCHUSTER

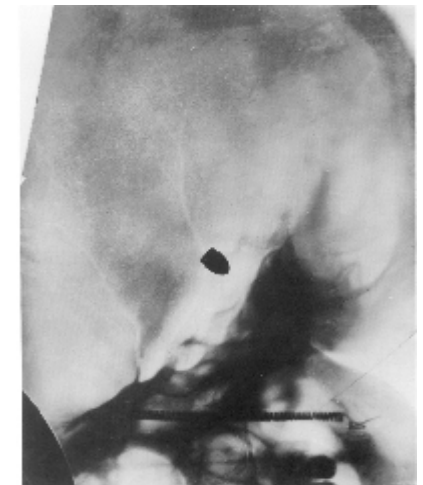


\*12.9.1851 Frankfurt n.M., Německo

†17.10.1934, Berkshire, Anglie

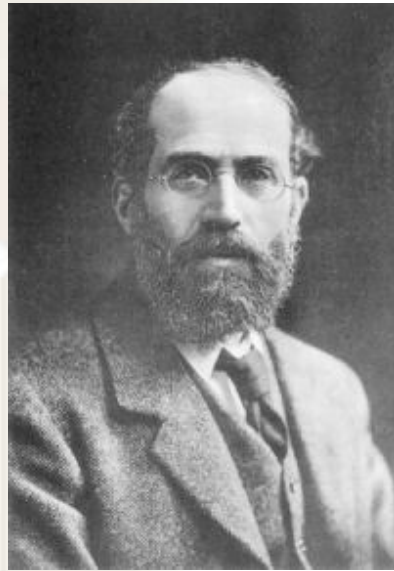
**oblasti zájmu:** spektroskopie,  
elektrochemie, optika, X- radiografie,  
fyzikální aplikace harmonické analýzy;  
zavedl koncept antihmoty (1898)

**spolupracovníci:** Gustav Kirchhoff,  
Herman von Helmholtz, James Clerk  
Maxwell, 3. baron Rayleigh (John  
William Strutt), Ernest Rutherford



postřelení Elizabeth Ann Hartleyové, duben 1896

# SIR FRANZ ARTHUR FRIEDRICH SCHUSTER



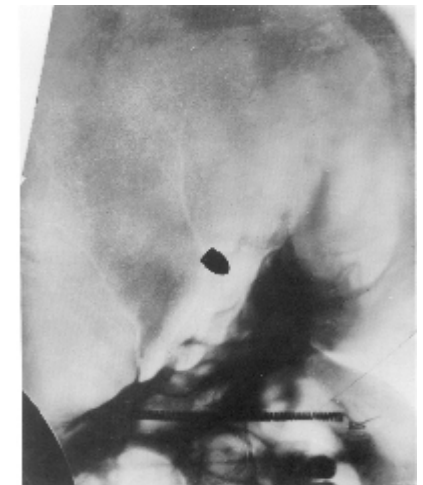
\*12.9.1851 Frankfurt n.M., Německo

†17.10.1934, Berkshire, Anglie

oblasti zájmu: spektroskopie,  
elektrochemie, optika, X- radiografie,  
fyzikální aplikace harmonické analýzy;  
zavedl koncept antihmoty (1898)

spolupracovníci: Gustav Kirchhoff,  
Herman von Helmholtz, James Clerk  
Maxwell, 3. baron Rayleigh (John  
William Strutt), **Ernest Rutherford**

„If your experiment needs statistics, you ought to have  
done a better experiment.“



postřelení Elizabeth Ann Hartleyové, duben 1896

# PERIODOGRAM

střední hodnota:

$$\begin{aligned} E[\hat{P}_{xx}(f)] &= E\left[T_{vz} \sum_{m=-(N-1)}^{N-1} \hat{r}_{xx2}(mT_{vz}) \cdot e^{-j2\pi f n T_{vz}}\right] = T_{vz} \sum_{m=-(N-1)}^{N-1} E(\hat{r}_{xx2}(mT_{vz})) \cdot e^{-j2\pi f n T_{vz}} = \\ &= T_{vz} \sum_{m=-(N-1)}^{N-1} \left(1 - \frac{|m|}{N}\right) \gamma_{xx}(mT_{vz}) \cdot e^{-j2\pi f n T_{vz}} \end{aligned}$$

střední hodnota periodogramu je dána diskrétní Fourierovou transformací skutečné autokorelační funkce váhované trojúhelníkovým Bartlettovým oknem

Bartlettovo okno:

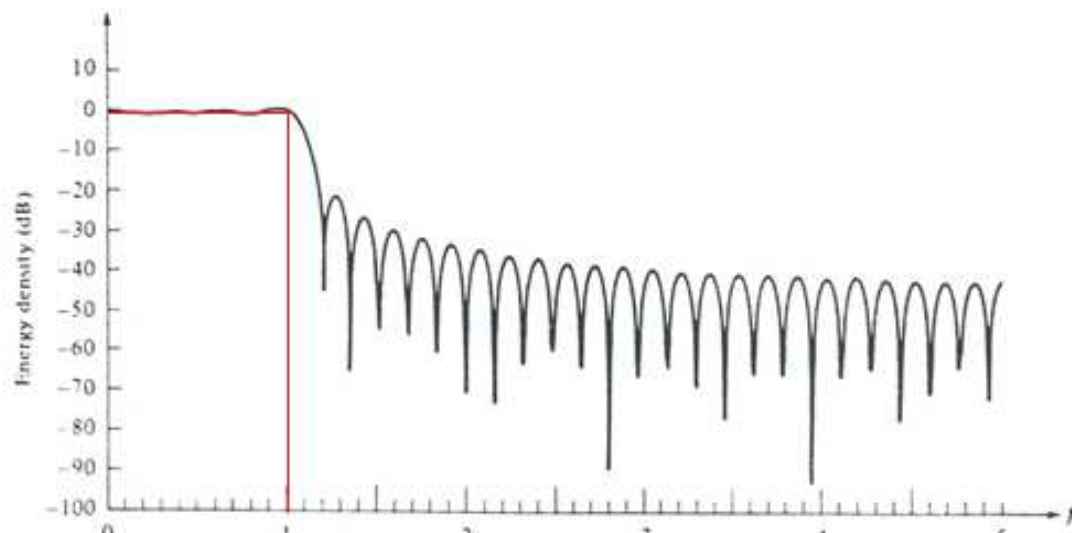
$$w_B(mT_{vz}) = \begin{cases} \frac{N - |m|}{N}, & \text{pro } |m| \leq N; \\ 0, & \text{pro } |m| > N. \end{cases}$$

$$E[\hat{P}_{xx}(f)] = T_{vz} \sum_{m=-\infty}^{\infty} w_B(mT_{vz}) \cdot \gamma_{xx}(mT_{vz}) \cdot e^{-j2\pi f m T_{vz}} = \int_{-F/2}^{F/2} \Gamma_{xx}(\alpha) \cdot W(f - \alpha) \cdot d\alpha$$

$\Gamma_{xx}(f)$  ... skutečná spektrální hustota výkonu

$W_B(f)$  ... spektrum Bartlettova okna

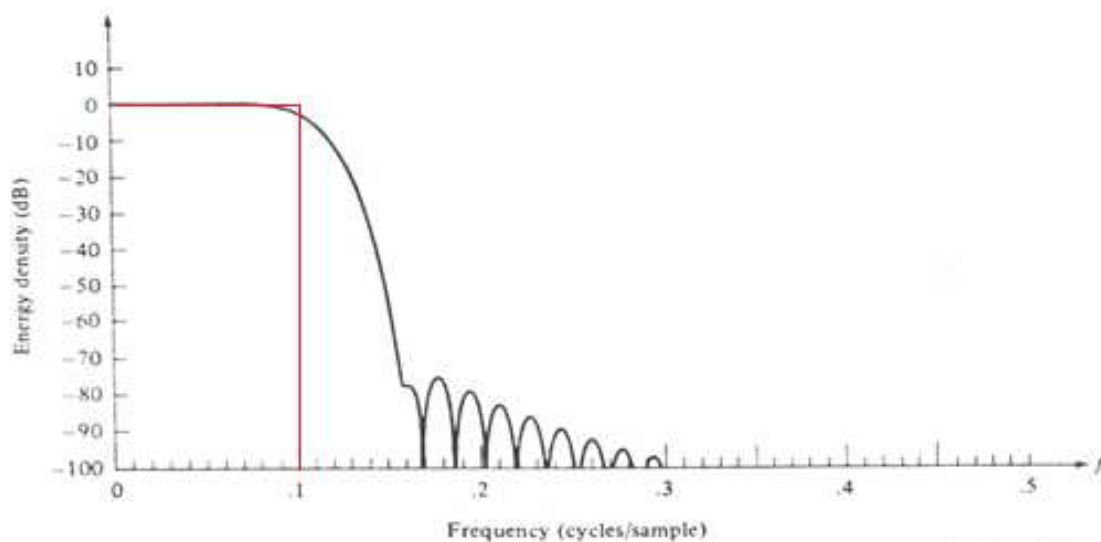
# PERIODOGRAM



spektrální konvoluce  
obdélníkového okna  
(ve spektrum)

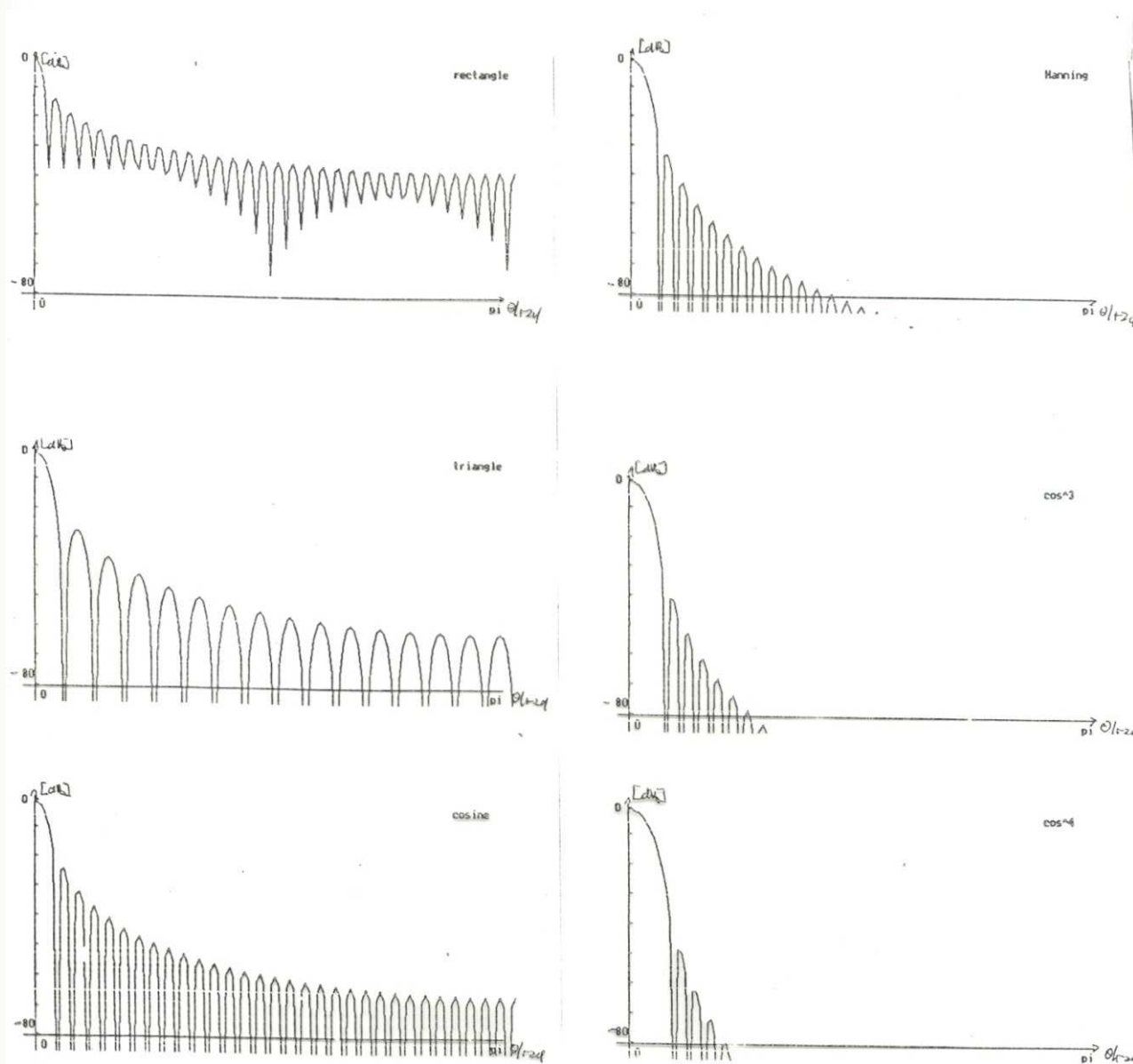
$$X(f) = 1 \text{ pro } |f| \leq 0,1;$$
$$X(f) = 0 \text{ pro } |f| > 0,1;$$

a obrazu obdélníka  
( $N=61$ ) ...



Blackmanova okna  
 $N = 61$

# FREKVENČNÍ OKNA



# PERIODOGRAM

střední hodnota periodogramu je vyhlazenou verzí skutečného spektra (pozor na znehodnocení spektra postranními laloky  $W_B(f)$ )

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E \left( \sum_{m=-(N-1)}^{N-1} T_{vz} \left[ 1 - \frac{|m|}{N} \right] \cdot \gamma_{xx}(mT_{vz}) \cdot e^{-j2\pi f m T_{vz}} \right) = T_{vz} \sum_{m=-(N-1)}^{N-1} \gamma_{xx}(mT_{vz}) \cdot e^{-j2\pi f m T_{vz}} = \Gamma_{xx}(f)$$

asymptoticky nestranný odhad

rozptyl obecně nekonverguje k nule při  $N \rightarrow \infty$

pro normální rozložení

$$\text{var}[\hat{P}_{xx}(f)] = \Gamma_{xx}^2(f) \left[ 1 + \frac{\sin 2\pi f N T_{vz}}{N \cdot \sin 2\pi f T_{vz}} \right], \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \text{var}[\hat{P}_{xx}(f)] = \Gamma_{xx}^2(f)$$

ne Konzistentní odhad

# PERIODOGRAM

dosadíme-li do vztahu pro výpočet odhadu spektrální hustoty výkonu za  $\hat{r}_{xx}$  odhad s proměnnou vahou, je střední hodnota

$$E[\hat{P}_{xx1}(f)] = \dots = T_{vz} \sum_{m=-(N-1)}^{N-1} \gamma_{xx}(mT_{vz}) \cdot e^{-j2\pi f m T_{vz}}$$

střední hodnota  $\hat{P}_{xx}(f)$  je dána DFT skutečné autokorelační funkce váhované obdélníkovým oknem

$$w_R(mT_{vz}) = \begin{cases} 1, & \text{pro } |m| \leq N; \\ 0, & \text{pro } |m| > N. \end{cases}$$



# III. NEPARAMETRICKÉ METODY ODHADU VÝKONOVÉHO SPEKTRA

# NEPARAMETRICKÉ METODY ODHADU VÝKONOVÉHO SPEKTRA

- ☑ nekladou žádné požadavky na znalosti vlastností signálu;
- ☑ všechny uvedené metody vycházejí z konečné posloupnosti vzorků
  - ⇒ frekvenční rozlišovací schopnost je při nejlepším určena spektrální šířkou obdélníkového okna
  - (všechny metody však snižují frekvenční rozlišení díky snaze o snížení rozptylu spektrálního odhadu)

# BARTLETOVA METODA

- ✓ rozdělení posloupnosti  $N$  vzorků na  $K$  nepřekrývajících se segmentů, každý o délce  $M$   
 $x_i(nT_{vz}) = x(nT_{vz} + iMT_{vz}), i=0, 1, \dots, K-1; n=0, 1, \dots, M-1$
- ✓ pro každý segment se spočítá periodogram

$$\tilde{P}_{xx}^{(i)}(f) = \frac{1}{MT_{vz}} \left| T_{vz} \sum_{n=0}^{M-1} x_i(nT_{vz}) \cdot \exp(-2\pi jfnT_{vz}) \right|^2, \quad i = 0, 1, \dots, K-1$$

- ✓ zprůměrněním periodogramů ze všech  $K$  segmentů dostaneme odhad výkonového spektra

$$\tilde{P}_{xx}^B(f) = \frac{1}{K} \sum_{i=0}^{K-1} P_{xx}^{(i)}(f)$$

?

A jak to bude s rozlišovací schopností?

- a) zůstane stejná;
- b) zvětší se;
- c) zmenší se.

# STATISTICKÉ VLASTNOSTI BARTLETTOVA ODHADU

## ☑ střední hodnota

$$E[\overline{P}_{xx}^B(f)] = \frac{1}{K} \cdot \sum_{i=0}^{K-1} E[\overline{P}_{xx}^{(i)}(f)] = E[\overline{P}_{xx}^{(i)}(f)]$$

pro jednotlivé periodogramy

$$E[\overline{P}_{xx}^{(i)}(f)] = \sum_{m=-(M-1)}^{M-1} T_{vz} \left(1 - \frac{|m|}{M}\right) \gamma_{xx}(mT_{vz}) \cdot e^{-j2\pi f m T_{vz}} =$$
$$= \frac{1}{M} \int_{-F/2}^{F/2} \Gamma_{xx}(\alpha) \cdot \left(\frac{\sin[\pi(f - \alpha) \cdot MT_{vz}]}{\sin[\pi(f - \alpha) \cdot T_{vz}]}\right)^2 d\alpha \quad W_B(f) = \frac{1}{M} \left(\frac{\sin[\pi f \cdot MT_{vz}]}{\sin[\pi f T_{vz}]}\right)^2$$

omezení délky signálové posloupnosti z N vzorků na  $M=N/K$  vzorků způsobí váhování oknem, jehož spektrální šířka vzroste K-krát; tím se též sníží K-krát frekvenční rozlišovací schopnost

# STATISTICKÉ VLASTNOSTI BARTLETTOVA ODHADU

## ☑ rozptyl

$$\text{var}[\bar{P}_{xx}^B(f)] = \frac{1}{K^2} \cdot \sum_{i=0}^{K-1} \text{var}[P_{xx}^{(i)}(f)] = \frac{1}{K} \text{var}[P_{xx}^{(i)}(f)]$$

rozptyl se sníží K-krát

# WELCHOVA METODA

dvě modifikace Bartletovy metody

☑ překrývání segmentů

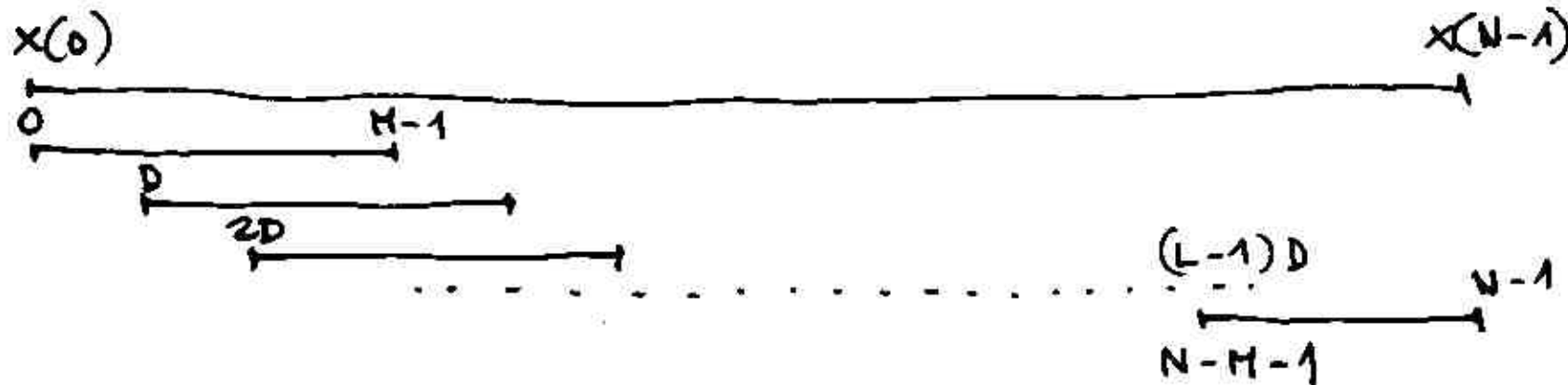
$$x_i(nT_{vz}) = x(nT_{vz} + iT_{vz}),$$

$i=0, 1, \dots, K-1$  (počet segmentů);

$n=0, 1, \dots, M-1$  (počet vzorků v segmentu)

$D$  je posun okna;  $L$  je počet segmentů

pro  $D=M$  se segmenty nepřekrývají (dělení odpovídá B.m.)



# WELCHOVA METODA

- ☑ váhování vzorků v každém segmentu oknem před výpočtem periodogramů

$$\tilde{P}_{xx}(f) = \frac{1}{MT_{vz}U} \left| T_{vz} \sum_{n=0}^{M-1} x_i(nT_{vz}) \cdot w(nT_{vz}) \cdot \exp(-2\pi jfnT_{vz}) \right|^2, \quad i = 0, \dots, L-1$$

kde  $U$  je výkonový normalizační faktor okna daný vztahem

$$U = \sum w^2(nT_{vz})/M$$

normalizační faktor  $U$  zajišťuje jednotkovou plochu vymezenou tvarem okna ve spektrální oblasti

$$\int_{-F/2}^{F/2} W(f) df = 1$$

Welchův odhad výkonového spektra

$$\tilde{P}_{xx}^W(f) = \frac{1}{L} \sum_{L-1} \tilde{P}_{xx}^{(i)}(f)$$



# STATISTICKÉ VLASTNOSTI WELCHOVA ODHADU

střední hodnota:

$$E[\hat{P}_{xx}^W(f)] = \frac{1}{L} \sum_{i=0}^{L-1} E[\tilde{P}_{xx}^{(i)}(f)] = E[\tilde{P}_{xx}^{(i)}(f)]$$

střední hodnota modifikovaného dílčího periodogramu:

$$\begin{aligned} E[\hat{P}_{xx}^{(i)}(f)] &= \frac{1}{MT_{vz}U} T_{vz}^2 \sum_{n=0}^{M-1} \sum_{m=0}^{M-1} w(nT_{vz})w(mT_{vz}) E[x_i(nT_{vz})x_i(mT_{vz})] \cdot e^{-j2\pi f(n-m)T_{vz}} = \\ &= \frac{1}{MT_{vz}U} T_{vz}^2 \sum_{n=0}^{M-1} \sum_{m=0}^{M-1} w(nT_{vz})w(mT_{vz}) \cdot \gamma_{xx}(nT_{vz} - mT_{vz}) \cdot e^{-j2\pi f(n-m)T_{vz}}. \end{aligned}$$

Protože

$$\gamma_{xx}(nT_{vz}) = \int_{-F/2}^{F/2} \Gamma_{xx}(\alpha) \cdot e^{-j2\pi\alpha nT_{vz}} d\alpha, \text{ je}$$

$$\begin{aligned} E[\hat{P}_{xx}^{(i)}(f)] &= \frac{1}{MT_{vz}U} \int_{-F/2}^{F/2} \Gamma_{xx}(\alpha) \cdot \left[ T_{vz}^2 \sum_{n=0}^{M-1} \sum_{m=0}^{M-1} w(nT_{vz})w(mT_{vz}) \cdot e^{-j2\pi(n-m)(f-\alpha)T_{vz}} \right] \cdot d\alpha = \\ &= \int_{-F/2}^{F/2} \Gamma_{xx}(\alpha) \cdot W(f - \alpha) d\alpha, \end{aligned}$$

$$\text{kde } W(f) = \frac{1}{MT_{vz}U} \left| T_{vz} \sum_{n=0}^{M-1} w(nT_{vz}) \cdot e^{-j2\pi f n T_{vz}} \right|^2$$

# STATISTICKÉ VLASTNOSTI WELCHOVA ODHADU

rozptyl

$$\text{var}[P_{xx}^W(f)] = \frac{1}{L^2} \sum_{i=0}^{L-1} \sum_{j=0}^{L-1} E[\tilde{P}_{xx}^{(i)}(f) \cdot \tilde{P}_{xx}^{(j)}(f)] - \{E[\tilde{P}_{xx}^W(f)]\}^2$$

segmenty bez překrývání ( $L = K$ )

$$\begin{aligned} \text{var}[P_{xx}^W(f)] &= \frac{1}{L} \text{var}[\tilde{P}_{xx}^{(i)}(f)] \\ &\approx \frac{1}{L} \cdot \Gamma_{xx}^2(f) \end{aligned}$$

segmenty s 50% překrytím a Bartlettovým (trojúhelníkovým) oknem ( $L = 2K$ )

$$\text{var}[P_{xx}^W(f)] \approx \frac{9}{8L} \cdot \Gamma_{xx}^2(f)$$

# BLACKMANOVA-TUKEYHO METODA VYHLAZENÍ PERIODOGRAMU

nepřímá metoda – přes výpočet odhadu autokorelační funkce

- ✓ výpočet odhadu autokorelační funkce
- ✓ váhování odhadu autokorelační funkce oknem  
 $w(mT_{vz}) \neq 0$  pro  $-M+1 \leq m \leq M-1$ ;  $w(mT_{vz}) = 0$  pro  $|m| \geq M$   
váhování autokorelační funkce oknem → vyhlazení periodogramu; sníží se rozptyl, omezí se frekvenční rozlišovací schopnost
- ✓ výpočet Fourierovy transformace váhovaného odhadu autokorelační funkce – váhování snižuje vliv odhadu autokorelační funkce počítaného pro malé hodnoty  $(N-m)T_{vz}$ , tj. velký posun  $m$

# BLACKMANOVA-TUKEYHO METODA VYHLAZENÍ PERIODOGRAMU

Blackmanův-Tukeyův odhad

$$\tilde{P}_{xx}^{BT}(f) = T_{vz} \sum_{m=-(M-1)}^{M-1} r_{xx}(mT_{vz}) \cdot w(mT_{vz}) \cdot \exp(-2\pi jfmT_{vz})$$

$$w(mT_{vz}) \begin{cases} \neq 0 & \text{pro } -M+1 \leq m \leq M-1 \\ = 0 & |m| \geq M \end{cases}$$

$$\tilde{P}_{xx}^{BT}(f) = T_{vz} \sum_{m=-\infty}^{\infty} r_{xx}(mT_{vz}) \cdot w(mT_{vz}) \cdot \exp(-2\pi jfmT_{vz})$$

ve frekvenční oblasti

$$\tilde{P}_{xx}^{BT}(f) = \int_{-F/2}^{F/2} \tilde{P}_{xx}(\alpha) \cdot W(f - \alpha) d\alpha, \quad \text{kde } \tilde{P}_{xx}(\alpha) \text{ je periodogram}$$

Váhování AKF oknem  $\Rightarrow$  vyhlazení periodogramu –  
sníží se rozptyl, omezí se rozlišovací schopnost

# BLACKMANOVA-TUKEYHO METODA VYHLAZENÍ PERIODOGRAMU

požadavky na okna:

- sudá funkce (symetrická kolem  $m=0$ ) ... odhad výkonového spektra bude reálná funkce
- $W(f) \geq 0$  pro  $|f| \leq F/2 \Rightarrow$  odhad výkonové spektrální funkce bude nezáporný pro  $|f| \leq F/2$

# BLACKMANOVA-TUKEYHO METODA STATISTICKÉ VLASTNOSTI ODHADU

střední hodnota

$$E[\widehat{P}_{xx}^{BT}(f)] = \int_{-F/2}^{F/2} E[\widehat{P}_{xx}(\alpha)] W(f - \alpha) d\alpha,$$

$$\text{kde } E[\widehat{P}_{xx}(\alpha)] = \int_{-F/2}^{F/2} \Gamma_{xx}(\theta) W_B(\alpha - \theta) d\theta$$

$$E[\widehat{P}_{xx}^{BT}(f)] = \int_{-F/2}^{F/2} \int_{-F/2}^{F/2} \Gamma_{xx}(\theta) W_B(\alpha - \theta) W(f - \alpha) d\alpha d\theta.$$

v časové oblasti:

$$\begin{aligned} E[\widehat{P}_{xx}^{BT}(f)] &= T_{vz} \sum_{m=-(M-1)}^{M-1} E[r_{xx}(mT_{vz})] w(mT_{vz}) e^{-j2\pi f m T_{vz}} = \\ &= T_{vz} \sum_{m=-(M-1)}^{M-1} \gamma_{xx}(mT_{vz}) w_B(mT_{vz}) w(mT_{vz}) e^{-j2\pi f m T_{vz}} \end{aligned}$$

kde  $w_B(mT_{vz})$  je Bartlettovo okno

# BLACKMANOVA-TUKEYHO METODA STATISTICKÉ VLASTNOSTI ODHADU

pokud  $M \ll N$

( $2M-1$  je délka okna;  $N$  je délka analyzované posloupnosti),  
tj. délka okna  $w$  je mnohem menší než délka Bartlettova okna

$$E[\hat{P}_{xx}^{BT}(f)] \approx \int_{-F/2}^{F/2} \Gamma_{xx}(\theta) \cdot W(f - \theta) \cdot d\theta,$$

protože

$$\begin{aligned} \int_{-F/2}^{F/2} W_B(\alpha - \theta) \cdot W(f - \alpha) \cdot d\alpha &= \int_{-F/2}^{F/2} W_B(\alpha - \theta) \cdot W(\alpha - f) \cdot d\alpha = \\ &= \int_{-F/2}^{F/2} W_B(\alpha - \theta + f) \cdot W(\alpha) \cdot d\alpha \approx W(f - \theta) \end{aligned}$$

$$\text{analogie: } \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \delta(t - t_0) dt \sim f(t_0)$$

# BLACKMANOVA-TUKEYHO METODA STATISTICKÉ VLASTNOSTI ODHADU

rozptyl:

$$\text{var}[\hat{P}_{xx}^{\text{BT}}(f)] = E\left\{\left[\hat{P}_{xx}^{\text{BT}}(f)\right]^2\right\} - \left\{E\left[\hat{P}_{xx}^{\text{BT}}(f)\right]\right\}^2$$

toto už umíme

$$E\left\{\left[\hat{P}_{xx}^{\text{BT}}(f)\right]^2\right\} = \int_{-F/2}^{F/2} \int_{-F/2}^{F/2} E\left[\hat{P}_{xx}(\alpha) \cdot \hat{P}_{xx}(\theta)\right] W(f - \alpha) W(f - \theta) \cdot d\alpha d\theta$$

s tím už se obecně nedá hnout, pouze klademe-li si doplňkové předpoklady o vlastnostech náhodného procesu, jehož realizací je analyzovaná posloupnost;



# BLACKMANOVA-TUKEYHO METODA

## STATISTICKÉ VLASTNOSTI ODHADU

je-li náhodný proces normální, délka analyzované posloupnosti  $N \gg M$  .. délka okna váhujícího autokorelační posloupnost, pak

$$\text{var}[\hat{P}_{xx}^{\text{BT}}(f)] \approx \frac{1}{N} \int_{-F/2}^{F/2} \Gamma_{xx}^2(\alpha) \cdot W^2(f - \alpha) d\alpha$$

dále, je-li  $W(f)$  úzké ve srovnání se skutečným spektrem  $\Gamma_{xx}(f)$  lze výraz pro rozptyl ještě zjednodušit na

$$\begin{aligned} \text{var}[\hat{P}_{xx}^{\text{BT}}(f)] &\approx \Gamma_{xx}^2(f) \left[ \frac{1}{N} \int_{-F/2}^{F/2} W^2(\theta) d\theta \right] \\ &\approx \Gamma_{xx}^2(f) \left[ \frac{1}{N} \sum_{m=-(N-1)}^{N-1} w^2(nT_{vz}) \right] \end{aligned}$$

# SROVNÁNÍ NEPARAMETRICKÝCH METOD ODHADU VÝKONOVÉHO SPEKTRA

☑ míra kvality

$$Q_A = \frac{\{E[\tilde{P}_{xx}^A(f)]\}^2}{\text{var}[\tilde{P}_{xx}^A(f)]},$$

A je označení metody

Používá se i převrácená hodnota, nazývá se  
**variabilita.**

# SROVNÁNÍ NEPARAMETRICKÝCH METOD ODHADU VÝKONOVÉHO SPEKTRA

## PERIODOGRAM

$$E[\hat{P}_{xx}(f)] = T_{vz} \sum_{m=-\infty}^{\infty} w_B(mT_{vz}) \cdot \gamma_{xx}(mT_{vz}) \cdot e^{-j2\pi f m T_{vz}} = \int_{-F/2}^{F/2} \Gamma_{xx}(\alpha) \cdot W_B(f - \alpha) \cdot d\alpha$$

$$\text{var}[\hat{P}_{xx}(f)] = \Gamma_{xx}^2(f) \cdot \left[ 1 + \left( \frac{\sin 2\pi N T_{vz}}{N \cdot \sin 2\pi T_{vz}} \right)^2 \right]$$

pro velká  $N$ , tj.  $N \rightarrow \infty$

toto jen pro normální rozložení

$$E[\hat{P}_{xx}(f)] \rightarrow \Gamma_{xx}(f) \cdot \int_{-F/2}^{F/2} W_B(\theta) \cdot d\theta = \Gamma_{xx}(f) \quad \text{asymptoticky nestranný}$$

$$\text{var}[\hat{P}_{xx}(f)] = \Gamma_{xx}^2(f) \quad \text{nekonzistentní}$$

shrnutí:

$$Q_P = \frac{\Gamma_{xx}^2(f)}{\Gamma_{xx}^2(f)} = 1 \quad \text{asymptoticky}$$

# SROVNÁNÍ NEPARAMETRICKÝCH METOD ODHADU VÝKONOVÉHO SPEKTRA

## BARTLETTŮV ODHAD

$$E[\hat{P}_{xx}^B(f)] = \int_{-F/2}^{F/2} \Gamma_{xx}(\alpha) \cdot W_B(f - \alpha) \cdot d\alpha$$

$$\text{var}[\hat{P}_{xx}(f)] = \frac{1}{K} \Gamma_{xx}^2(f) \cdot \left[ 1 + \left( \frac{\sin 2\pi N T_{vz}}{N \cdot \sin 2\pi T_{vz}} \right)^2 \right] \quad \text{znovu pro normální rozložení}$$

pro  $N \rightarrow \infty$ ,  $M \rightarrow \infty$ , zatímco  $K = N/M$  zůstává konstantní

$$E[\hat{P}_{xx}^B(f)] = \Gamma_{xx}(f) \int_{-F/2}^{F/2} W_B(\theta) \cdot d\theta = \Gamma_{xx}(f)$$

$$\text{var}[\hat{P}_{xx}(f)] \rightarrow \frac{1}{K} \Gamma_{xx}^2(f)$$

# SROVNÁNÍ NEPARAMETRICKÝCH METOD ODHADU VÝKONOVÉHO SPEKTRA

## BARTLETTŮV ODHAD

shrnutí: asymptoticky nestranný, nekonzistentní  
(kdyby  $K$  rostlo s  $N \rightarrow \infty$ , byl by konzistentní)

$$Q_B = \frac{\Gamma_{xx}^2(f)}{\frac{1}{K} \cdot \Gamma_{xx}^2(f)} = K = \frac{N}{M} \quad \text{asymptoticky}$$

frekvenční rozlišovací schopnost určená šířkou pásma  
při poklesu o 3 dB ( $\square$  okno)

$$\Delta f = \frac{0,9}{MT_{vz}} \Rightarrow M = \frac{0,9}{(\Delta f \cdot T_{vz})} \quad Q_B = \frac{N}{M} = \frac{N}{\frac{0,9}{(\Delta f \cdot T_{vz})}} = 1,11 \cdot N \cdot (\Delta f \cdot T_{vz})$$

# SROVNÁNÍ NEPARAMETRICKÝCH METOD ODHADU VÝKONOVÉHO SPEKTRA

## WELCHŮV ODHAD

$$E[\hat{P}_{xx}^W(f)] = \int_{-F/2}^{F/2} \Gamma_{xx}(\theta) \cdot W(f - \theta) d\theta, \quad \text{kde } W(f) = \frac{1}{MT_{vz}U} \left| T_{vz} \sum_{n=0}^{M-1} w(nT_{vz}) \cdot e^{-j2\pi f n T_{vz}} \right|^2$$

$$\text{var}[\hat{P}_{xx}^W(f)] = \begin{cases} \frac{1}{L} \cdot \Gamma_{xx}^2(f) & \text{bez překrývání segmentů} \\ \frac{9}{8L} \cdot \Gamma_{xx}^2(f) & \text{s 50\% překrýváním} \end{cases}$$

pro  $N \rightarrow \infty, M \rightarrow \infty$

$$E[\hat{P}_{xx}^W(f)] = \Gamma_{xx}(f)$$

# SROVNÁNÍ NEPARAMETRICKÝCH METOD ODHADU VÝKONOVÉHO SPEKTRA

## WELCHŮV ODHAD

shrnutí: asymptoticky nestranný, pro  $L \rightarrow \infty$  konzistentní, jinak  
ne

$$Q_w = \begin{cases} L = \frac{N}{M} & \text{bez překrývání} \\ \frac{8L}{9} = \frac{16N}{9M} & \text{s 50\% překrýváním} \\ & (L=2K=2N/M ?) \end{cases}$$

frekvenční rozlišovací schopnost      trojúhelníkové okno

$$\Delta f = \frac{1,28}{MT_{vz}} \Rightarrow M = \frac{1,28}{(\Delta f \cdot T_{vz})}$$

$$Q_w = \begin{cases} 0,78 \cdot N \cdot (\Delta f \cdot T_{vz}) & \text{..... bez překrývání} \\ 1,39 \cdot N \cdot (\Delta f \cdot T_{vz}) & \text{..... s 50\% překrýváním} \end{cases} + \Delta \text{ okno}$$

# SROVNÁNÍ NEPARAMETRICKÝCH METOD ODHADU VÝKONOVÉHO SPEKTRA

## BLACKMANŮV-TUKEYHO ODHAD

$$E[\widehat{P}_{xx}^{BT}(f)] \approx \int_{-F/2}^{F/2} \Gamma_{xx}(\theta) \cdot W(f - \theta) d\theta,$$

$$\text{var}[\widehat{P}_{xx}^{BT}(f)] \approx \Gamma_{xx}^2(f) \cdot \left[ \frac{1}{N} \sum_{n=-(M-1)}^{M-1} w^2(nT_{vz}) \right]$$

$$\frac{1}{N} \sum_{n=-(M-1)}^{M-1} w^2(nT_{vz}) = \begin{cases} \frac{2M}{N} & \text{obdélníkové okno} \\ \frac{2M}{3N} & \text{trojúhelníkové okno} \end{cases}$$



# SROVNÁNÍ NEPARAMETRICKÝCH METOD ODHADU VÝKONOVÉHO SPEKTRA

## BLACKMANŮV-TUKEYHO ODHAD

shrnutí: asymptoticky nestranný, nekonzistentní

$$Q_{BT} = 1,5 \cdot \frac{N}{M} \quad \text{pro trojúhelníkové okno}$$

protože délka okna je  $2M-1$ , frekvenční rozlišovací schopnost

$$\Delta f = \frac{1,28}{2MT_{vz}} = \frac{0,64}{M \cdot T_{vz}}$$

$$Q_{BT} = \frac{1,5}{0,64} \cdot N \cdot (\Delta f \cdot T_{vz}) = 2,34 \cdot N \cdot (\Delta f \cdot T_{vz})$$

# SROVNÁNÍ NEPARAMETRICKÝCH METOD ODHADU VÝKONOVÉHO SPEKTRA

srovnání všech výsledků:

! koeficient kvality závisí na  $N$  (čím větší  $N$ ,  
tím větší  $Q$ )

neplatí u periodogramu

! koeficient kvality závisí na součinu  $N \cdot \Delta f \Rightarrow$   
 $\Rightarrow$  při stejné kvalitě lze pokles  $\Delta f$   
kompenzovat růstem  $N$  a naopak

# VÝPOČETNÍ POŽADAVKY NEPARAMETRICKÝCH METOD ODHADU VÝKONOVÉHO SPEKTRA

Požadavky vychází z předpokladu, že:

- ☑ se zpracovává sekvence o délce  $N$  vzorků a je specifikována relativní rozlišovací schopnost  $\Delta f \cdot T_{vz}$ ;
- ☑ pro výpočet se použije radix-2 FFT algoritmus
- ☑ pracnost je vyjádřena pouze počtem komplexních násobení

# VÝPOČETNÍ POŽADAVKY NEPARAMETRICKÝCH METOD ODHADU VÝKONOVÉHO SPEKTRA

Bartlettův odhad

$$\text{délka FFT: } M = \frac{0,9}{(\Delta f \cdot T_{vz})} \quad \text{počet FFT: } \frac{N}{M} = 1,11 \cdot N \cdot (\Delta f \cdot T_{vz})$$

$$\text{pracnost: } \frac{N}{M} \cdot \frac{M}{2} \cdot \log_2 M = \frac{N}{2} \log_2 \frac{0,9}{(\Delta f \cdot T_{vz})}$$

Welchův odhad (50% překrytí):

$$\text{délka FFT: } M = \frac{1,28}{(\Delta f \cdot T_{vz})} \quad \text{počet FFT: } \frac{2N}{M} = 1,56 \cdot N \cdot (\Delta f \cdot T_{vz})$$

$$\text{pracnost: } \frac{2N}{M} \cdot \frac{M}{2} \cdot \log_2 M = N \cdot \log_2 \frac{1,28}{(\Delta f \cdot T_{vz})}$$

kromě výpočtu FFT je potřeba násobení pro váhování dat oknem  
každý segment potřebuje M násobení, tedy celková pracnost je

$$2N + N \cdot \log_2 \frac{1,28}{(\Delta f \cdot T_{vz})} = N \cdot \log_2 \frac{5,12}{(\Delta f \cdot T_{vz})}$$

# VÝPOČETNÍ POŽADAVKY NEPARAMETRICKÝCH METOD ODHADU VÝKONOVÉHO SPEKTRA

Blackmanův-Tukeyho odhad:

výpočet autokorelace  $r_{xx}(mT_{vz})$  ... přes FFT,  
délka  $2M = \frac{1,28}{\Delta f \cdot T_{vz}}$

celková pracnost:

$$\frac{N}{M} \cdot [M \cdot \log_2 2M] = N \cdot \log_2 \frac{1,28}{\Delta f \cdot T_{vz}}$$

# SROVNÁNÍ NEPARAMETRICKÝCH METOD ODHADU VÝKONOVÉHO SPEKTRA

metoda	míra kvality	pracnost
periodogram	1	$\frac{N}{2} \cdot \log_2 N$
Bartlett	$1,11N(\Delta f \cdot T_{vz})$	$\frac{N}{2} \log_2 \frac{0,9}{(\Delta f \cdot T_{vz})}$
Welch (50% překrytí)	$1,39N(\Delta f \cdot T_{vz})$	$N \cdot \log_2 \frac{5,12}{(\Delta f \cdot T_{vz})}$
Blackman-Tukey	$2,34N(\Delta f \cdot T_{vz})$	$N \cdot \log_2 \frac{1,28}{\Delta f \cdot T_{vz}}$

# NEPARAMETRICKÉ METODY

## ☑ **výhody:**

→ relativně jednoduché, srozumitelné, pomocí DFT (FFT) snadno spočitatelné

## ☑ **nevýhody:**

→ potřeba dlouhého záznamu pro dostatečnou frekvenční rozlišovací schopnost;

→ prosakování spekter díky použitým oknům (maskování slabých signálů);

→ omezení vyplývající z předpokladu, že  $r_{xx}(mT)=0$  pro  $|m| \geq N$

→ vnucená periodičita signálu definicí periodogramu