JARO 20xx $\boxed{\text{X}}$

Vzorová zkouška M2100

Skupina A

1. (0.5 bodu) Určete řešení diferenciální rovnice $x^2y' = xy + y^2$ splňující $y(1) = -1$. Určete také maximální interval, na kterém toto řešení existuje.

2. (0.5 bodu) Určete řešení Clairautovy diferenciální rovnice $y = xy' - \frac{1}{3}(y')^3$.

3. (0.5 bodu) Metodou neurčitých koeficientů určete obecné řešení diferenciální rovnice $y'' - y = xe^{-x}$.

4. (0.5 bodu) V prostoru $C[0,1]$ spojitých funkcí určete vzdálenost funkcí $f(x) = \sqrt{x}$ a $g(x) = x^2$ ve stejnoměrné metrice ρ_∞ a v integrální metrice ρ_1. Na obrázku vyznačte geometrický význam těchto vzdáleností.

5. (0.5 bodu) Uvažujme zobrazení F mezi metrickým prostorem $C[0,1]$ spojitých funkcí na intervalu $[0,1]$ se stejnoměrnou metrikou ρ_∞ a metrickým prostorem $\mathbb{E}^1$, které je pro $f \in \mathcal{C}[0,1]$ zadáno vzorcem $F(f) = \int_0^1 f(x)\,dx$. Rozhodněte a řádně zdůvodněte, jestli je toto zobrazení F spojité na $C[0,1]$. Dále rozhodněte, jestli je zobrazení F lipschitzovské a s jakou konstantou, případně jestli je F kontrakce.

6. (0.5 bodu) V metrickém prostoru C^∞ funkcí se spojitými derivacemi všech řádů na $\mathbb{R}$ mějme zobrazení $G : C^\infty \to C^\infty$, které je pro $f \in C^\infty$ zadáno vzorcem $G(f) = f'$. Určete všechny pevné body tohoto zobrazení G.

7. (0.5 bodu) Určete směrovou derivaci funkce $f(x,y) = x^2 + 2xy - y^2$ v bodě $[1,2]$ ve směru vektoru $u = (1,-1)$.

8. (0.5 bodu) Uveďte příklad funkce $f(x,y)$, která má (vlastní) obě parciální derivace v bodě $[0,0]$, ale která není v bodě $[0,0]$ spojitá.

9. (0.5 bodu) Určete lokální extrémy funkce $f(x,y) = e^{x^2-y^2}$.

10. (0.5 bodu) Rozhodněte a zdůvodněte, jestli je funkce $F(x,y) = (x+y)\,\sin(x^2-y^2)$ diferencovatelná v bodě $[1,1]$. Pokud ano, určete její diferenciál $dF(1,1)(dx,dy)$.

---

11. (1.5 bodu) Určete obecné řešení diferenciální rovnice $y'' - y = \frac{2}{1+e^x}$.

12. (1.5 bodu) Určete, ve kterých bodech má implicitní funkce $y = y(x)$ zadaná rovnicí $F(x,y) = 3x^2 + 2xy - y^2 - 3y + x - \frac{5}{4} = 0$ vodorovnou tečnu a rovnici této tečny určete. Ověřte dále, že ve vypočtených bodech skutečně implicitní funkce existuje.

13. (2 body) Metodou Lagrangeových multiplikátorů určete vázané extrémy funkce $f(x,y) = \frac{2}{x} + \frac{2}{y} + \frac{2}{z}$ na množině M dané rovnicí $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} = 12$.