Následující text není ničím více, než zápisem přednášky předmětu M4010 Rovnice matematické fyziky. Má sloužit především k tomu, aby student-ky/i nebyl-y/i během přednášky nucen-y/i si dělat podrobné poznámky, přepisovat často komplikované formule z tabule do svých papírů (což je natolik intenzivním zdrojem chyb, že se jim prakticky nelze vyhnout). Poté může posloužit jako rychlá připomínka toho, co člověk již zná. V žádném případě nemůže být považován za zdroj, z něhož se lze rovnicím matematické fyziky naučit. Sám o sobě bez komentářů během přednášky je málo srozumitelný až nesrozumitelný (aby byl s komentáři srozumitelný, je mým přáním a snahou; nakolik se to skutečně zdaří, nechám k posouzení laskavým student-kám/ům).

V textu asi zůstaly nějaké nedůslednosti, formulační nejasnosti nebo dokonce chyby. Budu vděčný každému, kdo mě na ně upozorní.

Zdeněk Pospíšil
únor 2017

Obsah

Motivační úlohy **1**
Vymírání populace . . . 1
Advekce a difúze . . . 2
Kmitání struny . . . 5

1 Metody charakteristik **9**
1.1 Parciální diferenciální rovnice prvního řádu . . . 9
1.2 Parciální diferenciální rovnice druhého řádu lineární ve druhých derivacích . . . 15
1.3 Kanonický tvar parciální diferenciální rovnice druhého řádu ve dvou nezávisle proměnných lineární ve druhých derivacích . . . 17
1.4 Počáteční úloha pro hyperbolickou rovnici ve dvou nezávisle proměnných . . . 20
Cvičení . . . 28

2 Metody integrálních transformací **29**
2.1 Fourierova transformace . . . 29
2.2 Laplaceova transformace . . . 34
Cvičení . . . 36

3 Metoda separace proměnných (Fourierova) **37**
3.1 Hyperbolické rovnice . . . 37
3.2 Parabolické rovnice . . . 46
3.3 Eliptické rovnice . . . 49
Cvičení . . . 59

4 Metody řešení eliptické rovnice **63**
4.1 Integrace per partes a Greenovy vzorce . . . 63
4.2 Jednoznačnost řešení Dirichletovy a Neumannovy úlohy pro Poissonovu rovnici . . . 64
4.3 Laplaceova rovnice a harmonické funkce . . . 64
4.4 Metoda potenciálů . . . 72
4.5 Greenova funkce Laplaceova operátoru . . . 78
4.6 Vlastní čísla a vlastní funkce Laplaceova operátoru . . . 86
Cvičení . . . 88

5 Schrödingerova rovnice **89**
5.1 Řešení za zjednodušujících předpokladů . . . 90

Dodatky

A Distribuce **97**
A.1 Základní pojmy . . . 97
A.2 Konvergence v prostoru distribucí . . . 100
A.3 Derivování distribucí . . . 103
Cvičení . . . 107

B Okrajové úlohy pro obyčejné diferenciální rovnice **109**
B.1 Formulace úloh . . . 109
B.2 Vlastní čísla a vlastní funkce homogenní okrajové úlohy . . . 112
B.3 Řešení nehomogenní okrajové úlohy . . . 115
Cvičení . . . 118

C Speciální funkce **121**
C.1 Legendreovy polynomy . . . 121
C.2 Čebyševovy-Laguerreovy polynomy . . . 126
C.3 Čebyševovy-Hermiteovy polynomy . . . 131
C.4 Funkce Γ . . . 133
C.5 Besselovy funkce . . . 140

D Laplaceův operátor v křivočarém souřadném systému **149**

V češtině existuje několik učebnic parciálních diferenciálních rovnic (rovnic matematické fyziky):

1. A. N. Tichonov, A. A. Samarskij: *Rovnice matematické fysiky*, ČSAV, Praha 1955, 765 stran.
   Důkladná učebnice, v podstatě encyklopedie klasických metod řešení parciálních diferenciálních rovnic druhého řádu.

2. R. Rychnovský, J. Výborná: *Parciální diferenciální rovnice a jejich některá řešení*, SNTL, Praha 1963, 167 stran.
   Stručný úvod do problematiky parciálních diferenciálních rovnic. Pěkně jsou zpracovány rovnice prvního řádu.

3. S. Míka, A. Kufner: *Okrajové úlohy pro obyčejné diferenciální rovnice*, Edice Matematika pro VŠT, sešit XIX, SNTL, Praha 1981, 88 stran.

4. S. Míka, A. Kufner: *Parciální diferenciální rovnice I. Stacionární rovnice*, Edice Matematika pro VŠT, sešit XX, SNTL, Praha 1983, 181 stran.

5. J. Barták, L. Herrmann, V. Lovicar, O. Vejvoda: *Parciální diferenciální rovnice II. Evoluční rovnice*, Edice Matematika pro VŠT, sešit XXI, SNTL, Praha 1988, 220 stran.

6. J. Franců: *Parciální diferenciální rovnice*, VUT, PC-DIR Real s.r.o., Brno 2000, 155 stran.
   Přehledná a srozumitelná skripta. Jejich rozsah se zhruba shoduje s rozsahem předmětu M4010.

7. P. Čihák a kol.: *Matematická analýza pro fyziky (V)*, Matfyzpress, Praha 2001, 320 stran.
   Skripta, podle nichž se učí na spřátelené fakultě.

8. J Kopáček a kol.: *Příklady z matematiky pro fyziky [V]*, Matfyzpress, Praha 2003, 306 stran.
   Užitečná sbírka úloh.

Z anglicky psaných učebnic lze uvést:

i. G. Evans, J. Blackledge, P. Yardley: *Analytic Methods for Partial Differential Equations*, Springer, London 2000, xii+299 stran.
   Přístupně psaná učebnici ze série Springer Undergraduate Mathematics.

ii. M. E. Taylor: *Partial Differential Equations I. Basic Theory*, Springer, New York-Dordrecht-Heidelberg-London 2010, xxii+654 stran.
   První díl důkladné třídílné monografie o parciálních diferenciálních rovnicích. Předpokládá základní znalosti reálné a komplexní analýzy, difererenciální geometrie a teorie míry.

Motivační úlohy

Vymírání populace

Uvažujme nějakou populaci, například obyvatele nějakého izolovaného ostrova. Předpokládejme, že známe složení této populace v nějakém čase a zajímá nás, jak se bude vyvíjet velikost této části populace (tj. tvořené jedinci, kteří byli živi již na počátku, jedince, kteří se v průběhu času narodili, neuvažujeme). K popisu velikosti populace můžeme používat dvě veličiny. Můžeme ji vyjadřovat jako množství jedinců, kteří mají v čase t věk v rozmezí od a do $a+\tau$, tj. jedince, kteří mají v čase t věk z intervalu $[a, a+\tau)$; tuto veličinu označíme $N(t,a,\tau)$. Velikost populace však můžeme vyjádřit také jako tzv. *hustotu populace věku a v čase t,* kterou označíme symbolem $u(t,a)$. Hustota populace u a velikost populace N jsou vázány vztahem

$$N(t,a,\tau) = \int\limits_a^{a+\tau} u(t,\xi)\mathrm{d}\xi.$$

O hustotě u budeme předpokládat, že je to spojitě diferencovatelná funkce. Změna velikosti vymezené části populace je dána umíráním. Označme proto symbolem $D(t,a,\tau)$ množství jedinců, kteří zemřou během časového intervalu $(t, t+\tau]$ a v čase t mají věk v rozmezí $[a, a+\tau)$. Jedinci, kteří během časového intervalu délky τ nezemřeli, zestárli o τ. Tuto triviální skutečnost (zákon zachování) vyjádříme rovností

$$N(t+\tau, a+\tau, \tau) = N(t,a,\tau) - D(t,a,\tau). \tag{1}$$

Pomocí substituce $\eta = \xi - \tau$ vyjádříme levou stranu této rovnosti,

$$N(t+\tau, a+\tau, \tau) = \int\limits_{a+\tau}^{a+2\tau} u(t+\tau,\xi)\mathrm{d}\xi = \int\limits_a^{a+\tau} u(t+\tau, \eta+\tau)\mathrm{d}\eta,$$

takže s využitím Lagrangeovy věty o střední hodnotě pro funkce dvou proměnných můžeme psát

$$\begin{aligned} N(t+\tau, a+\tau, \tau) - N(t,a,\tau) &= \int\limits_a^{a+\tau} \big(u(t+\tau, \xi+\tau) - u(t,\xi)\big)\mathrm{d}\xi = \\ = \int\limits_a^{a+\tau} \left(\frac{\partial u}{\partial t}(t+\vartheta_1\tau, \xi+\tau)\tau + \frac{\partial u}{\partial a}(t, \xi+\vartheta_2\tau)\tau\right)\mathrm{d}\xi &= \tau \int\limits_a^{a+\tau} \left(\frac{\partial u}{\partial t}(t+\vartheta_1\tau, \xi+\tau) + \frac{\partial u}{\partial a}(t, \xi+\vartheta_2\tau)\right)\mathrm{d}\xi, \end{aligned} \tag{2}$$

kde ϑ_1, ϑ_2 jsou nějaká čísla z intervalu $[0,1]$. K vyjádření množství umírajících jedinců budeme předpokládat, že podíl zemřelých jedinců jistého věku za krátký časový interval délky Δt mezi všemi jedinci téhož věku je přímo úměrný trvání Δt procesu umírání,

$$\frac{D(t,a,\Delta t)}{N(t,a,\Delta t)} = \mu(a)\Delta t.$$

Koeficient úměrnosti $\mu(a)$, který závisí na věku a, nazýváme *specifická úmrtnost (mortalita) ve věku a.* Z uvedeného předpokladu dostaneme vyjádření množství umírajících jedinců ve tvaru

$$D(t,a,\Delta t) = \Delta t \left(\mu(a) \int\limits_a^{a+\Delta t} u(t,\xi)\mathrm{d}\xi\right). \tag{3}$$

Položíme $\tau = \Delta t$ a dosadíme rovnosti (2) a (3) do relace (1). Dostaneme

$$\int_a^{a+\Delta t} \left(\frac{\partial u}{\partial t}(t + \vartheta_1 \Delta t, \xi + \Delta t) + \frac{\partial u}{\partial a}(t, \xi + \vartheta_2 \Delta t) + \mu(a) u(t, \xi) \right) \mathrm{d}\xi = 0.$$

Tato rovnost má platit pro libovolná $a \geq 0$, $t \geq 0$ a $\Delta t > 0$. To je možné jen tak, že pro všechna přípustná $a, t, \Delta t$ platí

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t + \vartheta_1 \Delta t, a + \Delta t) + \frac{\partial u}{\partial a}(t, a + \vartheta_2 \Delta t) + \mu(a) u(t, a) = 0$$

a odtud limitním přechodem $\Delta t \to 0$ dostaneme *McKendrickovu-von Foersterovu rovnici*

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, a) + \frac{\partial u}{\partial a}(t, a) = -\mu(a) u(t, a). \tag{4}$$

Známé složení populace na počátku vyjádříme *počáteční podmínkou*

$$u(0, a) = \varphi(a). \tag{5}$$

Část populace, která od času $t = 0$ vymírá, je popsána hustotou $u(t, a)$ definovanou na množině

$$\left\{ (t, a) \in \mathbb{R}^2 : \ a \geq 0, t \leq a \right\}. \tag{6}$$

Zvolíme libovolné $a_0 \geq 0$ a pro $a \geq a_0$ položíme

$$x(a) = u(a - a_0, a).$$

Pak podle řetězového pravidla pro výpočet derivací složené funkce a podle rovnice (4) platí

$$\begin{aligned} x'(a) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a} u(a - a_0, a) &= \frac{\partial u}{\partial t}(a - a_0, a) \frac{\partial (a - a_0)}{\partial a} + \frac{\partial u}{\partial a}(a - a_0, a) \frac{\partial a}{\partial a} = \\ &= \frac{\partial u}{\partial t}(a - a_0, a) + \frac{\partial u}{\partial a}(a - a_0, a) = -\mu(a) u(a - a_0, a) = -\mu(a) x(a). \end{aligned}$$

Z počáteční podmínky (5) dostaneme

$$x(a_0) = u(a_0 - a_0, a_0) = \varphi(a_0). \tag{7}$$

Funkce x je tedy řešením obyčejné lineární homogenní rovnice

$$x'(a) = -\mu(a) x(a)$$

s počáteční podmínkou (7). To znamená, že

$$x(a) = \varphi(a_0) \mathrm{e}^{-\int_{a_0}^{a} \mu(\xi) \mathrm{d}\xi}$$

a poněvadž $u(t, a) = u(a - (a - t), a)$, můžeme psát řešení rovnice (4) s počáteční podmínkou (5) na množině (6) ve tvaru

$$u(t, a) = \varphi(a - t) \mathrm{e}^{-\int_{a-t}^{a} \mu(\xi) \mathrm{d}\xi}.$$

Advekce a difúze

Uvažujme tenký dlouhý válec, v němž proudí kapalina. Poloměr válce je vzhledem k jeho výšce (délce) tak malý, že válec s kapalinou můžeme považovat za jednorozměrný objekt a jeho jediný rozměr (délku) za nekonečný. Osu válce ztotožníme se souřadnou osou x. Představme si, že v proudící kapalině je nějaká látka, která je jednak unášena proudem, jednak v kapalině difunduje. Označme $u = u(t, x)$ koncentraci látky v čase t a v místě o souřadnici x. Tímto označením a terminologií se míní skutečnost, že množství látky, které se v časovém okamžiku t nachází v úseku válce od souřadnice α do souřadnice β je dáno integrálem

$$\int_\alpha^\beta u(t,\xi)\mathrm{d}\xi.$$

Chceme najít koncentraci látky v každém bodě válce v každém čase, pokud známe koncentraci na začátku děje, tj. v čase $t = 0$.

Označme rychlost proudící kapaliny symbolem v. Tato rychlost může být v každém místě jiná a může se měnit s časem, tj. $v = v(t,x)$. Pokud kapalina proudí v kladném směru osy x, je $v > 0$, pokud v záporném směru, je $v < 0$.

Zavedeme dále *difúzní tok* jako veličinu $g = g(t,x)$; tato veličina představuje rychlost částice látky způsobenou difúzí, znaménko určujeme podle stejné konvence jako v případě rychlosti v. Difúzní tok vyjadřuje, že množství látky, které se dostane difúzí přes levou hranici úseku válce α do tohoto úseku za krátký časový interval $[t, t+\Delta t]$ je rovno

$$g(t,\alpha)\Delta t,$$

a množství látky, které se dostane přes pravou hranici β z tohoto úseku za stejný časový interval je rovno

$$g(t,\beta)\Delta t;$$

tato interpretace předpokládá, že $g(t,\alpha) > 0$, $g(t,\beta) > 0$, kdyby tyto nerovnosti nebyly splněny, odpovídajícím způsobem bychom vyměnili slova „do úseku“ za „z úseku“ a naopak.

Množství částic, které je unášeno rychlostí v přes bod o souřadnici α do úseku (α,β), resp. přes bod o souřadnici β z úseku (α,β), je rovno

$$u(t,\alpha)v(t,\alpha)\Delta t, \quad \text{resp.} \quad u(t,\beta)v(t,\beta)\Delta t.$$

Ze zákona zachování hmoty a následnou úpravou s využitím Newtonovy-Leibnizovy formule dostaneme rovnost

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta u(t+\Delta t,\xi)\mathrm{d}\xi &= \int_\alpha^\beta u(t,\xi)\mathrm{d}\xi + g(t,\alpha)\Delta t - g(t,\beta)\Delta t + u(t,\alpha)v(t,\alpha)\Delta t - u(t,\beta)v(t,\beta)\Delta t = \\ &= \int_\alpha^\beta u(t,\xi)\mathrm{d}\xi - \left(\int_\alpha^\beta \frac{\partial}{\partial x}\big(g(t,\xi)+u(t,\xi)v(t,\xi)\big)\mathrm{d}\xi\right)\Delta t.\end{aligned}$$

Tuto rovnost upravíme na tvar

$$\int_\alpha^\beta \left(\frac{u(t+\Delta t,\xi)-u(t,\xi)}{\Delta t} + \frac{\partial}{\partial x}g(t,\xi) + \frac{\partial}{\partial x}\big(v(t,\xi)u(t,\xi)\big)\right)\mathrm{d}\xi = 0.$$

Úsek válce od souřadnice α do souřadnice β byl vybrán libovolně, stejně tak i časový okamžik t. To znamená, že pro všechna x a všechna t musí platit

$$\frac{u(t+\Delta t,x)-u(t,x)}{\Delta t} = -\frac{\partial}{\partial x}g(t,x) - \frac{\partial}{\partial x}\big(v(t,x)u(t,x)\big).$$

Odtud dostaneme limitním přechodem $\Delta t \to 0$ relaci

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) = -\frac{\partial}{\partial x}g(t,x) - \frac{\partial}{\partial x}\big(v(t,x)u(t,x)\big). \tag{8}$$

Tato relace váže neznámou funkci u (hustotu) a neznámou funkci g (difúzní tok). Potřebujeme tedy ještě nějak funkci g určit. Předpokládejme tedy, že difúzí se částice přesunuje z místa s větší koncentrací na místo s koncentrací menší (to je předpoklad celkem přirozený) a že rychlost difundující částice je přímo úměrná rozdílu (gradientu) koncentrací (tento předpoklad bývá nazýván *Fickův zákon*). Tedy

$$g(t,x) = -D\frac{\partial}{\partial x}u(t,x).$$

Kladný koeficient úměrnosti D se nazývá *difuzivita*; může se měnit s časem i s místem, tedy $D = D(t,x)$. Dosazením do rovnosti (8) dostaneme *rovnici advekce-difúze*

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) = \frac{\partial}{\partial x}\left(D(t,x)\frac{\partial}{\partial x}u(t,x)\right) - \frac{\partial}{\partial x}\big(v(t,x)u(t,x)\big). \tag{9}$$

Tato rovnice má být splněna pro každý čas $t > 0$ a každý bod $x \in \mathbb{R}$. K rovnici přidáme *počáteční podmínku* vyjadřující koncentraci difundující látky v počátečním čase $t = 0$

$$u(0,x) = \varphi(x), \tag{10}$$

která má platit pro každé $x \in \mathbb{R}$.

Pokud je kapalina homogenní, v čase se nemění, tj. $D(t,x) \equiv a^2 = const$, a proudí konstantní rychlostí $v(t,x) \equiv const$, můžeme obecnou rovnici advekce-difúze (9) zjednodušit na tvar

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) = a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,x) - v\frac{\partial}{\partial x}u(t,x). \tag{11}$$

V tomto případě můžeme prostorovou souřadnici transformovat — zavést novou souřadnou soustavu, která je „unášena rychlostí v“. Zavedeme tedy novou prostorovou souřadnici ξ vztahem

$$\xi = x - vt.$$

Pak podle řetězového pravidla pro výpočet parciálních derivací složených funkcí platí

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) = \frac{\partial}{\partial t}u\big(t,\xi(t,x)\big) = \frac{\partial}{\partial t}u\big(t,\xi(t,x)\big)\frac{\partial t}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \xi}u\big(t,\xi(t,x)\big)\frac{\partial \xi(t,x)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}u(t,\xi) - v\frac{\partial}{\partial \xi}u(t,\xi)$$

a analogicky a stručněji (bez psaní nezávisle proměnných)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}, \qquad \frac{\partial^2}{\partial x^2}u = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right) = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}u.$$

Dosazením do rovnice (9) dostaneme *rovnici difúze*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}.$$

Uvažujme jednoduchou situaci: v jednom bodě (který můžeme považovat za počátek souřadnic) do kapaliny v počátečním okamžiku „umístíme“ nějaké množství A látky, která se bude v neproudící kapalině šířit difúzí. Vývoj koncentrace difundující látky bude popsán rovnicí

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x), \qquad t > 0,\ x \in \mathbb{R}. \tag{12}$$

Na počátku je všechna difundující látka koncentrována v jediném bodě. To znamená, že pro její koncentraci v čase $t = 0$ musí platit

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} u(0,\xi)\mathrm{d}\xi.$$

Tato podmínka bude splněna, pokud počáteční podmínku pro rovnici (12) napíšeme ve tvaru

$$u(0,x) = A\delta(x), \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{13}$$

kde δ je Diracova distribuce, sr. dodatek A. Ze zákona zachování hmoty plyne, že musí být splněna podmínka

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(t,\xi)\mathrm{d}\xi = A \quad \text{pro všechna } t > 0. \tag{14}$$

Pokusíme se „uhodnout“ řešení rovnice (12) s počáteční podmínkou (13). Můžeme si představovat, že difúze probíhá tak, že jednotlivé molekuly látky se náhodně pohybují a že pravděpodobnost pohybu nalevo je stejná jako pravděpodobnost pohybu napravo. Koncentrace látky po jistém čase by tedy mohla mít tvar normálního (Gaussova) rozložení pravděpodobnosti se střední hodnotou 0. Rozptyl se však s časem mění — na počátku je nulový a s postupem času se zvětšuje. Pro rozptyl $\sigma^2 = \sigma(t)^2$ tedy platí

$$\sigma(0) = 0. \tag{15}$$

Řešení rovnice (12) s počáteční podmínkou (13) tedy budeme hledat ve tvaru

$$u(t,x) = A\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma(t)}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma(t)^2}}.$$

Z vlastností rozložení pravděpodobností je vidět, že při této volbě v každém čase t platí

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} u(t,\xi)\mathrm{d}\xi = A\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma(t)}\mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{2\sigma(t)^2}}\mathrm{d}\xi = A,$$

takže podmínka (14) je splněna. Má být splněna také rovnice (12). Proto vyjádříme

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \frac{A}{\sqrt{2\pi}}\left(-\frac{1}{\sigma(t)^2}\sigma'(t) + \frac{1}{\sigma(t)}\left(-\frac{x^2}{2}\left(-2\sigma(t)^{-3}\right)\sigma'(t)\right)\right)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma(t)^2}} =$$
$$= \frac{A}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma(t)^2}}\sigma'(t)\left(\frac{x^2}{\sigma(t)^4} - \frac{1}{\sigma(t)^2}\right) = \frac{A}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma(t)^2}}\left(x^2 - \sigma(t)^2\right)\frac{\sigma'(t)}{\sigma(t)^4},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{A}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sigma(t)}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma(t)^2}}\left(-\frac{2x}{2\sigma(t)^2}\right)\right) = -\frac{A}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sigma(t)^3}\frac{\partial}{\partial x}\left(x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma(t)^2}}\right) =$$
$$= -\frac{A}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sigma(t)^3}\left(1 + x\left(-\frac{2x}{2\sigma(t)^2}\right)\right)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma(t)^2}} = \frac{A}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma(t)^2}}\frac{1}{\sigma(t)^5}\left(x^2 - \sigma(t)^2\right).$$

Po dosazení do rovnice (12) a jednoduché úpravě dostaneme obyčejnou diferenciální rovnici pro neznámou funkci σ

$$\sigma'(t) = \frac{a^2}{\sigma(t)}.$$

Řešení této rovnice se separovanými proměnnými, které splňuje počáteční podmínku (15) je $\sigma(t) = \sqrt{2a^2t}$. Dostáváme tedy řešení počáteční úlohy (12), (13) ve tvaru

$$u(t,x) = \frac{A}{2\sqrt{a^2\pi t}}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4a^2t}}.$$

Kmitání struny

Uvažujme tenkou strunu napjatou podél osy x silou T. Chceme popsat malé kmity této struny, tj. odchylku každého bodu struny od rovnovážné polohy v každém čase. Aby tento problém byl relativně snadno zvládnutelný, přijmeme několik zjednodušujících předpokladů:

- Výchylky struny jsou tak malé, že její délku můžeme považovat za konstantní.
- Struna neklade odpor vůči ohýbání, je dokonale pružná.
- Každý bod vykonává pohyb pouze ve směru kolmém na osu x, tj. kmity jsou příčné.

Označme $u(t,x)$ výchylku bodu o souřadnici x v časovém okamžiku t. Uvažujme síly, které působí na úsek struny mezi body α a β.

Na strunu může působit nějaká vnější síla. Vzhledem ke třetímu předpokladu stačí uvažovat její složku F_e kolmou na osu x. Tato síla může být v každém bodě struny jiná a také se může měnit s časem. Proto ji vyjádříme pomocí její hustoty $g = g(t, x)$; hustota síly je definována tak, že vnější síla $F_e(t)$ působící na uvažovaný úsek struny v čase t je rovna

$$F_e(t) = \int_{\alpha}^{\beta} g(t, \xi) \mathrm{d}\xi.$$

Tahová síla T působí v bodě α ve směru tečny ke struně v tomto bodě. Její složka F_α kolmá na osu x má velikost $-T \sin \varphi_\alpha$, kde φ_α je úhel, který svírá osa x s tečnou ke struně v bodě α. Poněvadž ale kmity považujeme za malé, je úhel φ_α také malý, takže $\sin \varphi_\alpha \approx \operatorname{tg} \varphi_\alpha$. Hodnota $\operatorname{tg} \varphi_\alpha$ je současně směrnicí tečny k funkci $u(t, \cdot)$ v bodě α. Sílu F_α v čase t tedy můžeme vyjádřit jako

$$F_\alpha(t) = -T \frac{\partial}{\partial x} u(t, \alpha).$$

Podobně složku tahové síly působící na strunu v bodě β vyjádříme jako

$$F_\beta(t) = T \frac{\partial}{\partial x} u(t, \beta).$$

Celková síla působící na úsek struny mezi body α a β je tedy dána součtem $F_e + F_\beta + F_\alpha$, který upravíme s využitím Newtonovy-Leibnizovy formule:

$$\begin{aligned} F(t) = F_e(t) + F_\beta(t) + F_\alpha(t) &= \int_{\alpha}^{\beta} g(t, \xi) \mathrm{d}\xi + T \left(\frac{\partial}{\partial x} u(t, \beta) - \frac{\partial}{\partial x} u(t, \alpha) \right) = \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} g(t, \xi) \mathrm{d}\xi + T \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t, \xi) \mathrm{d}\xi = \int_{\alpha}^{\beta} \left(T \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t, \xi) + g(t, \xi) \right) \mathrm{d}\xi. \end{aligned} \tag{16}$$

Sílu působící na uvažovaný úsek struny však můžeme také vyjádřit pomocí zákona síly. K tomu označíme $\varrho = \varrho(x)$ lineární hustotu struny v bodě x. Lineární hustota je definována tak, že hmotnost úseku struny mezi body α a β je dána integrálem

$$\int_{\alpha}^{\beta} \varrho(\xi) \mathrm{d}\xi.$$

Hmotnost krátkého úseku struny mezi body x a $x + \Delta x$ je tedy podle věty o střední hodnotě integrálního počtu rovna

$$\Delta m = \int_{x}^{x+\Delta x} \varrho(\xi) \mathrm{d}\xi = \varrho(x + \vartheta \Delta x) \Delta x,$$

kde $\vartheta \in [0, 1]$ je nějaké číslo. Zrychlení bodu struny o souřadnici $x + \vartheta \Delta x$ je rovno

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(t, x + \vartheta \Delta x).$$

Sílu působící na uvažovaný krátký úsek struny tedy můžeme vyjádřit jako součin tohoto zrychlení a hmotnosti Δm,

$$\varrho(x + \vartheta \Delta x) \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(t, x + \vartheta \Delta x) \Delta x$$

a celkovou sílu působící na úsek struny mezi body α a β jako součet

$$\sum \varrho(x + \vartheta \Delta x) \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(t, x + \vartheta \Delta x) \Delta x,$$

kde sčítáme přes všechny úseky struny mezi body α, β. Tento součet je integrálním součtem funkce $\varrho(\cdot) \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} u(t, \cdot)$, takže pro $\Delta x \to 0$ dostaneme sílu $F(t)$, působící v čase t na úsek struny mezi body α a β, vyjádřenu Riemannovým integrálem

$$F(t) = \int_{\alpha}^{\beta} \varrho(\xi) \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(t, \xi) \mathrm{d}\xi. \tag{17}$$

Porovnáním (16) a (17) dostaneme

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} \left(\varrho(\xi) \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(t,\xi) - T \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} u(t,\xi) - g(t,\xi) \right) \mathrm{d}\xi = 0.$$

Tato rovnost může být pro libovolné hodnoty α a β splněna jen tak, že integrovaná funkce je nulová, tedy

$$\varrho(x) \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(t,x) = T \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t,x) + g(t,x).$$

Nyní položíme

$$a = a(x) = \sqrt{\frac{T}{\varrho(x)}}, \qquad f = f(t,x) = \frac{g(t,x)}{\varrho(x)}$$

a dostaneme *rovnici kmitání struny*

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(t,x) = a(x)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t,x) + f(t,x).$$

Uvažujme nejjednodušší případ — struna je homogenní, tj. $\varrho(x) \equiv const$ a nepůsobí na ni žádná vnější síla, tj. $g(t,x) \equiv 0$. Je tedy také $a(x) = a = const$ a $f(t,x) \equiv 0$. Rovnice kmitání struny nyní nabývá tvaru

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(t,x) = a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t,x). \tag{18}$$

Označme délku struny ℓ a uvažujme, že struna je v krajních bodech 0 a ℓ upevněna, nevykonává v těchto bodech žádný pohyb. K rovnici (18) tak dostáváme *okrajové podmínky*

$$u(t,0) = u(t,\ell) = 0 \tag{19}$$

pro každý čas $t \geq 0$. Strunu rozkmitáme tak, že ji v počátečním okamžiku $t = 0$ vychýlíme z její rovnovážné polohy a vypustíme. Struna má tedy v čase $t = 0$ nějaký tvar a nulovou rychlost, tj. funkce u splňuje *počáteční podmínky*

$$u(0,x) = \varphi(x), \qquad \frac{\partial}{\partial t} u(0,x) = 0 \tag{20}$$

pro každý bod $x \in [0,l]$. Počáteční funkce φ samozřejmě musí splňovat podmínku $\varphi(0) = \varphi(\ell) = 0$.

Řešení rovnice (18) s podmínkami (19), (20) „slyšíme“: zní základní tón a tóny alikvotní. Struna tedy vykonává harmonický pohyb o nějaké základní frekvenci ω a také harmonické pohyby s frekvencemi, které jsou násobky základní. Můžeme proto hádat, že řešení by mělo být tvaru

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(x) \sin(n\omega t + c_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(x) \big(\sin c_n \cos n\omega t + \cos c_n \sin n\omega t \big) =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \big(a_n(x) \cos n\omega t + b_n(x) \sin n\omega t \big);$$

Označili jsme $a_n(x) = \alpha_n(x) \sin c_n$, $b_n(x) = \alpha_n(x) \cos c_n$; sčítáme pro n až do nekonečna, abychom nějak uměle neomezovali počet alikvotních tónů. Pokud budeme předpokládat, že

$$a_n(0) = a_n(\ell) = b_n(0) = b_n(\ell) = 0, \tag{21}$$

budou splněny okrajové podmínky (19). Funkce u musí splňovat rovnici (18), tedy

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \big(a_n(x) n^2\omega^2 \cos n\omega t + b_n(x) n^2\omega^2 \sin n\omega t \big) = a^2 \sum_{n=1}^{\infty} \big(a_n''(x) \cos n\omega t + b_n''(x) \sin n\omega t \big)$$

neboli

$$0 = \sum_{n=1}^{\infty} \big[\big(a^2 a_n''(x) + n^2\omega^2 a_n(x) \big) \cos n\omega t + \big(a^2 b_n''(x) + n^2\omega^2 b_n(x) \big) \sin n\omega t \big].$$

Poněvadž funkce $\cos n\omega t$ a $\sin n\omega t$ jsou lineárně nezávislé, musí platit

$$a^2 a_n'' + n^2\omega^2 a_n = 0, \qquad a^2 b_n'' + n^2\omega^2 b_n = 0$$

pro všechna $n = 1, 2, 3, \ldots$. První z těchto obyčejných diferenciálních rovnic druhého řádu upravíme na tvar

$$a_n'' + \left(\frac{n\omega}{a}\right)^2 a_n = 0.$$

Tato lineární homogenní rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty má řešení

$$a_n(x) = C_1 \cos \frac{n\omega}{a} x + C_2 \sin \frac{n\omega}{a} x.$$

Chceme, aby byla splněna první z podmínek (21), tedy

$$0 = a_n(0) = C_1.$$

Odtud dále dostaneme

$$0 = a_n(\ell) = C_2 \sin \frac{n\omega}{a} \ell.$$

Tato rovnost je splněna pro $\omega = \dfrac{\pi a}{\ell}$ a libovolnou konstantu C_2. Označíme $C_2 = A_n$ a funkci a_n zapíšeme ve tvaru

$$a_n(x) = A_n \sin \frac{n\pi a}{a\ell} x = A_n \sin \frac{n\pi}{\ell} x.$$

Podobně dostaneme

$$b_n(x) = B_n \sin \frac{n\pi}{\ell} x.$$

Tyto funkce dosadíme do vyjádření funkce u a dostaneme

$$u(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n\pi a}{\ell} t + B_n \sin \frac{n\pi a}{\ell} t \right) \sin \frac{n\pi}{\ell} x.$$

Tato funkce formálně splňuje rovnici (18) a okrajové podmínky (19). Ještě určíme konstanty A_n a B_n tak, aby byly splněny počáteční podmínky (20). Má platit

$$\varphi(x) = u(0, x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi}{\ell} x.$$

Tuto rovnost můžeme chápat jako vyjádření funkce φ ve tvaru sinové řady. Je tedy

$$A_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(\xi) \sin \frac{n\pi}{\ell} \xi \mathrm{d}\xi$$

pro každé $n = 1, 2, 3, \ldots$. Dále platí

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} u(0, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n\pi a}{\ell} B_n \sin \frac{n\pi}{\ell} x.$$

Odtud a z věty o jednoznačnosti Fourierových řad dostaneme, že $B_n = 0$ pro všechna $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Řešení rovnice (18) s podmínkami (19) a (20) tímto způsobem dostáváme ve tvaru

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(\xi) \sin \frac{n\pi}{\ell} \xi \mathrm{d}\xi \right) \cos \frac{n\pi a}{\ell} t \sin \frac{n\pi}{\ell} x = \int_0^{\ell} \varphi(\xi) \left(\frac{2}{\ell} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi}{\ell} \xi \sin \frac{n\pi}{\ell} x \cos \frac{n\pi a}{\ell} t \right) \mathrm{d}\xi.$$

Ještě poznamenejme, že základní frekvence kmitající struny nám vyšla jako

$$\omega = \frac{\pi a}{\ell} = \frac{\pi}{\ell} \sqrt{\frac{T}{\varrho}}.$$

Kapitola 1

Metody charakteristik

1.1 Parciální diferenciální rovnice prvního řádu

1.1.1 Lineární homogenní parciální diferenciální rovnice ve dvou nezávisle proměnných

$$a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \tag{1.1}$$

Řešením je funkce $u = u(x,y)$.

Hledáme vrstevnice funkce u. Nechť mají parametrické vyjádření $x = x(s)$, $y = y(s)$. Pak $u\big(x(s), y(s)\big) = const$ a tedy

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} u\big(x(s), y(s)\big) = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} = 0.$$

Porovnáním s (1.1) vidíme, že pokud funkce $x = x(s)$, $y = y(s)$ jsou řešeními systému autonomních obyčejných diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= a(x,y), \\ y' &= b(x,y), \end{aligned} \tag{1.2}$$

kde $'$ označuje obyčejnou derivaci podle nezávisle proměnné s, pak jsou parametrickými rovnicemi vrstevnic řešení rovnice (1.1). Systém (1.2) se nazývá *charakteristická soustava rovnic rovnice* (1.1), jeho trajektorie se nazývají *charakteristiky rovnice* (1.1).

Nechť rovnice $\varphi(x,y) = c$ je implicitním popisem charakteristik rovnice (1.1), tj. vrstevnic řešení této rovnice, a Φ je libovolná diferencovatelná funkce jedné proměnné. Pak $u = u(x,y) = \Phi\big(\varphi(x,y)\big)$ je řešením rovnice (1.1).

D.: Podle „řetězového pravidla“ pro parciální derivaci složené funkce je $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \Phi'\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = \Phi'\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}$, na charakteristikách $x = x(s)$, $y = y(s)$ platí $\varphi\big(x(s), y(s)\big) = c$ a tedy

$$\begin{aligned} a(x,y)\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} &= \Phi'\big(\varphi(x,y)\big)\left(a\frac{\partial \varphi(x,y)}{\partial x} + b\frac{\partial \varphi(x,y)}{\partial y}\right) = \\ = \Phi'\big(\varphi(x,y)\big)\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) &= \Phi'\big(\varphi(x,y)\big)\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\right) = \Phi'\big(\varphi(x,y)\big)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\varphi\big(x(s), y(s)\big) = 0. \end{aligned}$$

□

1.1.2 Okrajová úloha pro lineární homogenní parciální diferenciální rovnice ve dvou nezávisle proměnných

Nechť $x = \varphi(\sigma)$, $y = \psi(\sigma)$ je parametrický popis rovinné křivky, která protíná každou z charakteristik rovnice (1.1) právě jednou, a nechť f je funkce se stejným definičním oborem jako φ a ψ. Podmínka

$$u\big(\varphi(\sigma), \psi(\sigma)\big) = f(\sigma) \tag{1.3}$$

se nazývá *okrajová podmínka pro rovnici* (1.1).

Heuristická úvaha: Podmínku (1.3) si lze představit jako prostorovou křivku. Dále si lze představit, že máme vrstevnice řešení, tj. charakteristiky, vytvořené např z drátu. Tyto vrstevnice umisťujeme na křivku vyjadřující okrajovou podmínku.

Nechť charakteristiky rovnice (1.1), tj. trajektorie systému (1.2), mají obecné parametrické vyjádření

$$\begin{aligned} x &= x(s, c_1, c_2), \\ y &= y(s, c_1, c_2), \end{aligned} \tag{1.4}$$

kde c_1, c_2 jsou integrační konstanty. Dále nechť okrajová podmínka je parametricky vyjádřena rovnicemi

$$\begin{aligned} x &= \varphi(\sigma), \\ y &= \psi(\sigma), \\ u &= f(\sigma). \end{aligned} \tag{1.5}$$

Pro jednu hodnotu parametru s, řekněme pro $s = 0$, vrstevnice protíná křivku, na níž je zadána okrajoví podmínka, tedy

$$\begin{aligned} x(0, c_1, c_2) &= \varphi(\sigma), \\ y(0, c_1, c_2) &= \psi(\sigma). \end{aligned}$$

Z těchto rovnic vypočítáme konstanty c_1, c_2 v závislosti na parametru σ, tedy $c_1 = c_1(\sigma)$, $c_2 = c_2(\sigma)$. Toto vyjádření dosadíme do (1.4) a dostaneme soustavu dvou rovic pro dvě neznámé s a σ:

$$\begin{aligned} x &= x\big(s, c_1(\sigma), c_2(\sigma)\big), \\ y &= y\big(s, c_1(\sigma), c_2(\sigma)\big). \end{aligned}$$

Tuto soustavu vyřešíme; zejména vyjádříme σ pomocí x a y, tj. $\sigma = \sigma(x, y)$ a dosadíme do poslední z rovnic (1.5). Tím dostaneme řešení úlohy (1.1), (1.3) ve tvaru $u(x, y) = f\big(\sigma(x, y)\big)$.

1.1.3 Quasilineární parciální diferenciální rovnice prvního řádu ve dvou nezávisle proměnných

$$a(x, y, u)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y, u)\frac{\partial u}{\partial y} = c(x, y, u). \tag{1.6}$$

Řešením je opět funkce $u = u(x, y)$. Předpokládejme, že toto řešení je implicitně dáno rovnicí $F(x, y, u) = 0$, tedy

$$F\big(x, y, u(x, y)\big) = 0.$$

Odtud dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F\big(x, y, u(x, y)\big) = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}F\big(x, y, u(x, y)\big) = \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

První z těchto rovnic vynásobíme funkcí a, druhou z nich funkcí b, sečteme je a upravíme s využitím (1.6):

$$0 = a\frac{\partial F}{\partial x} + b\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial u}\left(a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y}\right) = a\frac{\partial F}{\partial x} + b\frac{\partial F}{\partial y} + c\frac{\partial F}{\partial u}.$$

Pokud funkce $x = x(s)$, $y = y(s)$ a $u = u(s)$ jsou řešením následující *charakteristické soustavy rovnic rovnice* (1.6)

$$\begin{aligned} x' &= a(x, y, u), \\ y' &= b(x, y, u), \\ u' &= c(x, y, u), \end{aligned} \tag{1.7}$$

pak podle předchozí rovnosti platí

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}F\big(x(s), y(s), u(s)\big) = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} + \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s} = \frac{\partial F}{\partial x}a + \frac{\partial F}{\partial y}b + \frac{\partial F}{\partial u}c = 0.$$

Trajektorie systému autonomních obyčejných diferenciálních rovnic (1.7) — prostorové křivky — se nazývají *charakteristiky rovnice* (1.6). Z provedeného výpočtu plyne, že podél charakteristik je funkce F konstantní.

Nechť rovnice $\varphi_1(x, y, u) = c_1$ a $\varphi_2(x, y, u) = c_2$ jsou implicitním popisem charakteristik rovnice (1.6) (jednorozměrné variety v třírozměrném prostoru) a Φ je libovolná diferencovatelná funkce dvou proměnných. Pak funkce $u = u(x, y)$ implicitně zadaná rovnicí

$$\Phi\big(\varphi_1(x, y, u), \varphi_2(x, y, u)\big) = 0 \tag{1.8}$$

je řešením rovnice (1.6).

D.: Rovnici (1.8), v níž u považujeme za funkci proměnných x a y, derivujme parciálně podle proměnné x:

$$0 = \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_1}\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_2}\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}\right) =$$
$$= \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_2}\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial u} + \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_2}\frac{\partial \varphi_2}{\partial u}\right)\frac{\partial u}{\partial x}.$$

Označíme-li $A = \dfrac{\partial \Phi}{\partial \varphi_1}\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial u} + \dfrac{\partial \Phi}{\partial \varphi_2}\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial u}$, dostaneme z předchozí rovnosti

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{A}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_2}\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}\right).$$

Analogickým postupem bychom dostali

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{A}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_2}\frac{\partial \varphi_2}{\partial y}\right).$$

Poněvadž na charakteristikách platí

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\varphi_1\big(x(s), y(s), u(s)\big) = 0, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\varphi_2\big(x(s), y(s), u(s)\big) = 0$$

dostaneme vzhledem k (1.7):

$$a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{A}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_1}\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}a + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}b\right) + \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_2}\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}a + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}b\right)\right) =$$
$$= -\frac{1}{A}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_1}\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\right) + \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_2}\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\right)\right) =$$
$$= -\frac{1}{A}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_1}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\varphi_1\big(x(s), y(s), u(s)\big) - \frac{\partial \varphi_1}{\partial u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}\right) + \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_2}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\varphi_2\big(x(s), y(s), u(s)\big) - \frac{\partial \varphi_2}{\partial u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}\right)\right) =$$
$$= \frac{1}{A}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial u} + \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_2}\frac{\partial \varphi_2}{\partial u}\right)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s} = c.$$

□

Nechť $x = \varphi(\sigma)$, $y = \psi(\sigma)$ je parametrický popis nějaké rovinné křivky, a nechť f je reálná funkce se stejným definičním oborem jako funkce φ, ψ. Podmínka

$$u\big(\varphi(\sigma), \psi(\sigma)\big) = f(\sigma) \tag{1.9}$$

se nazývá *okrajová podmínka pro rovnici* (1.6). Okrajovou úlohu řešíme analogicky jako okrajovou úlohu (1.1), (1.3):

Nechť charakteristiky rovnice (1.6) mají parametrické vyjádření

$$\begin{aligned} x &= x(s, c_1, c_2, c_3), \\ y &= y(s, c_1, c_2, c_3), \\ u &= u(s, c_1, c_2, c_3), \end{aligned} \tag{1.10}$$

kde c_1, c_2, c_3 jsou nějaké konstanty. Má-li soustava rovnic

$$\begin{aligned} x(0, c_1, c_2, c_3) &= \varphi(\sigma), \\ y(0, c_1, c_2, c_3) &= \psi(\sigma), \\ u(0, c_1, c_2, c_3) &= f(\sigma) \end{aligned} \tag{1.11}$$

pro neznámé c_1, c_2, c_3 řešení $c_1 = c_1(\sigma)$, $c_2 = c_2(\sigma)$, $c_3 = c_3(\sigma)$, dosadíme je do prvních dvou rovnic soustavy (1.10):

$$\begin{aligned} x &= x\big(s, c_1(\sigma), c_2(\sigma), c_3(\sigma)\big), \\ y &= y\big(s, c_1(\sigma), c_2(\sigma), c_3(\sigma)\big). \end{aligned}$$

Má-li tato soustava rovnic řešení $\sigma = \sigma(x, y)$, $s = s(x, y)$, dosadíme je do třetí z rovnic (1.10). Tím dostaneme řešení úlohy (1.6), (1.9) ve tvaru

$$u = u\Big(s(x, y), c_1\big(\sigma(x, y)\big), c_2\big(\sigma(x, y)\big), c_3\big(\sigma(x, y)\big)\Big).$$

1.1.4 Obecná parciální diferenciální rovnice prvního řádu ve dvou nezávisle proměnných

Jedná se o rovnici

$$F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0, \tag{1.12}$$

kde F je reálná funkce pěti proměnných, u je (hledaná) funkce dvou proměnných, x, y jsou nezávisle proměnné. Označme

$$p = u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad q = u_y = \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Pak rovnici (1.12) můžeme zapsat ve tvaru

$$F(x, y, u, p, q) = 0.$$

Autonomní soustavu obyčejných diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}x &= F_p(x, y, u, p, q), \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}y &= F_q(x, y, u, p, q), \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}u &= pF_p(x, y, u, p, q) + qF_q(x, y, u, p, q), \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}p &= -F_x(x, y, u, p, q) - pF_u(x, y, u, p, q), \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}q &= -F_y(x, y, u, p, q) - qF_u(x, y, u, p, q), \end{aligned} \tag{1.13}$$

nazýváme *charakteristická soustava rovnice* (1.12), trajektorie jejího řešení (křivky v prostoru $\mathbb{R}^5$) nazýváme *charakteristický pruh rovnice* (1.12).

Nechť funkce $x = x(s)$, $y = y(s)$, $u = u(s)$, $p = p(s)$, $q = q(s)$ jsou řešením charakteristické soustavy (1.13). Pak platí

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}F = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}F\big(x(s), y(s), u(s), p(s), q(s)\big) &= F_x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} + F_y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} + F_u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s} + F_p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}s} + F_q\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}s} = \\ &= F_xF_p + F_yFq + F_u(pF_p + qF_q) - F_p(F_x + pF_u) - F_q(F_y + qF_u) = 0. \end{aligned}$$

To znamená, že na charakteristickém pruhu je funkce F konstantní. Pokud tedy počáteční hodnoty řešení charakteristické soustavy (1.13) splňují podmínku

$$F\big(x(0), y(0), u(0), p(0), q(0)\big) = 0,$$

pak křivka $\big(x(s), y(s), u(s)\big)$ leží na grafu řešení rovnice (1.12).

Nechť $x = \varphi(\sigma)$, $y = \psi(\sigma)$ je parametrický popis nějaké rovinné křivky a f je reálná funkce se stejným definičním oborem, jako funkce φ, ψ. Rovnost

$$u\big(\varphi(\sigma), \psi(\sigma)\big) = f(\sigma) \tag{1.14}$$

se nazývá *okrajová podmínka pro rovnici* (1.12). Derivováním okrajové podmínky dostaneme rovnost, kterou na ní musí splňovat funkce p a q,

$$\frac{\mathrm{d}f(\sigma)}{\mathrm{d}\sigma} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma}u\big(\varphi(\sigma), \psi(\sigma)\big) = p\big(\varphi(\sigma), \psi(\sigma)\big)\frac{\mathrm{d}\varphi(\sigma)}{\mathrm{d}\sigma} + q\big(\varphi(\sigma), \psi(\sigma)\big)\frac{\mathrm{d}\psi(\sigma)}{\mathrm{d}\sigma}.$$

Nechť nyní $p_0 = p_0(\sigma)$, $q_0 = q_0(\sigma)$ je řešením soustavy dvou rovnic pro dvě neznámé

$$\begin{aligned} F\big(\varphi(\sigma), \psi(\sigma), f(\sigma), p_0, q_0) &= 0, \\ p_0\frac{\mathrm{d}\varphi(\sigma)}{\mathrm{d}\sigma} + q_0\frac{\mathrm{d}\psi(\sigma)}{\mathrm{d}\sigma} &= \frac{\mathrm{d}f(\sigma)}{\mathrm{d}\sigma}. \end{aligned}$$

Řešení charakteristické soustavy (1.13), které splňuje počáteční podmínky

$$x(0) = \varphi(\sigma), \quad y(0) = \psi(\sigma), \quad u(0) = f(\sigma), \quad p(0) = p_0, \quad q(0) = q_0$$

označíme

$$\big(x(s;\sigma), y(s;\sigma), u(s;\sigma), p(s;\sigma), q(s;\sigma)\big).$$

Je-li $s = s(x, y)$, $\sigma(x, y)$ řešením soustavy rovnic

$$\begin{aligned} x &= x(s;\sigma), \\ y &= y(s;\sigma), \end{aligned}$$

tj. parametry s, σ vyjádříme pomocí souřadnic x, y, pak funkce u definovaná vztahem

$$u(x, y) = u\big(s(x, y); \sigma(x, y)\big)$$

je řešením rovnice (1.12) s okrajovou podmínkou (1.14).

1.1.5 Quasilineární parciální diferenciální rovnice prvního řádu

Rovnici

$$a_1(x_1, \dots, x_n, u)\frac{\partial u(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1} + \cdots + a_n(x_1, \dots, x_n, u)\frac{\partial u(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_n} = f(x_1, \dots, x_n, u)\,, \tag{1.15}$$

kde $a_1, \dots, a_n, f$ jsou funkce $n + 1$ proměnných a u je (hledaná) funkce n proměnných, nazýváme *quasilineární parciální diferenciální rovnice prvního řádu*; v případě $f \equiv 0$ *homogenní*, v opačném *nehomogenní*. Pokud funkce $a_1, \dots, a_n$ nezávisí na poslední proměnné a funkce f závisí na poslední proměnné lineárně, nazýváme tuto rovnici *lineární parciální diferenciální rovnice prvního řádu.*

Soustavu obyčejných diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}x_1(s) &= a_1\big(x_1(s), \dots, x_n(s), u(s)\big)\,, \\ &\vdots \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}x_n(s) &= a_n\big(x_1(s), \dots, x_n(s), u(s)\big)\,, \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}u(s) &= f\big(x_1(s), \dots, x_n(s), u(s)\big), \end{aligned}$$

nazýváme *(rozšířená) charakteristická soustava rovnice* (1.15). Trajektorie $\big(x_1(s), \dots, x_n(s), u(s)\big)$ řešení charakteristické soustavy (křivky v prostoru $\mathbb{R}^{n+1}$) nazýváme *charakteristiky rovnice* (1.15).

Buď $D \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ otevřená množina a

$$\Gamma \;=\; \{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n : x_1=\varphi_1(\sigma_1,\dots,\sigma_{n-1}),\dots,x_n=\varphi_n(\sigma_1,\dots,\sigma_{n-1}),(\sigma_1,\dots,\sigma_{n-1})\in D\}$$

regulární $(n-1)$-rozměrná nadplocha v n-rozměrném prostoru $\mathbb{R}^n$. Dále buď $u_0 = u_0(\sigma_1,\dots,\sigma_{n-1})$ spojitá funkce definovaná na D. Podmínka

$$u(\varphi_1(\sigma_1,\dots,\sigma_{n-1}),\dots,\varphi_n(\sigma_1,\dots,\sigma_{n-1})) \;=\; u_0(\sigma_1,\dots,\sigma_{n-1})\,, \qquad (\sigma_1,\dots,\sigma_{n-1})\in D \tag{1.16}$$

se nazývá *okrajová podmínka* pro rovnici (1.15).

Jsou-li funkce $a_1,\dots,a_n,\ f$ diferencovatelné, pak charakteristická soustava s Cauchyovými podmínkami

$$\begin{aligned} x_1(0) &= \varphi_1(\sigma_1,\dots,\sigma_{n-1})\,,\\ &\vdots\\ x_n(0) &= \varphi_n(\sigma_1,\dots,\sigma_{n-1})\,,\\ u(0) &= u_0(\sigma_1,\dots,\sigma_{n-1})\,, \end{aligned}$$

má pro každé $(\sigma_1,\dots,\sigma_{n-1})\in D$ jediné řešení (podle Picardovy-Lindelöfovy věty, viz např. Kalas J., Ráb M.: Obyčejné diferenciální rovnice, MU 2001, str. 64). Označme toto řešení

$$\big(\psi_1(s,\sigma_1,\dots,\sigma_{n-1}),\dots,\psi_n(s,\sigma_1,\dots,\sigma_{n-1}),\psi_{n+1}(s,\sigma_1,\dots,\sigma_{n-1})\big)\,.$$

Platí

$$\psi_1(0,\sigma_1,\dots,\sigma_{n-1})=\varphi_1(\sigma_1,\dots,\sigma_{n-1}),\ \dots\ ,\psi_n(0,\sigma_1,\dots,\sigma_{n-1})=\varphi_n(\sigma_1,\dots,\sigma_{n-1})\,,$$
$$\psi_{n+1}(0,\sigma_1,\dots,\sigma_{n-1})=u_0(\sigma_1,\dots,\sigma_{n-1})$$

tedy

$$\frac{\partial\psi_i}{\partial\sigma_j}(0,\sigma_1,\dots,\sigma_{n-1})=\frac{\partial\varphi_i}{\partial\sigma_j}(\sigma_1,\dots,\sigma_{n-1})\,,\ i=1,2,\dots,n,\ j=1,2,\dots n-1, \quad \text{pro každé } (\sigma_1,\dots,\sigma_{n-1})\in D$$

a dále

$$\frac{\partial\psi_i}{\partial s}(0,\sigma_1,\dots,\sigma_{n-1})=a_i\big(\varphi_1(\sigma_1,\dots,\sigma_{n-1}),\dots,\varphi_n(\sigma_1,\dots,\sigma_{n-1}),u_0(\sigma_1,\dots,\sigma_{n-1})\big)\,.$$

Funkcemi $\psi_1,\dots,\psi_n$ je určeno zobrazení $\Psi:\mathbb{R}\times D\to\mathbb{R}^n$. Jacobián $J=J(\sigma_1,\dots,\sigma_{n-1})$ zobrazení Ψ v bodě $(0,\sigma_1,\dots,\sigma_{n-1})$ je

$$\begin{vmatrix} a_1(\varphi_1(\sigma_1,\dots,\sigma_{n-1}),\dots,\varphi_n(\sigma_1,\dots,\sigma_{n-1}) & \dots & a_n(\varphi_1(\sigma_1,\dots,\sigma_{n-1}),\dots,\varphi_n(\sigma_1,\dots,\sigma_{n-1}) \\ \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial\sigma_1}(\sigma_1,\dots,\sigma_{n-1}) & \dots & \dfrac{\partial\varphi_n}{\partial\sigma_1}(\sigma_1,\dots,\sigma_{n-1}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial\sigma_{n-1}}(\sigma_1,\dots,\sigma_{n-1}) & \dots & \dfrac{\partial\varphi_n}{\partial\sigma_{n-1}}(\sigma_1,\dots,\sigma_{n-1}) \end{vmatrix}.$$

Je-li $J(\sigma_1,\dots,\sigma_{n-1})\neq 0$ pro každé $(\sigma_1,\dots,\sigma_{n-1})\in D$, existuje inversní zobrazení $\Psi^{-1}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}\times D$ (podle věty o existenci inversního zobrazení, viz např. Došlá Z., Došlý O.: Diferenciální počet funkcí více proměnných, MU 1999, str. 84).

Položme $u(x_1,\dots,x_n)=\psi_{n+1}\left(\Psi^{-1}(x_1,\dots,x_n)\right)$. Pak u je řešení úlohy (1.15), (1.16):

$$\sum_{k=1}^n a_k\frac{\partial u}{\partial x_k}=\sum_{k=1}^n\frac{\mathrm{d}x_k}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x_k}+\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial u}{\partial\sigma_j}\frac{\partial\sigma_j}{\partial x_k}\right) \;=\; \frac{\partial u}{\partial s}\sum_{k=1}^n\frac{\partial s}{\partial x_k}\frac{\mathrm{d}x_k}{\mathrm{d}s}+\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial u}{\partial\sigma_j}\sum_{k=1}^n\frac{\partial\sigma_j}{\partial x_k}\frac{\mathrm{d}x_k}{\mathrm{d}s} \;=$$
$$=\frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial s}+\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial u}{\partial\sigma_j}\frac{\partial\sigma_j}{\partial s} \;=\; \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s} \;=\; f\,.$$

Toto řešení je jediné.

1.1.6 Kanonický tvar parciální diferenciální rovnice prvního řádu ve dvou nezávisle proměnných lineární v prvních derivacích

$$a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} = f(x,y,u), \tag{1.17}$$

funkce a, b jsou definovány na množině $G \subseteq \mathbb{R}^2$, funkce f je definována na množině $G \times \mathbb{R}$, pro funkce a, b platí $a(x,y) \neq 0 \neq b(x,y)$ pro $(x,y) \in G$. Parciální rovnici (1.17) přiřadíme její obyčejnou *charakteristickou rovnici*

$$y' = \frac{b(x,y)}{a(x,y)}, \tag{1.18}$$

kde $'$ označuje obyčejnou derivaci podle x. Předpokládejme, že charakteristická rovnice (1.18) má řešení, které lze implicitně zapsat ve tvaru

$$\varphi(x,y) = C, \tag{1.19}$$

kde C je integrační konstanta. Pak je $\varphi_x(x,y) + y'\varphi_y(x,y) = 0$, tj.

$$a\varphi_x + b\varphi_y = 0. \tag{1.20}$$

Poznamenejme, že charakteristická rovnice lineární homogenní rovnice ve dvou nezávisle proměnných (1.1) je podílem jednotlivých rovnic charakteristické soustavy (1.2) této rovnice a tedy rovnost (1.19) vyjadřuje charakteristiky rovnice (1.1) také ve smyslu oddílu 1.1.1.

Položme

$$\xi = \varphi(x,y), \qquad \eta = y.$$

Pak $\xi_x\eta_y - \xi_y\eta_x = \varphi_x(x,y)$, tedy na množině $H = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \varphi_x(x,y) \neq 0\big\} \subseteq G$ je zobrazení $(\xi,\eta) : H \to \mathbb{R}^2$ prosté. Toto zobrazení na množině H transformuje rovnici (1.17) na rovnici

$$au_\xi\varphi_x + b(u_\xi\varphi_y + u_\eta) = f.$$

Tuto rovnici lze upravit na tvar

$$(a\varphi_x + b\varphi_y)\,u_\xi + bu_\eta = f,$$

takže vzhledem k (1.20) a předpokládané nenulovosti funkce b platí

$$u_\eta(\xi,\eta) = F(\xi,\eta,u),$$

kde $F = f/b$. Tato rovnice je *kanonickým tvarem* rovnice (1.17). Poněvadž se v ní vyskytuje pouze jedna parciální derivace, lze ji považovat za rovnici obyčejnou takovou, že hledaná funkce u je funkcí jedné nezávisle proměnné η a závisí na parametru ξ.

1.2 Parciální diferenciální rovnice druhého řádu lineární ve druhých derivacích

Jedná se o rovnici

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\boldsymbol{x})\frac{\partial^2 u(\boldsymbol{x})}{\partial x_i \partial x_j} = F\left(\boldsymbol{x}, u(\boldsymbol{x}), \frac{\partial u(\boldsymbol{x})}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u(\boldsymbol{x})}{\partial x_n}\right), \tag{1.21}$$

kde $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ je n-tice nezávisle proměnných, u je (hledaná) funkce n proměnných, a_{ij}, $i,j = 1,2,\dots,n$ jsou funkce n proměnných takové, že jejich definiční obory mají neprázdný průnik $D \subseteq \mathbb{R}^n$ a platí $a_{ij}(\boldsymbol{x}) = a_{ji}(\boldsymbol{x})$ pro všechna $\boldsymbol{x} \in D$ a všechny dvojice indexů i,j. Přitom předpokládáme, že pro alespoň jednu dvojici indexů i,j platí $a_{ij} \not\equiv 0$. Funkce F na pravé straně rovnice je nějaká funkce $2n+1$ proměnných.

Buď $\boldsymbol{x}_0 \in D$ libovolný bod. Pak $A = (a_{ij}(\boldsymbol{x}_0))$ je symetrická matice typu $n \times n$. Takovou maticí je definována kvadratická forma $\Psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$\Psi(y_1, y_2, \dots, y_n) \;=\; (y_1, y_2, \dots, y_n)\,A\,(y_1, y_2, \dots, y_n)^T \;=\; \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\boldsymbol{x}_0)y_iy_j\,.$$

Platí Sylvesterův [1814 – 1897] zákon setrvačnosti kvadratických forem: Existuje regulární matice B typu $n \times n$ a jednoznačně určená přirozená čísla $k,\ m,\ 0 \le k \le m \le n$ taková, že po transformaci

$$(y_1, y_2, \ldots, y_n)^T \;=\; (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)B$$

má kvadratická forma Ψ kanonický tvar $\sum\limits_{i=1}^{k} \eta_i^2 - \sum\limits_{i=k+1}^{m} \eta_i^2$. (Přitom klademe $\sum\limits_{i=p}^{q} \alpha_i = 0$ pro $p = q + 1$.)

Rovnice (1.21) se nazývá

eliptická		$m = n$ a $k \in \{0, n\}$,
hyperbolická		$m = n$ a $k \in \{1, n-1\}$,
ultrahyperbolická	*v bodě* $\boldsymbol{x}_0 \in D$, jestliže	$m = n$ a $2 \le k \le n-2$,
parabolická		$m < n$,
parabolická v užším smyslu		$m = n - 1$ a $k = 0$, nebo $k = m = n - 1$.

Rovnice (1.24) se nazývá *eliptická, hyperbolická, ... v otevřené množině* $G \subseteq D$, je-li eliptická, hyperbolická, ... v každém bodě $\boldsymbol{x} \in G$.

Označme β_{ij} prvky matice B. Transformaci převádějící kvadratickou formu Ψ na kanonický tvar tedy můžeme zapsat jako

$$y_i = \sum_{p=1}^{n} \eta_p \beta_{pi}, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

a transformaci kvadratické formy Ψ přepsat ve tvaru

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\boldsymbol{x}_0) y_i y_j = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\boldsymbol{x}_0) \sum_{p=1}^{n} \eta_p \beta_{pi} \sum_{q=1}^{n} \eta_q \beta_{qj} = \sum_{i,j,p,q=1}^{n} a_{ij}(\boldsymbol{x}_0) \beta_{pi} \beta_{qj} \eta_p \eta_q = \sum_{i=1}^{k} \eta_i^2 - \sum_{i=k+1}^{m} \eta_i^2. \tag{1.22}$$

Nyní budeme v rovnici (1.21) transformovat nezávisle proměnné. Nové nezávisle proměnné $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ definujeme vztahy

$$\xi_i = \sum_{p=1}^{n} \beta_{ip} x_p, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.23}$$

Pak je $\dfrac{\partial \xi_i}{\partial x_j} = \beta_{ij}$ a s využitím řetězového pravidla pro pro derivaci složené funkce postupně dostaneme

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{p=1}^{n} \frac{\partial \xi_p}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial \xi_p} = \sum_{p=1}^{n} \beta_{pi} \frac{\partial u}{\partial \xi_p},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{p=1}^{n} \beta_{pi} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial \xi_p} = \sum_{p=1}^{n} \beta_{pi} \sum_{q=1}^{n} \frac{\partial \xi_q}{\partial x_j} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_p \partial \xi_q} = \sum_{p=1}^{n} \beta_{pi} \sum_{q=1}^{n} \beta_{qj} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_p \partial \xi_q} = \sum_{p,q=1}^{n} \beta_{pi} \beta_{qj} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_p \partial \xi_q}.$$

Levá strana rovnice (1.21) se tedy v bodě $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0$ transformuje na tvar

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\boldsymbol{x}_0) \frac{\partial^2 u(\boldsymbol{x})}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\boldsymbol{x}_0) \sum_{p,q=1}^{n} \beta_{pi} \beta_{qj} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_p \partial \xi_q} = \sum_{i,j,p,q=1}^{n} a_{ij}(\boldsymbol{x}_0) \beta_{pi} \beta_{qj} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_p \partial \xi_q}.$$

Porovnáním s rovností (1.22) vidíme, že transformace (1.23) nezávisle proměnných převádí levou stranu parciální diferenciální rovnice (1.21) v bodě $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0$ na tvar

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_i^2} - \sum_{i=k+1}^{m} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_i^2};$$

tento tvar rovnice se nazývá *kanonický v bodě* $\boldsymbol{x}_0$.

Pokud je funkce F na pravé straně rovnice (1.21) tvaru

$$F\left(\boldsymbol{x}, u(\boldsymbol{x}), \frac{\partial u(\boldsymbol{x})}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u(\boldsymbol{x})}{\partial x_n}\right) = f(\boldsymbol{x}) - c(\boldsymbol{x}) u(\boldsymbol{x}) - \sum_{i=1}^{n} b_i(\boldsymbol{x}) \frac{\partial u(\boldsymbol{x})}{\partial x_i},$$

kde b_i, c, f, $i = 1.2, \dots, n$ jsou funkce n proměnných takové, že definiční obor každé z nich má neprázdný průnik se společnou částí D definičních oborů funkcí a_{ij}, pak můžeme rovnici (1.21) přepsat na tvar

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\boldsymbol{x}) \frac{\partial^2 u(\boldsymbol{x})}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(\boldsymbol{x}) \frac{\partial u(\boldsymbol{x})}{\partial x_i} + c(\boldsymbol{x}) u(\boldsymbol{x}) \;=\; f(\boldsymbol{x}) \,. \tag{1.24}$$

Tuto rovnici nazýváme *lineární parciální diferenciální rovnice druhého řádu*; v případě $f \equiv 0$ *homogenní*, v opačném *nehomogenní*.

Pro homogenní lineární rovnici platí *princip superpozice:* Je-li α libovolná konstanta a u_1, u_2 jsou řešení rovnice

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\boldsymbol{x}) \frac{\partial^2 u(\boldsymbol{x})}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(\boldsymbol{x}) \frac{\partial u(\boldsymbol{x})}{\partial x_i} + c(\boldsymbol{x}) u(\boldsymbol{x}) \;=\; 0 \,,$$

pak také αu_1 a $u_1 + u_2$ jsou řešením této rovnice. (Platnost tohoto tvrzení lze ověřit přímým dosazením.) Funkce $u \equiv 0$ je zřejmě také řešením této rovnice. Odtud plyne, že množina všech řešení homogenní rovnice tvoří vektorový prostor.

1.3 Kanonický tvar parciální diferenciální rovnice druhého řádu ve dvou nezávisle proměnných lineární ve druhých derivacích

$$A(x,y)u_{xx} + 2B(x,y)u_{xy} + C(x,y)u_{yy} \;=\; F(x,y,u,u_x,u_y) \,, \tag{1.25}$$

pro funkce A, B, C platí $|A(x,y)| + |B(x,y)| + |C(x,y)| > 0$ pro všechna $(x,y) \in D = \mathrm{Dom}\,A \cap \mathrm{Dom}\,B \cap \mathrm{Dom}\,C$. Uvažujme kvadratickou formu $\Psi(r,s) = Ar^2 + 2Brs + Cs^2$.

Pokud $A \neq 0$, platí

$$Ar^2 + 2Brs + Cs^2 \;=\; A\left(r + \frac{B}{A}s\right)^2 - \frac{B^2}{A}s^2 + Cs^2 \;=\; A\left(r + \frac{B}{A}s\right)^2 - \frac{1}{A}(B^2 - AC)s^2 \,,$$

pokud $C \neq 0$, platí

$$Ar^2 + 2Brs + Cs^2 \;=\; C\left(s + \frac{B}{C}r\right)^2 - \frac{B^2}{C}r^2 + Ar^2 \;=\; C\left(s + \frac{B}{C}r\right)^2 - \frac{1}{C}(B^2 - AC)r^2 \,,$$

pokud $A = C = 0$, pak $B \neq 0$ a platí

$$Ar^2 + 2Brs + Cs^2 \;=\; 2Brs \;=\; \frac{B}{2}(r+s)^2 - \frac{B}{2}(r-s)^2 \,.$$

Odtud plyne: Je-li pro každé (x,y) z otevřené množiny $G \subseteq D$

$(B(x,y))^2 - A(x,y)C(x,y) > 0$		hyperbolická	
$(B(x,y))^2 - A(x,y)C(x,y) = 0$	pak rovnice (1.25) je	parabolická	v G
$(B(x,y))^2 - A(x,y)C(x,y) < 0$		eliptická	

1.3.1 Transformace rovnice (1.25)

Buďte $\varphi, \psi : G \to \mathbb{R}$ takové funkce, že $\varphi_x(x,y)\psi_y(x,y) - \varphi_y(x,y)\psi_x(x,y) \neq 0$ pro všechna $(x,y) \in G$. Pak transformace

$$\xi \;=\; \varphi(x,y) \,, \qquad \eta \;=\; \psi(x,y) \tag{1.26}$$

bijektivně zobrazí množinu G na otevřenou množinu a rovnici (1.25) transformuje na tvar (využíváme formule pro druhé parciální derivace složené funkce)

$$a(\xi,\eta)u_{\xi\xi} + 2b(\xi,\eta)u_{\xi\eta} + c(\xi,\eta)u_{\eta\eta} \;=\; \tilde{F}(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta) \,, \tag{1.27}$$

kde

$$
\begin{aligned}
a &= A\varphi_x^2 + 2B\varphi_x\varphi_y + C\varphi_y^2 = \varphi_y^2\left(A\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)^2 - 2B\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right) + C\right), \\
b &= A\varphi_x\psi_x + B(\varphi_x\psi_y + \varphi_y\psi_x) + C\varphi_y\psi_y\,, \\
c &= A\psi_x^2 + 2B\psi_x\psi_y + C\psi_y^2 = \psi_y^2\left(A\left(-\frac{\psi_x}{\psi_y}\right)^2 - 2B\left(-\frac{\psi_x}{\psi_y}\right) + C\right);
\end{aligned}
\tag{1.28}
$$

naznačenou úpravu výrazu pro funkce a nebo c lze samozřejmě provést pouze v případě, že $\varphi_y \neq 0$ nebo $\psi_y \neq 0$.

Při hledání inversní transformace k transformaci (1.26) řešíme soustavu rovnic (1.26) pro neznámé x, y. Přitom první z rovnic je implicitně dána funkce $y_1 = y_1(x)$, pro jejíž derivaci platí $y_1' = -\frac{\varphi_x}{\varphi_y}$, a druhou z rovnic je implicitně dána funkce $y_2 = y_2(x)$, pro jejíž derivaci platí $y_2' = -\frac{\psi_x}{\psi_y}$ (podle vzorce pro derivaci implicitně zadané funkce, viz např. Došlá Z., Došlý O.: Diferenciální počet funkcí více proměnných, MU 1999, str. 96).

1.3.2 Charakteristiky rovnice (1.25)

Obyčejná diferenciální rovnice v implicitním tvaru (nerozřešená vzhledem k derivaci)

$$
A(x,y)y'^2 - 2B(x,y)y' + C(x,y) = 0 \tag{1.29}
$$

se nazývá *charakteristická rovnice parciální diferenciální rovnice* (1.25). Její řešení se nazývají *charakteristiky.*

Z předchozích úvah je vidět, že platí: Je-li rovnice (1.25) hyperbolická, má dvě jednoparametrické množiny charakteristik, které jsou řešeními obyčejných diferenciálních rovnic

$$
y' = \frac{B(x,y) + \sqrt{(B(x,y))^2 - A(x,y)C(x,y)}}{A(x,y)} \quad \text{a} \quad y' = \frac{B(x,y) - \sqrt{(B(x,y))^2 - A(x,y)C(x,y)}}{A(x,y)}\,. \tag{1.30}
$$

Je-li rovnice (1.25) parabolická, má jednu jednoparametrickou množinu charakteristik, která je řešením obyčejné diferenciální rovnice

$$
y' = \frac{B(x,y)}{A(x,y)}\,. \tag{1.31}
$$

Je-li rovnice (1.25) eliptická, nemá reálné charakteristiky.

1.3.3 Kanonický tvar hyperbolické rovnice

Jsou-li $\varphi(x,y) = C_1$ a $\psi(x,y) = C_2$ implicitní popisy řešení rovnic (1.30) (tedy charakteristiky rovnice (1.25), pak $-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}$ a $-\frac{\psi_x}{\psi_y}$ jsou kořeny charakteristické rovnice (1.29), takže v (1.28) dostaneme $a = c = 0$. Kanonický tvar hyperbolické rovnice (1.25) je

$$
u_{\xi\eta} = F_1(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta)\,.
$$

1.3.4 Kanonický tvar parabolické rovnice

V tomto případě je $B^2 = AC$. Je-li $\psi(x,y) = C$ implicitní popis řešení rovnice (1.31) a $\varphi(x,y)$ je libovolná funkce nezávislá na funkci ψ, pak $-\frac{\psi_x}{\psi_y} = \frac{B}{A}$, tj. $\psi_x = -\frac{B}{A}\psi_y$, a $-\frac{\psi_x}{\psi_y}$ je kořenem charakteristické rovnice (1.29). V rovnostech (1.28) tedy dostaneme $c = 0$ a

$$
b = -B\varphi_x\psi_y + B\left(\varphi_x\psi_y - \frac{B}{A}\varphi_y\psi_y\right) + C\varphi_y\psi_y = \left(C - \frac{B^2}{A}\right)\varphi_y\psi_y = \frac{AC - B^2}{A}\varphi_y\psi_y = 0\,.
$$

Kanonický tvar parabolické rovnice (1.25) je

$$
u_{\xi\xi} = F_2(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta)\,.
$$

1.3.5 Kanonický tvar eliptické rovnice

Eliptická rovnice (1.25) nemá reálné charakteristiky. Pro její transformaci zavedeme nejprve označení

$$\mu(x,y) = \frac{B(x,y)}{A(x,y)}, \quad \nu(x,y) = \frac{\sqrt{A(x,y)C(x,y) - \big(B(x,y)\big)^2}}{A(x,y)}.$$

Dále nechť $\Phi(x,y) = C_1$, resp. $\Psi(x,y) = C_2$, je implicitní popis řešení rovnice

$$y' = \mu(x,y) + \mathrm{i}\nu(x,y), \text{ resp. } y' = \mu(x,y) - \mathrm{i}\nu(x,y).$$

To znamená, že

$$-\frac{\Phi_x}{\Phi_y} = \mu + \mathrm{i}\nu, \quad -\frac{\Psi_x}{\Psi_y} = \mu - \mathrm{i}\nu.$$

Položíme

$$\xi = \varphi = \frac{1}{2}(\Phi + \Psi), \quad \eta = \psi = \frac{1}{2\mathrm{i}}(\Phi - \Psi).$$

Pak platí

$$\varphi_x = \frac{1}{2}(\Phi_x + \Psi_x) = \frac{1}{2}(-\mu\Phi_y - \mathrm{i}\nu\Phi_y - \mu\Psi_y + \mathrm{i}\nu\Psi_y) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\nu(\Phi_y - \Psi_y) - \frac{1}{2}\mu(\Phi_y + \Psi_y) = \nu\psi_y - \mu\varphi_y,$$

$$\psi_x = \frac{1}{2\mathrm{i}}(\Phi_x - \Psi_x) = \frac{1}{2\mathrm{i}}(-\mu\Phi_y - \mathrm{i}\nu\Phi_y + \mu\Psi_y - \mathrm{i}\nu\Psi_y) = -\frac{1}{2\mathrm{i}}\mu(\Phi_y - \Psi_y) - \frac{1}{2}\nu(\Phi_y + \Psi_y) = -\mu\psi_y - \nu\varphi_y.$$

Dosazením těchto vyjádření do rovností (1.28) dostaneme

$$\begin{aligned} a = A\varphi_x^2 + 2B\varphi_x\varphi_y + C\varphi_y^2 &= A\left(\nu^2\psi_y^2 - 2\nu\mu\varphi_y\psi_y + \mu^2\varphi_y^2\right) + 2B\left(\nu\varphi_y\psi_y - \mu\varphi_y^2\right) + C\varphi_y^2 = \\ &= (A\mu^2 - 2B\mu + C)\varphi_y^2 + A\nu^2\psi_y^2 + 2\nu(B - A\mu)\varphi_y\psi_y = \\ &= \left(\frac{B^2}{A} - 2\frac{B^2}{A} + C\right)\varphi_y^2 + \frac{AC - B^2}{A}\psi_y^2 + 2\nu(B - B)\varphi_y\psi_y = \frac{AC - B^2}{A}\left(\varphi_y^2 + \psi_y^2\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= A\varphi_x\psi_x + B(\varphi_x\psi_y + \varphi_y\psi_x) + C\varphi_y\psi_y = \\ &= -A\left(\nu\mu\psi_y^2 - \mu^2\varphi_y\psi_y + \nu^2\psi_y\varphi_y - \mu\nu\varphi_y^2\right) + B\left(\nu\psi_y^2 - \mu\varphi_y\psi_y - \mu\varphi_y\psi_y - \nu\varphi_y^2\right) + C\varphi_y\psi_y = \\ &= (A\mu - B)\nu\varphi_y^2 + (B - A\mu)\nu\psi_y^2 + \left(A\mu^2 - A\nu^2 - 2B\mu + C\right)\varphi_y\psi_y = \\ &= (B - B)\left(\nu\varphi_y^2 - \nu\psi_y^2\right) + \left(\frac{B^2}{A} - \frac{AC - B^2}{A} - \frac{2B^2}{A} + \frac{AC}{A}\right)\varphi_y\psi_y = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c = A\psi_x^2 + 2B\psi_x\psi_y + C\psi_y^2 &= A\left(\mu^2\psi_y^2 + 2\mu\nu\psi_y\varphi_y + \nu^2\varphi_y^2\right) - 2B\left(\mu\psi_y^2 + \nu\varphi_y\psi_y\right) + C\psi_y^2 = \\ &= A\nu^2\varphi_y^2 + \left(A\mu^2 - 2B\mu + C\right)\psi_y^2 + 2\nu(A\mu - B)\varphi_y\psi_y = \\ &= \frac{AC - B^2}{A}\varphi_y^2 + \left(\frac{B^2}{A} - 2\frac{B^2}{A} + C\right)\psi_y^2 + 2\nu(B - B)\varphi_y\psi_y = \frac{AC - B^2}{A}\left(\varphi_y^2 + \psi_y^2\right), \end{aligned}$$

tedy $a = c$, $b = 0$. Kanonický tvar eliptické rovnice (1.25) je

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} \;=\; F_3(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta)\,.$$

1.3.6 Kanonický tvar lineární parciální diferenciální rovnice druhého řádu ve dvou nezávisle proměnných s konstantními koeficienty

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} \;=\; du_x + eu_y + fu + g(x,y)\,, \tag{1.32}$$

kde $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ a $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Výše popsané transformace převedou tuto rovnici na některý z tvarů

$$\begin{aligned} u_{\xi\eta} &= d_1 u_\xi + e_1 u_\eta + f_1 u + g_1(\xi, \eta)\,, \quad \text{pokud } b^2 - ac > 0\,, \\ u_{\xi\xi} &= d_2 u_\xi + e_2 u_\eta + f_2 u + g_2(\xi, \eta)\,, \quad \text{pokud } b^2 - ac = 0\,, \\ u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} &= d_3 u_\xi + e_3 u_\eta + f_3 u + g_3(\xi, \eta)\,, \quad \text{pokud } b^2 - ac < 0\,. \end{aligned} \tag{1.33}$$

Zavedeme novou neznámou funkci v vztahem

$$u = v\,\mathrm{e}^{\lambda\xi + \mu\eta}\,,$$

kde λ, μ jsou zatím neurčené konstanty. Pak je

$$\begin{aligned} u_\xi &= \mathrm{e}^{\lambda\xi+\mu\eta}(\lambda v + v_\xi)\,, & u_{\xi\xi} &= \mathrm{e}^{\lambda\xi+\mu\eta}(\lambda^2 v + 2\lambda v_\xi + v_{\xi\xi})\,, \\ u_\eta &= \mathrm{e}^{\lambda\xi+\mu\eta}(\mu v + v_\eta)\,, & u_{\xi\eta} &= \mathrm{e}^{\lambda\xi+\mu\eta}(\lambda\mu v + \mu v_\xi + \lambda v_\eta + v_{\xi\eta})\,, \\ & & u_{\eta\eta} &= \mathrm{e}^{\lambda\xi+\mu\eta}(\mu^2 v + 2\mu v_\eta + v_{\eta\eta})\,. \end{aligned}$$

Dosadíme do rovnic (1.33) a vykrátíme výrazem $\mathrm{e}^{\lambda\xi+\mu\eta} \neq 0$:

$$\begin{aligned} v_{\xi\eta} &= (d_1 - \mu)v_\xi + (e_1 - \lambda)v_\eta + (d_1\lambda + e_1\mu - \lambda\mu + f_1)v + \tilde{g}_1(\xi, \eta) \quad \text{pro hyperbolickou rovnici,} \\ v_{\xi\xi} &= (d_2 - 2\lambda)v_\xi + e_2 v_\eta + (d_2\lambda + e_2\mu - \lambda^2 + f_2)v + \tilde{g}_2(\xi, \eta) \quad \text{pro parabolickou rovnici,} \\ v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} &= (d_3 - 2\lambda)v_\xi + (e_3 - 2\mu)v_\eta + (d_3\lambda + e_3\mu - \lambda^2 - \mu^2 + f_3)v + \tilde{g}_3(\xi, \eta) \quad \text{pro eliptickou rovnici.} \end{aligned}$$

Konstanty λ, μ zvolíme tak, aby pravé strany byly co nejjednodušší. Konkrétně:

- Pro hyperbolickou rovnici $\mu = d_1$, $\lambda = e_1$. Dostaneme

$$v_{\xi\eta} = (e_1 d_1 + f_1)v + \tilde{g}_1(\xi, \eta)\,.$$

- Pro parabolickou rovnici $\lambda = \dfrac{d_2}{2}$, $\mu = -\dfrac{4f_2 + d_2^2}{4e_2}$. Dostaneme

$$v_{\xi\xi} = e_2 v_\eta + \tilde{g}_2(\xi, \eta)\,.$$

- Pro eliptickou rovnici $\lambda = \dfrac{d_3}{2}$, $\mu = \dfrac{e_3}{2}$. Dostaneme

$$v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} = \frac{d_3^2 + e_3^2 + 4f_3}{4} v + \tilde{g}_3(\xi, \eta)\,.$$

1.4 Počáteční úloha pro hyperbolickou rovnici ve dvou nezávisle proměnných

1.4.1 Řešení počáteční úlohy pro homogenní hyperbolickou rovnici ve dvou nezávisle proměnných (kmity nekonečné struny)

$$u_{tt}(t, x) = a^2 u_{xx}(t, x)\,, \qquad (t, x) \in (0, \infty) \times (-\infty, \infty)\,, \tag{1.34}$$

$$u(0, x) = \varphi(x)\,, \quad u_t(0, x) = \psi(x)\,, \qquad x \in (-\infty, \infty)\,, \tag{1.35}$$

kde $a > 0$, funkce φ je dvakrát diferencovatelná a funkce ψ je diferencovatelná.

Charakteristická rovnice parciální rovnice (1.34) je $x'^2 - a^2 = 0$, tedy $x' = \pm a$, z čehož $x(t) = \pm at + const.$ Transformací

$$\xi = x - at\,, \qquad \eta = x + at$$

přejde rovnice (1.34) na tvar

$$u_{\xi\eta}(\xi, \eta) = 0\,.$$

Odtud plyne, že u_ξ nezávisí na η, tedy

$$u_\xi(\xi,\eta) \;=\; f(\xi)\,.$$

Tuto rovnici zintegrujeme podle ξ a dostaneme

$$u(\xi,\eta) \;= F(\xi) + G(\eta)\,,$$

kde F je funkce primitivní k f a G je libovolná funkce. Zpětnou transformací tedy dostaneme řešení rovnice (1.34) ve tvaru

$$u(t,x) \;=\; F(x-at) + G(x+at)\,, \tag{1.36}$$

kde $F,\ G$ jsou libovolné dvakrát diferencovatelné funkce. Určíme je tak, aby byly splněny počáteční podmínky (1.35), tedy

$$F(x)+G(x) \;=\; \varphi(x)\,, \qquad -aF'(x)+aG'(x) \;=\; \psi(x)\,.$$

Druhou z těchto rovností přepíšeme na tvar $\big(F(x)-G(x)\big)' = -\dfrac{\psi(x)}{a}$ a integrujeme. Dostaneme

$$F(x)-G(x)-\big(F(x_0)-G(x_0)\big) \;=\; -\frac{1}{a}\int_{x_0}^{x}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi\,,$$

kde x_0 je nějaké číslo. Řešíme tedy soustavu rovnic

$$\begin{aligned} F(x)+G(x) &= \varphi(x)\,,\\ F(x)-G(x) &= F(x_0)-G(x_0)-\frac{1}{a}\int_{x_0}^{x}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi \end{aligned}$$

a dostaneme

$$F(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi + \frac{F(x_0)}{2} - \frac{G(x_0)}{2}, \qquad G(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi - \frac{F(x_0)}{2} + \frac{G(x_0)}{2}.$$

Dosazením do (1.36) nyní dostaneme řešení úlohy (1.34), (1.35) ve tvaru

$$u(t,x) \;=\; \frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi\,.$$

Poslední formule se nazývá *d'Alembertův vzorec.*

1.4.2 Řešení počáteční úlohy pro homogenní hyperbolickou rovnici ve dvou nezávisle proměnných s obecným počátkem

$$u_{tt}(t,x) \;=\; a^2u_{xx}(t,x)\,, \qquad (t,x)\in(\sigma,\infty)\times(-\infty,\infty)\,, \tag{1.37}$$

$$u(\sigma,x) \;=\; \varphi(x)\,, \quad u_t(\sigma,x) \;=\; \psi(x)\,, \qquad x\in(-\infty,\infty)\,, \tag{1.38}$$

kde $a>0$, $\sigma\in\mathbb{R}$, funkce φ je dvakrát diferencovatelná a funkce ψ je diferencovatelná.

Transformací $\tau = t-\sigma$ tato úloha přejde na

$$\begin{aligned} u_{\tau\tau}(\tau,x) &= a^2u_{xx}(\tau,x)\,, \qquad (\tau,x)\in(0,\infty)\times(-\infty,\infty)\,,\\ u(0,x) = \varphi(x)\,,\quad u_\tau(0,x) &= \psi(x)\,, \qquad x\in(-\infty,\infty)\,. \end{aligned}$$

Podle 1.4.1 má tato úloha řešení

$$u(\tau,x) \;=\; \frac{1}{2}\left(\varphi(x-a\tau)+\varphi(x+a\tau)\right) + \frac{1}{2a}\int_{x-a\tau}^{x+a\tau}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi\,,$$

takže řešení úlohy (1.37), (1.38) je

$$u(t,x) \;=\; \frac{\varphi(x-a(t-\sigma))+\varphi(x+a(t-\sigma))}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-a(t-\sigma)}^{x+a(t-\sigma)}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi\,.$$

1.4.3 Řešení počáteční úlohy pro nehomogenní hyperbolickou rovnici ve dvou proměnných s homogenní počáteční podmínkou (buzené kmity nekonečné struny)

$$
\begin{aligned}
u_{tt}(t,x) &= a^2 u_{xx}(t,x) + f(t,x)\,, \qquad (t,x) \in (0,\infty)\times(-\infty,\infty)\,, && (1.39)\\
u(0,x) &= 0\,, \quad u_t(0,x) \;=\; 0\,, \qquad x \in (-\infty,\infty)\,, && (1.40)
\end{aligned}
$$

kde $a > 0$ a funkce f je spojitá.

Tato úloha popisuje kmity struny, která je na počátku v klidu a v rovnovážné poloze. Kmity jsou buzené působením vnější síly f. Můžeme si tak představit, že od počátku se v průběhu postupně „nasčítají“ nebo„naintegrují“ vlivy síly f. Tedy, že řešení je tvaru

$$
u(t,x) = \int_0^t w(t,x,\sigma)\mathrm{d}\sigma.
$$

Tato myšlenka se nazývá *Duhamelův princip.* Platí

$$
u(0,x) \;=\; 0\,, \quad \text{a} \quad u_t(t,x) \;=\; w(t,x,t) + \int_0^t w_t(t,x,\sigma)\mathrm{d}\sigma\,.
$$

Ke splnění podmínky $u_t(0,x) = 0$ stačí, aby pro všechna $\sigma > 0$ funkce $w = w(t,x,\sigma)$ splňovala

$$
w(\sigma,x,\sigma) \;=\; 0\,. \tag{1.41}
$$

Dále platí

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(t,x) &= \frac{\partial}{\partial t}\left(w(t,x,t) + \int_0^t w_{|1}(t,x,\sigma)\mathrm{d}\sigma \right) \;=\; \frac{\partial}{\partial t}\left(0 + \int_0^t w_{|1}(t,x,\sigma)\mathrm{d}\sigma \right) \;=\\
&= w_{|1}(t,x,t) + \int_0^t w_{|1,1}(t,x,\sigma)\mathrm{d}\sigma\,,\\
\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,x) &= \int_0^t w_{|2,2}(t,x,\sigma)\mathrm{d}\sigma\,.
\end{aligned}
$$

Má platit $u_{tt}(t,x) - a^2 u_{xx}(t,x) = f(t,x)$, tedy $f(t,x) \;=\; w_{|1}(t,x,t) + \int_0^t \left(w_{|1,1}(t,x,\sigma) - a^2 w_{|2,2}(t,x,\sigma) \right) \mathrm{d}\sigma\,.$ Poslední rovnice bude splněna například pro funkci $w = w(t,x,\sigma)$, která splňuje pro každé $\sigma > 0$

$$
\begin{aligned}
w_{tt}(t,x,\sigma) &= a^2 w_{xx}(t,x,\sigma)\,, \qquad (t,x) \in (\sigma,\infty)\times(-\infty,\infty)\,, && (1.42)\\
w_t(\sigma,x,\sigma) &= f(\sigma,x)\,, \qquad x \in (-\infty,\infty)\,. && (1.43)
\end{aligned}
$$

Podle 1.4.2 je řešení úlohy (1.42), (1.41), (1.43) dáno formulí

$$
w(t,x,\sigma) \;=\; \frac{1}{2a} \int_{x-a(t-\sigma)}^{x+a(t-\sigma)} f(\sigma,\xi)\mathrm{d}\xi\,,
$$

takže řešení úlohy (1.39), (1.40) je

$$
u(t,x) = \frac{1}{2a}\int_0^t \left(\int_{x-a(t-\sigma)}^{x+a(t-\sigma)} f(\sigma,\xi)\mathrm{d}\xi \right) \mathrm{d}\sigma\,.
$$

Dvojnásobný integrál na pravé straně rovnosti je někdy užitečné vyjádřit jako integrál dvojný, tj.

$$\int_0^t \left(\int_{x-a(t-\sigma)}^{x+a(t-\sigma)} f(\sigma,\xi)\mathrm{d}\xi \right) \mathrm{d}\sigma = \iint_\Omega f(\sigma,\xi)\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}\xi,$$

kde

$$\Omega = \left\{(\sigma,\xi) \in \mathbb{R}^2 : 0 < \sigma < t,\, x - (a(t-\sigma) < \xi < x + a(t-\sigma)\right\} = \\ = \left\{(\sigma,\xi) \in \mathbb{R}^2 : x - t < \xi < x + t,\, 0 < \sigma < t - |\xi - x|\right\}.$$

1.4.4 Řešení obecné počáteční úlohy pro hyperbolickou rovnici ve dvou nezávisle proměnných

$$u_{tt}(t,x) = a^2 u_{xx}(t,x) + f(t,x), \qquad (t,x) \in (0,\infty) \times (-\infty,\infty), \tag{1.44}$$

$$u(0,x) = \varphi(x), \quad u_t(0,x) = \psi(x), \qquad x \in (-\infty,\infty), \tag{1.45}$$

kde $a > 0$, funkce φ je dvakrát diferencovatelná, funkce ψ je diferencovatelná a funkce f je spojitá.

Přímým výpočtem ověříme, že je-li $v = v(t,x)$ řešením úlohy (1.34), (1.35) a $w = w(t,x)$ je řešením úlohy (1.39), (1.40), pak $u = u(t,x) = v(t,x) + w(t,x)$ je řešením úlohy (1.44), (1.45). Podle 1.4.1 a 1.4.3 je řešení dané úlohy

$$u(t,x) = \frac{\varphi(x-at) + \varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)\mathrm{d}\xi + \frac{1}{2a}\int_0^t \left(\int_{x-a(t-\sigma)}^{x+a(t-\sigma)} f(\sigma,\xi)\mathrm{d}\xi \right) \mathrm{d}\sigma.$$

Zavedeme-li funkci

$$G = G(x,\xi,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2a}, & x - at < \xi < x + at, \\ 0, & \text{jinak}, \end{cases}$$

můžeme řešení úlohy (1.44), (1.45) zapsat v kompaktnějším tvaru

$$u(t,x) = \tfrac{1}{2}\big(\varphi(x-at) + \varphi(x+at)\big) + \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\xi)G(x,\xi,t)\mathrm{d}\xi + \int_0^t \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\sigma,\xi)G(x,\xi,t-\sigma)\mathrm{d}\xi \right) \mathrm{d}\sigma.$$

Funkce G má derivaci podle času ve smyslu distribucí, sr. Dodatek A.3. Řešení úlohy (1.44), (1.45) proto můžeme také vyjádřit jako

$$u(t,x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\varphi(\xi)\frac{\partial}{\partial t}G(x,\xi,t) + \psi(\xi)G(x,\xi,t) + \int_0^t f(\sigma,\xi)G(x,\xi,t-\sigma)\mathrm{d}\sigma \right) \mathrm{d}\xi.$$

Jednoznačnost řešení úlohy (1.44)**,** (1.45)

Jsou-li $u_1 = u_1(t,x)$ a $u_2 = u_2(t,x)$ řešení úlohy (1.44), (1.45), pak $u_0 = u_0(t,x) = u_1(t,x) - u_2(t,x)$ je řešením homogenní rovnice (1.34) s nulovými počátečními podmínkami (1.40). Analogicky jako v 1.4.1 ukážeme, že

$$u_0(t,x) = F(x-at) + G(x+at)$$

a pro funkce F, G platí

$$F(x) + G(x) = 0, \quad \text{neboli} \quad G(x) = -F(x),$$
$$F'(x) - G'(x) = 0, \quad \text{neboli} \quad G(x) = F(x) + \mathit{const}$$

pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Odtud jednak plyne, že $F(x) \equiv \mathit{const}$ a dále

$$u_0(t,x) = F(x-at) + G(x+at) = F(x-at) - F(x+at) \equiv \mathit{const} - \mathit{const} = 0.$$

Tedy $u_1 \equiv u_2$.

1.4.5 Řešení hyperbolické rovnice ve dvou nezávisle proměnných s obecnými počátečními podmínkami a s jednou okrajovou podmínkou

Podmínka Dirichletova typu (kmity nekonečné struny upevněné na jednom konci, odraz vlny na pevném konci)

$$
\begin{aligned}
u_{tt}(t,x) &= a^2 u_{xx}(t,x) + f(t,x)\,, && (t,x) \in (0,\infty)\times(0,\infty)\,, && (1.46)\\
u(0,x) = \varphi(x)\,, \quad u_t(0,x) &= \psi(x)\,, && x \in (0,\infty)\,, && (1.47)\\
u(t,0) &= 0\,, && t \in (0,\infty)\,, && (1.48)
\end{aligned}
$$

kde $a > 0$, funkce φ je dvakrát diferencovatelná, funkce ψ je diferencovatelná a platí

$$\lim_{x\to 0+} \varphi(x) = 0, \quad \lim_{x\to 0+} \psi(x) = 0.$$

Definujme liché rozšíření funkcí $\varphi,\ \psi,\ f(t,\cdot)$:

$$\tilde\varphi(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \ge 0 \\ -\varphi(-x), & x < 0 \end{cases}, \qquad \tilde\psi(x) = \begin{cases} \psi(x), & x > 0 \\ -\psi(-x), & x < 0 \end{cases}, \qquad \tilde f(t,x) = \begin{cases} f(t,x), & x > 0 \\ -f(t,-x), & x < 0 \end{cases},$$

tj. $\tilde\varphi(x) = \varphi(|x|)\operatorname{sgn} x$, $\tilde\psi(x) = \psi(|x|)\operatorname{sgn} x$, $\tilde f(t,x) = f(t,|x|)\operatorname{sgn} x$.

Řešení úlohy (1.46), (1.47), (1.48) je

$$
\begin{aligned}
u(t,x) &= \frac{\tilde\varphi(x-at)+\tilde\varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \tilde\psi(\xi)\mathrm{d}\xi + \frac{1}{2a}\int_0^t \left(\int_{x-a(t-\sigma)}^{x+a(t-\sigma)} \tilde f(\sigma,\xi)\mathrm{d}\xi \right)\mathrm{d}\sigma = \\
&= \frac{\varphi(|x-at|)\operatorname{sgn}(x-at)+\varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(|\xi|)\operatorname{sgn}(\xi)\mathrm{d}\xi + \frac{1}{2a}\int_0^t \left(\int_{x-a(t-\sigma)}^{x+a(t-\sigma)} f(\sigma,|\xi|)\operatorname{sgn}(\xi)\mathrm{d}\xi \right)\mathrm{d}\sigma = \\
&= \frac{\varphi(|x-at|)\operatorname{sgn}(x-at)+\varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{|x-at|}^{x+at} \psi(\xi)\mathrm{d}\xi + \frac{1}{2a}\int_0^t \left(\int_{|x-a(t-\sigma)|}^{x+a(t-\sigma)} f(\sigma,\xi)\mathrm{d}\xi \right)\mathrm{d}\sigma\,.
\end{aligned}
$$

V tomto případě můžeme na množině $[0,\infty)^3$ definovat funkci G předpisem

$$G(x,\xi,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2a}, & |x-at| < \xi < x+at, \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$$

a řešení úlohy (1.46), (1.47), (1.48) zapsat ve tvaru

$$u(t,x) = \frac{\varphi(|x-at|)\operatorname{sgn}(x-at)+\varphi(x+at)}{2} + \int_0^\infty \psi(\xi)G(x,\xi,t)\mathrm{d}\xi + \int_0^t\int_0^\infty f(\sigma,\xi)G(x,\xi,t-\sigma)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\sigma.$$

Řešení úlohy (1.46), (1.47) s nenulovou okrajovou podmínkou

$$u(t,0) = \alpha(t)\,, \qquad t \in (0,\infty)\,, \tag{1.49}$$

kde α je dvakrát diferencovatelná funkce splňující podmínku $\lim\limits_{t\to 0+} \alpha(t) = \lim\limits_{x\to 0+} \varphi(x)$, je tvaru

$$u(t,x) = v(t,x) + \alpha(t),$$

kde funkce v je řešením úlohy

$$
\begin{aligned}
v_{tt}(t,x) &= a^2 v_{xx}(t,x) + f(t,x) - \alpha''(t)\,, && (t,x) \in (0,\infty)\times(0,\infty)\,,\\
v(0,x) = \varphi(x) - \alpha(0+)\,, \quad v_t(0,x) &= \psi(x) - \alpha'(0+)\,, && x \in (0,\infty)\,,\\
v(t,0) &= 0\,, && t \in (0,\infty)\,;
\end{aligned}
$$

přitom $\alpha(0+) = \lim\limits_{t\to 0+} \alpha(t)$, $\alpha'(0+) = \lim\limits_{t\to 0+} \alpha'(t)$.

Podmínka Neumannova typu (odraz vlny na volném konci)

$$u_{tt}(t,x) = a^2 u_{xx}(t,x) + f(t,x)\,, \qquad (t,x) \in (0,\infty) \times (0,\infty)\,, \tag{1.50}$$
$$u(0,x) = \varphi(x)\,, \quad u_t(0,x) = \psi(x)\,, \qquad x \in (0,\infty)\,, \tag{1.51}$$
$$u_x(t,0) = 0\,, \qquad t \in (0,\infty)\,, \tag{1.52}$$

kde $a > 0$, funkce φ je dvakrát diferencovatelná, funkce ψ je diferencovatelná a pro jejich derivace platí

$$\lim_{x\to 0+} \varphi'(x) = 0\,, \qquad \lim_{x\to 0+} \psi'(x) = 0\,.$$

Nyní zavedeme sudé rozšíření funkcí $\varphi,\ \psi,\ f(t,\cdot)$

$$\tilde{\varphi}(x) = \varphi(|x|)\,, \qquad \tilde{\psi}(x) = \psi(|x|)\,, \qquad \tilde{f}(t,x) = f(t,|x|)\,,$$

a dostaneme řešení úlohy (1.50), (1.51), (1.52) ve tvaru

$$u(t,x) = \frac{\varphi(|x-at|) + \varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(|\xi|)\mathrm{d}\xi + \frac{1}{2a}\int_0^t \left(\int_{x-a(t-\sigma)}^{x+a(t-\sigma)} f(\sigma,|\xi|)\mathrm{d}\xi \right) \mathrm{d}\sigma\,.$$

V tomto případě můžeme definovat na množině $[0,\infty)^3$ funkci G předpisem

$$G(x,\xi,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2a}, & |x-at| < \xi < x+at, \\ \dfrac{1}{a}, & x-at < 0 < \xi < at-x, \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$$

a řešení úlohy (1.50), (1.51), (1.52) zapsat ve tvaru

$$u(t,x) = \frac{\varphi(|x-at|) + \varphi(x+at)}{2} + \int_0^\infty \psi(\xi)G(x,\xi,t)\mathrm{d}\xi + \int_0^t \int_0^\infty f(\sigma,\xi)G(x,\xi,t-\sigma)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\sigma.$$

Řešení úlohy (1.50), (1.51) s nenulovou okrajovou podmínkou

$$u_x(t,0) = \beta(t)\,, \qquad t \in (0,\infty)\,, \tag{1.53}$$

kde β je dvakrát diferencovatelná funkce splňující podmínku $\lim_{t\to 0+} \beta(t) = \lim_{x\to 0+} \varphi'(x)$, $\lim_{t\to 0+} \beta'(t) = \lim_{x\to 0+} \psi'(x)$, je tvaru

$$u(t,x) = v(t,x) + x\beta(t),$$

kde funkce v je řešením úlohy

$$v_{tt}(t,x) = a^2 v_{xx}(t,x) + f(t,x) - x\beta''(t)\,, \qquad (t,x) \in (0,\infty) \times (0,\infty)\,,$$
$$v(0,x) = \varphi(x) - x\beta(0)\,, \quad v_t(0,x) = \psi(x) - x\beta'(0)\,, \qquad x \in (0,\infty)\,,$$
$$v_x(t,0) = 0\,, \qquad t \in (0,\infty)\,;$$

pokud by některá z funkcí β, β', nebyla pro $t = 0$ definovaná, vezmeme místo funkčních hodnot příslušnou limitu zprava.

1.4.6 Řešení hyperbolické rovnice ve dvou nezávisle proměnných s obecnými počátečními podmínkami a s okrajovými podmínkami Dirichletova typu (kmity konečné struny upevněné na obou koncích)

$$
\begin{aligned}
u_{tt}(t,x) &= a^2 u_{xx}(t,x) + f(t,x)\,, \qquad (t,x)\in(0,\infty)\times(0,\ell)\,, &(1.54)\\
u(0,x) &= \varphi(x)\,, \quad u_t(0,x) = \psi(x)\,, \qquad x\in(0,\ell)\,, &(1.55)\\
u(t,0) &= u(t,\ell) = 0\,, \qquad t\in(0,\infty)\,, &(1.56)
\end{aligned}
$$

kde $a>0$, funkce φ je dvakrát diferencovatelná, funkce ψ je diferencovatelná a platí

$$\varphi(0)=\varphi(\ell)=\psi(0)=\psi(\ell)=0\,.$$

Definujme spojité 2ℓ-periodické liché rozšíření funkcí $\varphi,\ \psi,\ f(t,\cdot)$. Toto rozšíření je dáno sinovými řadami

$$
\begin{aligned}
\tilde\varphi(x) &= \frac{2}{\ell}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^{\ell}\varphi(\xi)\sin\frac{n\pi}{\ell}\xi\mathrm{d}\xi\right)\sin\frac{n\pi}{\ell}x\,,\\
\tilde\psi(x) &= \frac{2}{\ell}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^{\ell}\psi(\xi)\sin\frac{n\pi}{\ell}\xi\mathrm{d}\xi\right)\sin\frac{n\pi}{\ell}x\,,\\
\tilde f(t,x) &= \frac{2}{\ell}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^{\ell}f(t,\xi)\sin\frac{n\pi}{\ell}\xi\mathrm{d}\xi\right)\sin\frac{n\pi}{\ell}x\,,
\end{aligned}
$$

S využitím součtových vzorců $\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)=2\sin\alpha\cos\beta$ a $\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)=2\sin\alpha\cos\beta$ dostaneme

$$
\begin{aligned}
\frac12\left(\tilde\varphi(x-at)+\tilde\varphi(x+at)\right) &= \frac{1}{\ell}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^{\ell}\varphi(\xi)\sin\frac{n\pi}{\ell}\xi\mathrm{d}\xi\right)\left(\sin\frac{n\pi}{\ell}(x-at)+\sin\frac{n\pi}{\ell}(x+at)\right) = \\
&= \frac{2}{\ell}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^{\ell}\varphi(\xi)\sin\frac{n\pi}{\ell}\xi\mathrm{d}\xi\right)\sin\frac{n\pi}{\ell}x\cos\frac{n\pi a}{\ell}t\,,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\tilde\psi(\xi)\mathrm{d}\xi &= \frac{1}{a\ell}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^{\ell}\psi(\xi)\sin\frac{n\pi}{\ell}\xi\mathrm{d}\xi\right)\left(\int_{x-at}^{x+at}\sin\frac{n\pi}{\ell}\xi\mathrm{d}\xi\right) = \\
&= \frac{1}{a\ell}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^{\ell}\psi(\xi)\sin\frac{n\pi}{\ell}\xi\mathrm{d}\xi\right)\left[\frac{\ell}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{\ell}\xi\right]_{\xi=x+at}^{x-at} = \\
&= \frac{1}{a\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac1n\left(\int_0^{\ell}\psi(\xi)\sin\frac{n\pi}{\ell}\xi\mathrm{d}\xi\right)\left(\cos\frac{n\pi}{\ell}(x-at)-\cos\frac{n\pi}{\ell}(x+at)\right) = \\
&= \frac{2}{a\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac1n\left(\int_0^{\ell}\psi(\xi)\sin\frac{n\pi}{\ell}\xi\mathrm{d}\xi\right)\sin\frac{n\pi}{\ell}x\sin\frac{n\pi a}{\ell}t\,,
\end{aligned}
$$

$$
\frac{1}{2a}\int_0^t\left(\int_{x-a(t-\sigma)}^{x-a(t+\sigma)}\tilde f(\sigma,\xi)\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{a\ell}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t\left(\int_0^{\ell}f(\sigma,\xi)\sin\frac{n\pi}{\ell}\xi\mathrm{d}\xi\right)\left(\int_{x-a(t-\sigma)}^{x+a(t-\sigma)}\sin\frac{n\pi}{\ell}\xi\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}\sigma =
$$

$$= \frac{1}{a\ell}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t\left(\int_0^\ell f(\sigma,\xi)\sin\frac{n\pi}{\ell}\xi\mathrm{d}\xi\right)\left[\frac{\ell}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{\ell}\xi\right]_{\xi=x+a(t-\sigma)}^{x-a(t-\sigma)}\mathrm{d}\sigma =$$
$$= \frac{1}{a\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\int_0^t\left(\int_0^\ell f(\sigma,\xi)\sin\frac{n\pi}{\ell}\xi\mathrm{d}\xi\right)\left(\cos\frac{n\pi}{\ell}(x-a(t-\sigma))-\cos\frac{n\pi}{\ell}(x+a(t-\sigma))\right)\mathrm{d}\sigma =$$
$$= \frac{2}{a\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\int_0^t\left(\int_0^\ell f(\sigma,\xi)\sin\frac{n\pi}{\ell}\xi\mathrm{d}\xi\right)\sin\frac{n\pi}{\ell}x\sin\frac{n\pi a}{\ell}(t-\sigma)\mathrm{d}\sigma =$$
$$= \frac{2}{a\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{\ell}x\int_0^t\sin\frac{n\pi a}{\ell}(t-\sigma)\left(\int_0^\ell f(\sigma,\xi)\sin\frac{n\pi}{\ell}\xi\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}\sigma\,.$$

Označíme-li tedy

$$\omega = \frac{a\pi}{\ell}, \qquad A_n = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell\varphi(\xi)\sin\frac{n\pi}{\ell}\xi\mathrm{d}\xi\,, \qquad B_n = \frac{2}{n\pi a}\int_0^\ell\psi(\xi)\sin\frac{n\pi}{\ell}\xi\mathrm{d}\xi\,,$$

$$G(x,\xi,t-\sigma) = \frac{2}{a\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{\ell}x\sin\frac{n\pi}{\ell}\xi\sin\frac{n\pi a}{\ell}(t-\sigma)\,,$$

lze řešení úlohy (1.54), (1.55), (1.56) zapsat ve tvaru

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos n\omega t+B_n\sin n\omega t)\sin\frac{n\pi}{\ell}x+\int_0^t\int_0^\ell f(\sigma,\xi)G(x,\xi,t-\sigma)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\sigma\,.$$

Označíme-li dále $\alpha_n=\sqrt{A_n^2+B_n^2}$ a $\varphi_n=\operatorname{arctg}\dfrac{B_n}{A_n}$, platí

$$A_n\cos n\omega t+B_n\sin n\omega t = \alpha_n\cos(n\omega t-\varphi_n)$$

a řešení úlohy (1.54), (1.55), (1.56) lze zapsat ve tvaru

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\cos(n\omega t-\varphi_n)\sin\frac{n\pi}{\ell}x+\int_0^t\int_0^\ell f(\sigma,\xi)G(x,\xi,t-\sigma)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\sigma\,.$$

Řešení úlohy (1.54), (1.55) s nehomogenní okrajovou podmínkou

$$u(t,0)=\mu_0(t)\,,\quad u(t,\ell)=\mu_1(t)\,,\qquad t\in(0,\infty)\,, \tag{1.57}$$

kde $\alpha,\ \beta$ jsou dvakrát diferencovatelné funkce, je tvaru $u(t,x)=v(t,x)+U(t,x)$, kde funkce $U=U(t,x)$ splňuje podmínky (1.57) a funkce $v=v(t,x)$ je řešením úlohy

$$v_{tt}(t,x) = a^2v_{xx}(t,x)+f(t,x)-U_{tt}(t,x)+a^2U_{xx}(t,x)\,,\qquad (t,x)\in(0,\infty)\times(0,\ell)\,, \tag{1.58}$$
$$v(0,x) = \varphi(x)-U(0,x)\,,\quad v_t(0,x) = \psi(x)-U_t(0,x)\,,\qquad x\in(0,\ell)\,, \tag{1.59}$$
$$v(t,0) = v(t,\ell) = 0\,,\qquad t\in(0,\infty)\,, \tag{1.60}$$

Za funkci U stačí vzít

$$U(t,x) = \mu_0(t)+\frac{x}{\ell}(\mu_1(t)-\mu_0(t))\,.$$

Při této volbě je $U_{xx}\equiv 0$.

Cvičení

Najděte obecné řešení rovnice

1) $u_x = 6x^2 u_y$

2) $(z+y-x)u_x + (z+x-y)u_y + zu_z = 0$

3) $u_x + 2u_y = 3$

4) $u_x + xu_y = u$

Najděte řešení rovnice, které splňuje danou podmínku

5) $u_x + yu_y = 0,\ u(0,y) = \dfrac{1}{y}$

6) $u_t + au_x = 0,\ u(x,0) = \sin x$

7) $u_t + au_x = x^2 t + 1,\ u(x,0) = x+2$

8) $yu_x - xu_y = y^2 - x^2,\ u(x,a) = x^2 - a^2$

9) $xuu_x + yuu_y + xy = 0,\ u\left(x, \dfrac{1}{x}\right) = 1$

10) $2xu_x + yu_y = 4u + 1,\ u(x,1) = x^2$

11) $u = u_x u_y,\ u(0,y) = y^2$

12) $4u = u_x^2 - u_y^2,\ u(\cos\sigma, \sin\sigma) = \cos 2\sigma$

Určete typ lineární rovnice druhého řádu

13) $u_{xx} + yu_{yy} = 0$

14) $x^2 u_{xx} - 2x \sin y\, u_{xy} + \sin^2 y\, u_{yy} = 0$

Danou rovnici převeďte na kanonický tvar

15) $\mathrm{e}^{2x} u_{xx} + 2\mathrm{e}^{x+y} u_{xy} + e^{2y} u_{yy} = 0$

16) $xyu_{xx} - (x^2+y^2)u_{xy} + xyu_{yy} + yu_x + xu_y = 0,\ x \neq y$

17) $y^2 u_{xx} + x^2 u_{yy} = 0$

18) $u_{xx} + u_{xy} + u_{yy} + u_x = 0$

Najděte obecné řešení rovnice

19) $x^2 u_{xx} - 2xyu_{xy} + y^2 u_{yy} + xu_x + yu_y = 0$

20) $x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} = 0$

Řešte počáteční úlohy

21) $u_{tt} = u_{xx} + \sin x;\quad u(0,x) = x,\ u_t(0,x) = \dfrac{1}{x}.$

22) $u_{tt} - u_{xx} = \delta(x)\sin t;\quad u(0,x) = 0,\ u_t(0,x) = 0.$
$\delta(x)$ označuje Diracovu distribuci soustředěnou v bodě 0.

23) Řešte rovnici s nulovými počátečními podmínkami a jednou okrajovou podmínkou
$u_{tt} = a^2 u_{xx};\quad u(0,x) = 0 = u_t(0,x),\quad u(t,0) = A\sin\omega t.$

Výsledky: 1) $u(x,y) = \Phi(2x^3+y)$ **2)** $u(x,y,z) = \Phi\big(x+y-2z, z^2(x-y)\big)$ **3)** $u(x,y) = \frac{3}{2}y + \Phi(2x-y)$
4) $u(x,y) = \mathrm{e}^x \Phi(x^2-2y)$ **5)** $u(x,y) = \frac{\mathrm{e}^x}{y}$ **6)** $u(x,t) = \sin(x-at)$ **7)** $u(x,t) = \frac{a^2}{12}t^4 - \frac{ax}{3}t^3 + \frac{x^2}{2}t^2 - (a-1)t + x + 2$
8) $u(x,y) = x^2+y^2+xy-2a^2-a\sqrt{x^2+y^2-a^2}$ **9)** $u(x,y) = \sqrt{2-xy}$ **10)** $u(x,y) = x^2 + \frac{1}{4}(y^4-1)$
11) $u(x,y) = \frac{1}{16}(4y+x)^2$ **12)** $u(x,y) = x^2 - y^2$ **13)** hyperbolická pro $y<0$, eliptická pro $y>0$ **14)** parabolická
15) $u_{\eta\eta} = (\frac{1}{\eta-\xi\eta^2} - 1)u_\xi - u_\eta$ **16)** $u_{\xi\eta} = \frac{\xi}{\eta^2-\xi^2}u_\eta$ **17)** $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \frac{1}{2\xi}u_\xi + \frac{1}{2\eta}u_\eta = 0$
18) $v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} = \frac{4}{9}$, $v = \mathrm{e}^{\frac{1}{3}\xi + \frac{1}{\sqrt{3}}\eta}$, $\xi = \frac{1}{2}x - y$, $\eta = \frac{\sqrt{3}}{2}x$ **19)** $u(x,y) = \Phi(xy)\ln y + \Psi(xy)$
20) $u(x,y) = \Phi(\frac{y}{x})\sqrt{xy} + \Psi(xy)$ **21)** $u(t,x) = x + \ln\sqrt{\left|\frac{x+t}{x-t}\right|} + \sin x - \sin x \cos t$

22) $u(t,x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\big(1-\cos(t-|x|)\big), & |x|<t, \\ 0, & |x|>t \end{cases}$ **23)** $u(t,x) = \begin{cases} A\sin\left(\omega t - \frac{\omega}{a}x\right), & x<at, \\ 0, & x \geq at. \end{cases}$

Kapitola 2

Metody integrálních transformací

2.1 Fourierova transformace

Fourierova transformace $\mathcal{F}$ převádí reálnou funkci f jedné reálné proměnné na komplexní funkci $\mathcal{F}(f) = \hat{f}$ jedné reálné proměnné definovanou vztahem

$$\hat{f}(\xi) \;=\; \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\mathrm{d}x.$$

O funkci f předpokládáme, že je definovaná na $\mathbb{R}$ a konverguje dostatečně rychle k nule pro $|x| \to \infty$ tak, aby nevlastní integrál na pravé straně konvergoval. Z linearity integrálu plyne, že Fourierova transformace je lineární, tj.

$$\mathcal{F}(c_1 f_1 + c_2 f_2)(\xi) = c_1 \hat{f}_1(\xi) + c_2 \hat{f}_2(\xi).$$

Pro Fourierův obraz derivace funkce f dostaneme integrací per partes a s využitím vlastnosti $\lim\limits_{|x|\to\infty} f(x) = 0$ vztah

$$\mathcal{F}(f')(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f'(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\mathrm{d}x = \left[f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\right]_{x=-\infty}^{\infty} - \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)(-\mathrm{i}\xi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\mathrm{d}x = \mathrm{i}\xi \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\mathrm{d}x = \mathrm{i}\xi\mathcal{F}(f)(\xi),$$

tj.

$$\widehat{f'}(\xi) = \mathrm{i}\xi\hat{f}(\xi). \tag{2.1}$$

Inversní Fourierova transformace $\mathcal{F}^{-1}$ převádí funkci $\hat{f}$ zpět na funkci f na celém $\mathbb{R}$; funkce f je přitom dána vztahem

$$f(x) \;=\; \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}\mathrm{d}\xi.$$

Konvoluce funkcí f, g definovaných na $\mathbb{R}$ je funkce $f * g$ daná vztahem

$$f * g(x) \;=\; \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)\mathrm{d}y.$$

(O nevlastním integrálu opět předpokládme, že konverguje.) Fourierův obraz konvoluce funkcí f, g je

$$\mathcal{F}(f*g)(\xi) \;=\; \int\limits_{-\infty}^{\infty} f*g(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\mathrm{d}x \;=\; \int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \;=\; \iint\limits_{\mathbb{R}^2} f(y)g(x-y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

V tomto dvojném integrálu budeme transformovat proměnné tak, že položíme $x = z + y$, $y = y$. Jacobián tohoto zobrazení je

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Dále $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}y\xi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z\xi}$, tedy

$$\mathcal{F}(f*g)(\xi) \;=\; \iint\limits_{\mathbb{R}^2} f(y)g(z)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}y\xi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z\xi}\mathrm{d}z\mathrm{d}y \;=\; \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}y\xi}\mathrm{d}y\right)\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(z)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z\xi}\mathrm{d}z\right) \;=\; \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi).$$

To znamená, že

$$\widehat{f*g} = \hat{f}\hat{g}. \tag{2.2}$$

2.1.1 Řešení počáteční úlohy pro homogenní parabolickou rovnici ve dvou nezávisle proměnných (vedení tepla v tenké homogenní nekonečné tyči)

$$u_t(t,x) \;=\; a^2u_{xx}(t,x), \qquad (t,x) \in (0,\infty)\times(-\infty,\infty), \tag{2.3}$$

$$u(0,x) \;=\; \varphi(x), \qquad x \in (-\infty,\infty). \tag{2.4}$$

O všech funkcích i jejich derivacích opět předpokládáme, že „jdou dostatečně rychle k nule pro $|x| \to \infty$“. Na rovnici (2.3) aplikujeme Fourierovu transformaci (funkci u považujeme za funkci proměnné x; t považujeme za parametr):

$$\mathcal{F}(u_t)(\xi) \;=\; \int\limits_{-\infty}^{\infty} u_t(t,x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\mathrm{d}x \;=\; \hat{u}_t(t,\xi),$$

a podle rovnosti (2.1)

$$\mathcal{F}(u_{xx})(t,\xi) = \mathrm{i}\xi\mathcal{F}(u_x)(t,\xi) = (\mathrm{i}\xi)^2\mathcal{F}(u)(t,\xi) = -\xi^2\mathcal{F}(u)(t,\xi) = -\xi^2\hat{u}(t,\xi).$$

Rovnice (2.3) se tedy transformuje na rovnici

$$\hat{u}_t(t,\xi) \;=\; -a^2\xi^2\hat{u}(t,\xi), \tag{2.5}$$

což je obyčejná diferenciální rovnice prvního řádu (ξ hraje roli parametru). Její řešení je

$$\hat{u}(t,\xi) \;=\; C\mathrm{e}^{-a^2\xi^2 t},$$

kde C je integrační konstanta; nezávisí na t, ale může záviset na ξ. Určíme ji z transformované počáteční podmínky (2.4), tj. z podmínky

$$\hat{u}(0,\xi) \;=\; \hat{\varphi}(\xi). \tag{2.6}$$

Je tedy

$$C = \hat{u}(0,\xi) \;=\; \hat{\varphi}(\xi) \;=\; \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\mathrm{d}x.$$

Označme $g(t,x)$ vzor funkce $\hat{g}(t,\xi) = \mathrm{e}^{-a^2\xi^2 t}$ při Fourierově transformaci, tedy

$$\begin{aligned} g(t,x) \;&=\; \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-a^2\xi^2 t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}\mathrm{d}\xi \;=\; \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-a^2\xi^2 t}(\cos x\xi + \mathrm{i}\sin\xi x)\mathrm{d}\xi \;= \\ &=\; \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-a^2\xi^2 t}\cos x\xi\mathrm{d}\xi + \frac{\mathrm{i}}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-a^2\xi^2 t}\sin x\xi\mathrm{d}\xi \;=\; \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-a^2\xi^2 t}\cos x\xi\mathrm{d}\xi, \end{aligned}$$

neboť funkce $\mathrm{e}^{-a^2\xi^2 t}\cos x\xi$ (jako funkce proměnné ξ) je sudá a funkce $\mathrm{e}^{-a^2\xi^2 t}\sin x\xi$ je lichá. Substitucí $\eta = \xi\sqrt{a^2 t}$ a při označení $q = \dfrac{x}{\sqrt{a^2 t}}$ nyní dostáváme

$$g(t,x) = \frac{1}{\pi\sqrt{a^2 t}}\int\limits_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\eta^2}\cos q\eta\mathrm{d}\eta.$$

Označme dále $I(q) = \int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-\eta^2} \cos q\eta \mathrm{d}\eta$. Pak podle (C.21) je $I(0) = \int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-\eta^2} \mathrm{d}\eta = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Derivováním integrálu $I(q)$ podle parametru q a následnou integrací per partes dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q} I(q) = -\int\limits_0^\infty \eta \mathrm{e}^{-\eta^2} \sin q\eta \mathrm{d}\eta = \left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\eta^2} \sin q\eta\right]_{\eta=0}^\infty - \frac{q}{2}\int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-\eta^2} \cos q\eta \mathrm{d}\eta = -\frac{q}{2} I(q).$$

Integrál $I(q)$ je tedy řešením počáteční úlohy pro obyčejnou diferenciální rovnici

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q} I(q) = -\frac{q}{2} I(q), \quad I(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

takže

$$I(q) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \mathrm{e}^{-\frac{q^2}{4}}.$$

Návratem k původní proměnné x dostáváme

$$g(t,x) \;=\; \frac{1}{\pi\sqrt{a^2 t}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4a^2 t}} \;=\; \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}.$$

Řešení úlohy (2.5), (2.6) lze zapsat ve tvaru $\hat{u}(t,\xi) \;=\; \hat{\varphi}(\xi)\hat{g}(t,\xi)$. Inversní Fourierovou transformací s využitím (2.2) dostaneme řešení úlohy (2.3), (2.4) jako konvoluci funkcí φ a $g(t,\cdot)$

$$u(t,x) \;=\; \varphi(\cdot) * g(t,\cdot)(x) \;=\; \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(y) g(t, x-y) \mathrm{d}y\,,$$

tedy

$$u(t,x) \;=\; \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(y) \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}\right) \mathrm{d}y.$$

Při označení

$$G(x,\xi,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}} \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}\right)$$

lze řešení úlohy (2.3), (2.4) zapsat jako

$$u(t,x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) G(x,\xi,t) \mathrm{d}\xi.$$

Na závěr ještě poznamenejme, že řešení počáteční úlohy s posunutým počátkem

$$\begin{aligned} u_t(t,x) &= a^2 u_{xx}(t,x), && (t,x) \in (\sigma,\infty) \times (-\infty,\infty), \\ u(\sigma,x) &= \varphi(x), && x \in (-\infty,\infty), \end{aligned}$$

kde $\sigma \in \mathbb{R}$, je

$$u(t,x) \;=\; \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 (t-\sigma)}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(y) \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4a^2 (t-\sigma)}\right) \mathrm{d}y = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) G(x,\xi,t-\sigma) \mathrm{d}\xi.$$

2.1.2 Řešení počáteční úlohy pro nehomogenní parabolickou rovnici ve dvou nezávisle proměnných

Nejprve uvažujme úlohu s homogenní počáteční podmínkou:

$$\begin{aligned} u_t(t,x) &= a^2 u_{xx}(t,x) + f(t,x), && (t,x) \in (0,\infty) \times (-\infty,\infty), && (2.7) \\ u(0,x) &= 0, && x \in (-\infty,\infty). && (2.8) \end{aligned}$$

Řešení budeme podle Duhamelova principu hledat ve tvaru $u(t,x) = \int\limits_0^t w(t,x,\sigma)\mathrm{d}\sigma$. Pak je počáteční podmínka (2.8) splněna. Dále platí

$$u_t(t,x) \;=\; w(t,x,t) + \int\limits_0^t w_t(t,x,\sigma)\mathrm{d}\sigma, \qquad u_{xx}(t,x) \;=\; \int\limits_0^t w_{xx}(t,x,\sigma)\mathrm{d}\sigma.$$

Aby byla splněna rovnice (2.7), musí platit

$$0 \;=\; u_t(t,x) - a^2u_{xx}(t,x) - f(t,x) \;=\; w(t,x,t) + \int\limits_0^t \big(w_t(t,x,\sigma) - a^2 w_{xx}(t,x,\sigma)\big)\,\mathrm{d}\sigma - f(t,x)$$

pro všechna $(t,x) \in (0,\infty)\times(-\infty,\infty)$. Tato rovnost bude splněna zejména tehdy, když pro každé $\sigma \in (0,\infty)$ bude funkce w řešením úlohy

$$\begin{aligned} w_t(t,x,\sigma) &= a^2 w_{xx}(t,x,\sigma), && (t,x) \in (\sigma,\infty)\times(-\infty,\infty),\\ w(\sigma,x,\sigma) &= f(\sigma,x), && x \in (-\infty,\infty). \end{aligned}$$

Avšak řešení této úlohy je podle 2.1.1 dáno vzorcem

$$w(t,x,\sigma) \;=\; \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\sigma,\xi)G(x,\xi,t-\sigma)\mathrm{d}\xi.$$

To znamená, že řešení úlohy (2.7), (2.8) je

$$u(t,x) \;=\; \int\limits_0^t \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\sigma,\xi)G(x,\xi,t-\sigma)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\sigma.$$

Řešení obecné počáteční úlohy pro parabolickou rovnici ve dvou nezávisle proměnných (2.7), (2.4) je součtem řešení úloh (2.3), (2.4) a (2.7), (2.8), tj.

$$u(t,x) \;=\; \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi)G(x,\xi,t)\mathrm{d}\xi + \int\limits_0^t \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\sigma,\xi)G(x,\xi,t-\sigma)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\sigma. \tag{2.9}$$

2.1.3 Počáteční úloha pro obecnou parabolickou lineární rovnici s konstantními koeficienty (rovnice reakce-advekce-difúze)

$$u_t(t,x) \;=\; a^2u_{xx}(t,x) + bu_x(t,x) + cu(t,x) + f(t,x), \qquad (t,x) \in (0,\infty)\times(-\infty,\infty), \tag{2.10}$$

$$u(0,x) \;=\; \varphi(x), \qquad x \in (-\infty,\infty), \tag{2.11}$$

Analogicky jako v 1.3.6 zavedeme novou neznámou funkci $v = v(t,x)$ vztahem

$$u(t,x) = \mathrm{e}^{\lambda t + \mu x} v(t,x), \tag{2.12}$$

kde λ a μ jsou zatím neurčené konstanty. Pak

$$\begin{aligned} u_t &= (\lambda v + v_t)\mathrm{e}^{\lambda t+\mu x},\\ u_x &= (\mu v + v_x)\mathrm{e}^{\lambda t+\mu x},\\ u_{xx} &= (\mu^2 v + 2\mu v_x + v_{xx})\mathrm{e}^{\lambda t+\mu x}. \end{aligned}$$

Tyto výrazy dosadíme do rovnice (2.10) a výslednou rovnost vynásobíme výrazem $\mathrm{e}^{-\lambda t-\mu x}$. Dostaneme

$$\lambda v + v_t \;=\; a^2\mu^2 v + 2a^2\mu v_x + a^2 v_{xx} + b\mu v + bv_x + cv + f(t,x)\mathrm{e}^{-\lambda t-\mu x},$$

tj.

$$v_t \;=\; a^2 v_{xx} + (2a^2\mu + b)v_x + (a^2\mu^2 + b\mu + c - \lambda)v + f(t,x)\mathrm{e}^{-\lambda t - \mu x}.$$

Nyní položíme

$$\mu = -\frac{b}{2a^2}, \qquad \lambda = c - \frac{b^2}{4a^2}$$

a dosazením do předchozí rovnosti dostaneme rovnici

$$v_t(t,x) \;=\; a^2 v_{xx}(t,x) + f(t,x)\exp\left(\frac{b^2-4a^2c}{4a^2}t + \frac{b}{2a^2}x\right)$$

pro neznámou funkci v. Ta podle (2.11) a (2.12) má splňovat počáteční podmínku

$$v(0,x) \;=\; \varphi(x)\exp\left(\frac{b}{2a^2}x\right).$$

Funkce v je tedy podle (2.9) dána formulí

$$v(t,x) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\exp\left(\frac{b}{2a^2}\xi\right)G(x,\xi,t)\mathrm{d}\xi + \int_0^t\int_{-\infty}^{\infty} f(\sigma,\xi)\exp\left(\frac{b^2-4a^2c}{4a^2}\sigma + \frac{b}{2a^2}\xi\right)G(x,\xi,t-\sigma)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\sigma.$$

Podle transformačního vztahu (2.12) je řešení úlohy (2.10), (2.11) $\exp\left(\frac{4a^2c-b^2}{4a^2}t - \frac{b}{2a^2}x\right)$-násobkem funkce v. Označíme-li tedy

$$\tilde{G}(x,\xi,t;a,b,c) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}}\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t} - \frac{b}{2a^2}(x-\xi) + \frac{4a^2c-b^2}{4a^2}t\right),$$

můžeme řešení úlohy (2.10), (2.11) zapsat ve tvaru

$$u(t,x) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\tilde{G}(x,\xi,t;a,b,c)\mathrm{d}\xi + \int_0^t\int_{-\infty}^{\infty} f(\sigma,\xi)\tilde{G}(x,\xi,t-\sigma;a,b,c)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\sigma.$$

2.1.4 Řešení počáteční úlohy pro nehomogenní parabolickou rovnici ve dvou nezávisle proměnných s jednou okrajovou podmínkou

Nejprve uvažujme úlohu s homogenní okrajovou podmínkou

$$u_t(t,x) \;=\; a^2 u_{xx}(t,x) + f(t,x), \qquad (t,x)\in(0,\infty)\times(0,\infty), \tag{2.13}$$

$$u(0,x) \;=\; \varphi(x), \qquad x\in(0,\infty), \tag{2.14}$$

$$u(t,0) \;=\; 0, \qquad t\in(0,\infty). \tag{2.15}$$

Nechť funkce $\tilde{f}(t,\cdot)$ a $\tilde{\varphi}$ jsou lichým rozšířením funkcí $f(t,\cdot)$ a φ, tj.

$$\tilde{f}(t,x) = f(t,|x|)\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} f(t,x), & x>0\\ 0, & x=0\\ -f(t,-x), & x<0, \end{cases} \qquad \tilde{\varphi}(x) = \varphi(|x|)\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x>0\\ 0, & x=0\\ -\varphi(-x), & x<0 \end{cases}$$

a funkce v je řešením úlohy

$$v_t(t,x) \;=\; a^2 v_{xx}(t,x) + \tilde{f}(t,x), \qquad (t,x)\in(0,\infty)\times(-\infty,\infty),$$

$$v(0,x) \;=\; \tilde{\varphi}(x), \qquad x\in(-\infty,\infty);$$

sr. 2.1.2. Funkce v je dána formulí (2.9), v níž místo obecných funkcí φ, $f(t,\cdot)$ jsou liché funkce $\tilde{\varphi}$, $\tilde{f}(t,\cdot)$; funkce $G(0,\,\cdot\,,t)$ je sudá. To znamená, že funkce $v(t,\cdot)$ je lichá takže $v(t,0)=0$. Funkce v tedy splňuje homogenní okrajovou podmínku (2.15). Navíc samozřejmě splňuje rovnici (2.13) a podmínku (2.14). Je tedy řešením úlohy (2.13), (2.14), (2.15). Pro libovolnou funkci ψ definovanou na intervalu $[0,\infty)$ platí

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(|\xi|)\,\mathrm{sgn}(\xi) G(x,\xi,\tau)\mathrm{d}\xi = -\int_{-\infty}^{0} \psi(-\xi) G(x,\xi,\tau)\mathrm{d}\xi + \int_{0}^{\infty} \psi(\xi) G(x,\xi,\tau)\mathrm{d}\xi =$$

$$= \int_{\infty}^{0} \psi(\eta) G(x,-\eta,\tau)\mathrm{d}\eta + \int_{0}^{\infty} \psi(\xi) G(x,\xi,\tau)\mathrm{d}\xi = \int_{0}^{\infty} \psi(\xi)\big(G(x,\xi,\tau) - G(x,-\xi,\tau)\big)\mathrm{d}\xi.$$

Dále je

$$G(x,\xi,\tau) - G(x,-\xi,\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}}\left[\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}\right) - \exp\left(-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}\right)\right] =$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}} \exp\left(-\frac{x^2+\xi^2}{4a^2 t}\right)\left[\exp\frac{x\xi}{2a^2 t} - \exp\frac{-x\xi}{2a^2 t}\right] = \frac{1}{\sqrt{\pi a^2 t}} \exp\left(-\frac{x^2+\xi^2}{4a^2 t}\right) \mathrm{sh}\,\frac{x\xi}{2a^2 t},$$

kde sh označuje hyperbolický sinus. Nyní označíme

$$G_D(x,\xi,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi a^2 t}} \exp\left(-\frac{x^2+\xi^2}{4a^2 t}\right) \mathrm{sh}\,\frac{x\xi}{2a^2 t}$$

a řešení úlohy (2.13), (2.14), (2.15) zapíšeme ve tvaru

$$u(t,x) = \int_{0}^{\infty} \varphi(\xi) G_D(x,\xi,t)\mathrm{d}\xi + \int_{0}^{t}\int_{0}^{\infty} f(\sigma,\xi) G_D(x,\xi,t-\sigma)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\sigma.$$

Homogenní okrajovou podmínku (2.15) dále nahradíme podmínkou nehomogenní

$$u(t,0) \;=\; \mu(t), \qquad t\in(0,\infty) \tag{2.16}$$

a o funkci μ budeme předpokládat, že je diferencovatelná. Řešení úlohy (2.13), (2.14), (2.16) budeme hledat ve tvaru

$$u(t,x) = U(t,x) + v(t,x),$$

kde funkce U splňuje okrajovou podmínku (2.16); k tomu stačí volit $U(t,x) = \mu(t)$. Pak platí

$$\begin{aligned} \mu'(t) + v_t(t,x) &= a^2 v_{xx}(t,x) + f(t,x),\\ \mu(0) + v(0,x) &= \varphi(x),\\ \mu(t) + v(t,0) &= \mu(t) \end{aligned}$$

a to znamená, že funkce v je řešením úlohy

$$\begin{aligned} v_t(t,x) &= a^2 v_{xx}(t,x) + f(t,x) - \mu'(t), && (t,x)\in(0,\infty)\times(0,\infty),\\ v(0,x) &= \varphi(x) - \mu(0), && x\in(0,\infty),\\ v(t,0) &= 0, && t\in(0,\infty), \end{aligned}$$

což je úloha stejného typu jako (2.13), (2.14), (2.15).

2.2 Laplaceova transformace

Buď M množina reálných funkcí definovaných na intervalu $(0,\infty)$ takových, že integrál $\int_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t$ konverguje a $\lim_{t\to\infty} f(t)\mathrm{e}^{-pt} = 0$ pro všechna $p > 0$. *Laplaceova transformace* $\mathcal{L}$ převádí reálnou funkci $f\in M$ na reálnou funkci $\mathcal{L}f$ definovanou na intervalu $(0,\infty)$ vztahem

$$\mathcal{L}f(p) \;=\; \int_{0}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t.$$

$f(t)$	$\mathcal{L}f(p)=\int\limits_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t$	$f(t)$	$\mathcal{L}f(p)=\int\limits_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t$
1	$\dfrac{1}{p}$	$t\sin\omega t$	$\dfrac{2\omega p}{(p^2+\omega^2)^2}$
t	$\dfrac{1}{p^2}$	$t\cos\omega t$	$\dfrac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$
$t^n,\ n=1,2,\dots$	$\dfrac{n!}{p^{n+1}}$	$\mathrm{e}^{at}\sin\omega t$	$\dfrac{\omega}{(p-a)^2+\omega^2}$
$t^a,\ a>-1$	$\dfrac{\Gamma(a+1)}{p^{a+1}}$	$\mathrm{e}^{at}\cos\omega t$	$\dfrac{p-a}{(p-a)^2+\omega^2}$
e^{at}	$\dfrac{1}{p-a}$	$\sin^2\omega t$	$\dfrac{2\omega^2}{p(p^2+4\omega^2)}$
$t\mathrm{e}^{at}$	$\dfrac{1}{(p-a)^2}$	$\cos^2\omega t$	$\dfrac{p^2+2\omega^2}{p(p^2+4\omega^2)}$
$t^n\mathrm{e}^{at},\ n=1,2,\dots$	$\dfrac{n!}{(p-a)^{n+1}}$	$\operatorname{sh} at$	$\dfrac{a}{p^2-a^2}$
$t^\nu\mathrm{e}^{at},\ \nu>-1$	$\dfrac{\Gamma(\nu+1)}{(p-a)^{\nu+1}}$	$\operatorname{ch} at$	$\dfrac{p}{p^2-a^2}$
$\sin\omega t$	$\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$	$t\operatorname{sh} at$	$\dfrac{2ap}{(p^2-a^2)^2}$
$\cos\omega t$	$\dfrac{p}{p^2+\omega^2}$	$t\operatorname{ch} at$	$\dfrac{p^2+a^2}{(p^2-a^2)^2}$
$\dfrac{\mathrm{e}^{-a/t}}{\sqrt{t^3}},\ a>0$	$\sqrt{\dfrac{\pi}{a}}\,\mathrm{e}^{-2\sqrt{ap}}$	$J_\nu(at),\ \nu>-1$	$\dfrac{\left(\sqrt{p^2+a^2}-p^\nu\right)^\nu}{a^\nu\sqrt{p^2+a^2}}$

Tabulka 2.1: **„Operátorový slovník“ pro Laplaceovu transformaci**

Z uvedeného definičního vztahu plyne, že Laplaceův obraz funkce $f\in M$ je funkcí ohraničenou a že Laplaceova transformace je lineární, tj.

$$\mathcal{L}(c_1f_1+c_2f_2)(p)=c_1\mathcal{L}f_1(p)+c_2\mathcal{L}f_2(p).$$

Obrazy některých funkcí v Laplaceově transformaci jsou uvedeny v tabulce 2.1.

Vypočítáme Laplaceův obraz derivace funkce:

$$\mathcal{L}(f')(p) = \int\limits_0^\infty f'(t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t = \left[f(t)\mathrm{e}^{-pt}\right]_{t=0}^\infty + p\int\limits_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t = -\lim_{t\to0+} f(t)+p\mathcal{L}f(p).$$

Při označení $f(0+)=\lim\limits_{t\to0+} f(t)$ tedy platí

$$\mathcal{L}(f')(p) = p\mathcal{L}f(p)-f(0+). \tag{2.17}$$

2.2.1 Řešení úlohy pro homogenní parabolickou rovnici ve dvou nezávisle proměnných s homogenní počáteční a jednou okrajovou podmínkou

$$u_t(t,x) = a^2u_{xx}(t,x), \qquad (t,x)\in(0,\infty)\times(0,\infty), \tag{2.18}$$
$$u(0,x) = 0, \qquad x\in(0,\infty), \tag{2.19}$$
$$u(t,0) = \mu(t), \qquad t\in(0,\infty). \tag{2.20}$$

Na rovnici (2.18) aplikujeme Laplaceovu transformaci (funkci u považujeme za funkci nezávisle proměnné t a x považujeme za parametr). S využitím (2.17) a (2.19) dostaneme

$$p\mathcal{L}u(p,x) = a^2\mathcal{L}u_{xx}(p,x),$$

což je obyčejná lineární rovnice druhého řádu pro neznámou funkci $\mathcal{L}u$; nyní roli parametru hraje p. Fundamentální systém řešení této rovnice je tvořen funkcemi

$$\mathrm{e}^{-\sqrt{\frac{p}{a^2}}\,x}, \qquad \mathrm{e}^{\sqrt{\frac{p}{a^2}}\,x}.$$

Pouze první z nich je ohraničená. Obecné řešení transformované rovnice tedy je

$$\mathcal{L}u(p,x) \;=\; C(p)\mathrm{e}^{-\sqrt{\frac{p}{a^2}}\,x}.$$

Aby byla splněna podmínka (2.20), musí být $C(p) = \mathcal{L}\mu(p)$. Laplaceův obraz řešení úlohy (2.18) (2.19) (2.20) tedy je

$$\mathcal{L}u(p,x) \;=\; \mathrm{e}^{-\sqrt{\frac{p}{a^2}}\,x}\mathcal{L}\mu(p).$$

Cvičení

Řešte úlohu

1) $u_t = a^2 u_{xx}$, $t > 0$, $x > 0$
$u(0,x) = T$, $x > 0$; $\quad u(t,0) = 0$, $t > 0$

2) $u_t = a^2 u_{xx}$, $t > 0$, $x > 0$
$u(0,x) = 0$, $x > 0$; $\quad u(t,0) = K$, $t > 0$

3) $u_t = a^2 u_{xx}$, $t > 0$, $x > 0$
$u(0,x) = 0$, $x > 0$; $\quad u(t,0) = A\delta(t)$, $t > 0$

Výsledky: 1) $T\Phi\left(\dfrac{x}{2\sqrt{a^2 t}}\right)$ **2)** $K\left(1 - \Phi\left(\dfrac{x}{2\sqrt{a^2 t}}\right)\right)$, přitom $\Phi(z) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^z \mathrm{e}^{-\xi^2}\mathrm{d}\xi$ je integrál chyb
3) $A\dfrac{x}{2\sqrt{\pi a^2 t^3}}\mathrm{e}^{-x^2/(4a^2 t)}$

Kapitola 3

Metoda separace proměnných (Fourierova)

3.1 Hyperbolické rovnice

3.1.1 Homogenní hyperbolická rovnice ve dvou proměnných s obecnými počátečními a homogenními okrajovými podmínkami

$$
\begin{aligned}
u_{tt}(t,x) &= a^2 u_{xx}(t,x)\,, && (t,x) \in (0,\infty)\times(0,\ell)\,, && (3.1)\\
u(0,x) = \varphi(x)\,, \quad u_t(0,x) &= \psi(x)\,, && x \in (0,\ell)\,, && (3.2)\\
\alpha_0 u(t,0) + \beta_0 u_x(t,0) = 0 &= \alpha_1 u(t,\ell) + \beta_1 u_x(t,\ell)\,, && t \in (0,\infty)\,, && (3.3)
\end{aligned}
$$

kde $a > 0$, φ, ψ jsou spojité funkce splňující okrajové podmínky

$$\alpha_0\varphi(0) + \beta_0\varphi_x(0) = 0 = \alpha_1\varphi(\ell) + \beta_1\varphi_x(\ell)\,, \qquad \alpha_0\psi(0) + \beta_0\psi_x(0) = 0 = \alpha_1\psi(\ell) + \beta_1\psi_x(\ell)\,.$$

Řešení úlohy budeme hledat ve tvaru součinu, ve kterém jeden činitel závisí pouze na t a druhý pouze na x, tedy

$$u(t,x) = T(t)X(x)\,.$$

Pak je $u_{tt} = T''X$, $u_{xx} = TX''$ a tedy $T''X = a^2TX''$, po úpravě

$$\frac{1}{a^2}\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}\,.$$

Levá strana poslední rovnosti závisí pouze na t, pravá pouze na x. To znamený, že tyto výrazy na nezávisle proměnných nezávisí, tedy

$$\frac{1}{a^2}\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda\,.$$

Odtud dostaneme

$$T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0\,, \tag{3.4}$$

$$-X''(x) = \lambda X(x)\,. \tag{3.5}$$

K tomu, aby funkce $u = TX$ splňovala okrajové podmínky (3.3) stačí, aby tyto podmínky splňovala funkce X, tedy

$$\alpha_0 X(0) + \beta_0 X'(0) = 0 = \alpha_1 X(\ell) + \beta_1 X'(\ell)\,. \tag{3.6}$$

Rovnice (3.5) s okrajovou podmínkou (3.6) je Sturmova-Liouvilleova úloha (sr. B.2.2). Existuje tedy posloupnost vlastních čísel $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ a posloupnost vlastních funkcí $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$, že

$$0 \le \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots\,, \qquad \lim_{n\to\infty}\lambda_n = \infty$$

α_0	β_0	α_1	β_1	λ_n	$v_n(x)$	$\|v_n\|^2$
1	0	1	0	$\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2$	$\sin\frac{n\pi}{\ell}x$	$\frac{\ell}{2}$
1	0	0	1	$\left(\frac{(2n+1)\pi}{2\ell}\right)^2$	$\sin\frac{(2n+1)\pi}{2\ell}x$	$\frac{\ell}{2}$
0	1	1	0	$\left(\frac{(2n+1)\pi}{2\ell}\right)^2$	$\cos\frac{(2n+1)\pi}{2\ell}x$	$\frac{\ell}{2}$
0	1	0	1	$0,\quad \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2$	$1,\quad \cos\frac{n\pi}{\ell}x$	$\ell,\quad \frac{\ell}{2}$
1	0	h	1	kladné kořeny rovnice $\sqrt{\lambda} = -h\,\mathrm{tg}\left(\sqrt{\lambda}\,\ell\right)$	$\sin\sqrt{\lambda_n}\,x$	$\frac{\ell}{2} + \frac{h}{2(h^2+\lambda_n)}$
0	1	h	1	kladné kořeny rovnice $h = \sqrt{\lambda}\ \mathrm{tg}\left(\sqrt{\lambda}\,\ell\right)$	$\cos\sqrt{\lambda_n}\,x$	$\frac{\ell}{2} + \frac{h}{2(h^2+\lambda_n)}$
$-h$	1	h	1	kladné kořeny rovnice $\frac{\sqrt{\lambda}}{h} - \frac{h}{\sqrt{\lambda}} = 2\,\mathrm{cotg}\left(\sqrt{\lambda}\,\ell\right)$	$\cos\sqrt{\lambda_n}\,x + \frac{h}{\sqrt{\lambda_n}}\sin\sqrt{\lambda_n}\,x$	$\frac{\ell}{2} + \frac{h^2\ell+2h}{2\lambda_n}$

Tabulka 3.1: **Vlastní hodnoty a vlastní funkce úlohy** (3.5), (3.6) **pro speciální tvary okrajových podmínek**

a Fourierova řada každé funkce splňující podmínky (3.6) stejnoměrně k této funkci konverguje. Některá vlastní čísla a vlastní funkce úlohy (3.5), (3.6) jsou uvedeny v tabulce 3.1.

Řešení rovnice (3.4), ve které klademe $\lambda = \lambda_n$ je

$$T_n(t) \;=\; A_n\cos\sqrt{\lambda_n}\,at + B_n\sin\sqrt{\lambda_n}\,at\,.$$

Odtud plyne, že každá z funkcí

$$u_n(t,x) \;=\; \left(A_n\cos\sqrt{\lambda_n}\,at + B_n\sin\sqrt{\lambda_n}\,at\right)v_n(x)$$

je řešením rovnice (3.1) s okrajovými podmínkami (3.3). Tedy také jejich lineární kombinace, tj. funkce

$$u(t,x) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\sqrt{\lambda_n}\,at + B_n\sin\sqrt{\lambda_n}\,at\right)v_n(x) \tag{3.7}$$

je řešením rovnice (3.1) s okrajovými podmínkami (3.3). Aby byly splněny počáteční podmínky (3.2), musí platit

$$u(0,x) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty}A_nv_n(x) \;=\; \varphi(x)\,, \qquad u_t(0,x) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty}B_n\sqrt{\lambda_n}\,av_n(x) \;=\; \psi(x)\,,$$

což znamená, že A_n a $B_n\lambda_n$ jsou Fourierovy koeficienty funkcí φ a ψ vzhledem k ortogonálnímu systému $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$, tedy

$$A_n \;=\; \frac{1}{\|v_n\|^2}\int_0^{\ell}\varphi(\xi)v_n(\xi)\mathrm{d}\xi\,,\quad B_n \;=\; \frac{1}{a\sqrt{\lambda_n}\;\|v_n\|^2}\int_0^{\ell}\psi(\xi)v_n(\xi)\mathrm{d}\xi\,,\qquad \text{kde } \|v_n\|^2 \;=\; \int_0^{\ell}(v_n(\xi))^2\mathrm{d}\xi\,. \tag{3.8}$$

Řešení úlohy (3.1), (3.2), (3.3) je tedy dáno řadou (3.7), jejíž koeficienty jsou určeny formulemi (3.8), tj.

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\ell}\left(\varphi(\xi)\cos\sqrt{\lambda_n}\,at + \frac{1}{a\sqrt{\lambda_n}}\psi(\xi)\sin\sqrt{\lambda_n}\,at\right)v_n(\xi)\mathrm{d}\xi\,\frac{v_n(x)}{\|v_n\|^2} = \\ &= \int_0^{\ell}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\varphi(\xi)\frac{1}{a}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\sin\sqrt{\lambda_n}\,at}{a\sqrt{\lambda_n}} + \psi(\xi)\frac{\sin\sqrt{\lambda_n}\,at}{a\sqrt{\lambda_n}}\right)\frac{v_n(\xi)v_n(x)}{\|v_n\|^2}\mathrm{d}\xi. \end{aligned}$$

Při označení

$$G(x,\xi,\tau) \;=\; \frac{1}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin a\sqrt{\lambda_n}\,\tau}{\sqrt{\lambda_n}}\;\frac{v_n(x)v_n(\xi)}{\|v_n\|^2} \tag{3.9}$$

lze řešení úlohy (3.1), (3.2), (3.3) zapsat ve tvaru

$$u(t,x) = \int_0^{\ell}\varphi(\xi)\frac{\partial}{\partial t}G(x,\xi,t)\,\mathrm{d}\xi + \int_0^{\ell}\psi(\xi)G(x,\xi,t)\mathrm{d}\xi.$$

3.1.2 Nehomogenní hyperbolická rovnice ve dvou nezávisle proměnných s homogenními počátečními i okrajovými podmínkami

$$\begin{aligned} u_{tt}(t,x) &= a^2u_{xx}(t,x) + f(t,x)\,, && (t,x)\in(0,\infty)\times(0,\ell)\,, && (3.10)\\ u(0,x) &= 0\,,\quad u_t(0,x) \;=\; 0\,, && x\in(0,\ell)\,, && (3.11)\\ \alpha_0u(t,0)+\beta_0u_x(t,0) &= 0 \;=\; \alpha_1u(t,\ell)+\beta_1u_x(t,\ell)\,, && t\in(0,\infty)\,, && (3.12) \end{aligned}$$

kde f je po částech spojitá funkce.

Nechť $\lambda_1,\lambda_2,\ \ldots$ jsou vlastní čísla a $v_1 = v_1(x),\ v_2 = v_2(x),\ \ldots$ jsou vlastní funkce Sturmovy-Liouvilleovy úlohy (3.5), (3.6). Funkci $f(t,\cdot)$ vyjádříme jako Fourierovu řadu vzhledem k systému funkcí $v_1,\ v_2,\ \ldots$:

$$f(t,x) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty}F_n(t)v_n(x)\,,\quad \text{kde } F_n(t) = \frac{1}{\|v_n\|^2}\int_0^{\ell}f(t,\xi)v_n(\xi)\mathrm{d}\xi\,.$$

Analogicky jako v metodě variace konstant pro obyčejné lineární rovnice (viz např. Ráb M.: Metody řešení obyčejných diferenciálních rovnic, MU 1998, str. 67) budeme řešení úlohy (3.10), (3.11), (3.12) hledat ve tvaru

$$u(t,x) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty}C_n(t)v_n(x)\,.$$

Tato funkce splňuje okrajovou podmínku (3.12). Dále

$$u_{tt}(t,x) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty}C_n''(t)v_n(x)\,,\qquad u_{xx}(t,x) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty}C_n(t)v_n''(x) \;=\; -\sum_{n=1}^{\infty}C_n(t)\lambda_nv_n(x)\,,$$

neboť v_n splňuje (3.5). Aby byly splněny také (3.10) a (3.11), musí platit

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n''(t)+a^2\lambda_nC_n(t)\right)v_n(x) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty}F_n(t)v_n(x)\,,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n(0)v_n(x) \;=\; 0\,, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} C_n'(0)v_n(x) \;=\; 0\,.$$

To znamená, že funkce $C_n = C_n(t)$ jsou řešením Cauchyovy úlohy pro obyčejnou diferenciální rovnici

$$C_n''(t) + a^2\lambda_n C_n(t) \;=\; F_n(t)\,,$$
$$C_n(0) \;=\; C_n'(0) \;=\; 0\,.$$

Tuto úlohu lze vyřešit např. metodou variace konstant. Její řešení je

$$C_n(t) \;=\; \frac{1}{a\sqrt{\lambda_n}} \int_0^t F_n(\sigma) \sin a\sqrt{\lambda_n}\,(t-\sigma)\mathrm{d}\sigma\,,$$

po dosazení za F_n

$$C_n(t) \;=\; \frac{1}{a\sqrt{\lambda_n}\,\|v_n\|^2} \int_0^t \int_0^\ell f(\sigma,\xi)v_n(\xi) \sin a\sqrt{\lambda_n}\,(t-\sigma)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\sigma\,.$$

Řešení úlohy (3.10), (3.11), (3.12) tedy je

$$u(t,x) \;=\; \frac{1}{a}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}\,\|v_n\|^2} \left(\int_0^t \int_0^\ell f(\sigma,\xi)v_n(\xi) \sin a\sqrt{\lambda_n}\,(t-\sigma)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\sigma \right) v_n(x)\,,$$

což lze při označení (3.9) zapsat ve tvaru

$$u(t,x) \;=\; \int_0^t \int_0^\ell f(\sigma,\xi)G(x,\xi,t-\sigma)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\sigma\,.$$

3.1.3 Nehomogenní hyperbolická rovnice ve dvou proměnných s obecnými počátečními a homogenními okrajovými podmínkami

$$u_{tt}(t,x) \;=\; a^2 u_{xx}(t,x) + f(t,x)\,, \qquad (t,x) \in (0,\infty)\times(0,\ell)\,, \tag{3.13}$$
$$u(0,x) \;=\; \varphi(x)\,, \quad u_t(0,x) \;=\; \psi(x)\,, \qquad x \in (0,\ell)\,, \tag{3.14}$$
$$\alpha_0 u(t,0) + \beta_0 u_x(t,0) \;=\; 0 \;=\; \alpha_1 u(t,\ell) + \beta_1 u_x(t,\ell)\,, \qquad t \in (0,\infty)\,, \tag{3.15}$$

Řešení je tvaru $u(t,x) = v(t,x) + w(t,x)$ kde $v(t,x)$ je řešením úlohy (3.1), (3.2), (3.3) a $w(t,x)$ je řešením úlohy (3.10), (3.11), (3.12).

Kmity strun hudebních nástrojů

Kmity homogenní struny délky ℓ upevněné na obou koncích jsou obecně popsány řešením úlohy

$$u_{tt}(t,x) \;=\; \frac{T}{\varrho} u_{xx}(t,x) + f(t,x)\,, \qquad (t,x) \in (0,\infty)\times(0,\ell)\,,$$
$$u(0,x) \;=\; \varphi(x)\,, \quad u_t(0,x) \;=\; \psi(x)\,, \qquad x \in (0,\ell)\,,$$
$$u(t,0) \;=\; 0 \;=\; u(t,\ell)\,, \qquad t \in (0,\infty)\,.$$

Přitom T ... tahová síla,
ϱ ... lineární hustota struny, tj. hmotnost struny je $m = \varrho\ell$,
f ... vnější síla.

Pro tuto úlohu je

$$G(x,\xi,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi}\sqrt{\frac{\varrho}{T}} \sin\frac{n\pi}{\ell}\sqrt{\frac{T}{\varrho}}t \,\sin\frac{n\pi}{\ell}\xi \,\sin\frac{n\pi}{\ell}x.$$

Pro zjednodušení zápisu označíme

$$\omega_n = \frac{n\pi}{\ell}\sqrt{\frac{T}{\varrho}}$$

a dostaneme

$$G(x,\xi,t) = \frac{2}{\ell}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\omega_n}\sin\omega_n t\,\sin\frac{n\pi}{\ell}\xi\,\sin\frac{n\pi}{\ell}x.$$

U *drnkacích nástrojů* (loutna, harfa, cembalo, kytara) je struna rozechvívána tak, že je vychýlena z rovnovážné polohy a v počátečním okamžiku $t = 0$ je puštěna. Vnější síly působící na strunu jsou zanedbatelné. Kmitání struny je tedy modelováno úlohou

$$\begin{aligned}
u_{tt}(t,x) &= \frac{T}{\varrho}u_{xx}(t,x)\,, && (t,x)\in(0,\infty)\times(0,\ell)\,,\\
u(0,x) = \varphi(x)\,,\quad u_t(0,x) &= 0\,, && x\in(0,\ell)\,,\\
u(t,0) = 0 &= u(t,\ell)\,, && t\in(0,\infty)\,.
\end{aligned}$$

Řešení této úlohy je

$$u(t,x) = \int_0^{\ell}\varphi(\xi)\frac{2}{\ell}\sum_{n=1}^{\infty}\cos\omega_n t\,\sin\frac{n\pi}{\ell}\xi\,\sin\frac{n\pi}{\ell}x\mathrm{d}\xi = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\varphi(\xi)\sin\frac{n\pi}{\ell}\xi\mathrm{d}\xi\right)\cos\omega_n t\,\sin\frac{n\pi}{\ell}x,$$

neboli

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos\omega_n t\,\sin\frac{n\pi}{\ell}x,\quad \text{kde } A_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\varphi(\xi)\sin\frac{n\pi}{\ell}\xi\mathrm{d}\xi.$$

U *klavíru* je struna rozechvěna úderem kladívka, tj. struně v rovnovážné poloze je udělena nějaká počáteční rychlost. Na strunu nepůsobí vnější síla. Kmitání struny je tedy modelováno úlohou

$$\begin{aligned}
u_{tt}(t,x) &= \frac{T}{\varrho}u_{xx}(t,x)\,, && (t,x)\in(0,\infty)\times(0,\ell)\,,\\
u(0,x) = 0\,,\quad u_t(0,x) &= \psi(x)\,, && x\in(0,\ell)\,,\\
u(t,0) = 0 &= u(t,\ell)\,, && t\in(0,\infty)\,,
\end{aligned}$$

jejíž řešení je

$$u(t,x) = \int_0^{\ell}\psi(\xi)\frac{2}{\ell}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\omega_n}\sin\omega_n t\,\sin\frac{n\pi}{\ell}\xi\,\sin\frac{n\pi}{\ell}x\mathrm{d}\xi = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{\ell\omega_n}\int_0^{\ell}\varphi(\xi)\sin\frac{n\pi}{\ell}\xi\mathrm{d}\xi\right)\sin\omega_n t\,\sin\frac{n\pi}{\ell}x,$$

neboli

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\omega_n t\,\sin\frac{n\pi}{\ell}x,\quad \text{kde } B_n = \frac{2}{\ell\omega_n}\int_0^{\ell}\psi(\xi)\sin\frac{n\pi}{\ell}\xi\mathrm{d}\xi.$$

U *smyčcových nástrojů* je struna rozechvívána plynulým tahem smyčce, tj. stacionární (v čase neproměnnou) silou. Na počátku je struna v klidu a v rovnovážné poloze. Kmitání struny je tedy modelováno úlohou

$$\begin{aligned}
u_{tt}(t,x) &= \frac{T}{\varrho}u_{xx}(t,x) + f(x)\,, && (t,x)\in(0,\infty)\times(0,\ell)\,,\\
u(0,x) = 0\,,\quad u_t(0,x) &= 0\,, && x\in(0,\ell)\,,\\
u(t,0) = 0 &= u(t,\ell)\,, && t\in(0,\infty)\,,
\end{aligned}$$

jejíž řešení je

$$u(t,x) = \int_0^t \left(\int_0^\ell f(\xi) \frac{2}{\ell} \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\omega_n} \sin \omega_n(t-\sigma) \sin \frac{n\pi}{\ell}\xi \sin \frac{n\pi}{\ell} x \mathrm{d}\xi \right) \mathrm{d}\sigma =$$

$$= \frac{2}{\ell} \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\omega_n} \left(\int_0^t \sin \omega_n(t-\sigma) \mathrm{d}\sigma \right) \left(\int_0^\ell f(\xi) \sin \frac{n\pi}{\ell}\xi \mathrm{d}\xi \right) \sin \frac{n\pi}{\ell} x =$$

$$= \frac{2}{\ell} \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\omega_n^2} (1-\cos \omega_n t) \left(\int_0^\ell f(\xi) \sin \frac{n\pi}{\ell}\xi \mathrm{d}\xi \right) \sin \frac{n\pi}{\ell} x,$$

neboli

$$u(t,x) = \frac{2}{\ell} \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\omega_n^2} \left(\int_0^\ell f(\xi) \sin \frac{n\pi}{\ell}\xi \mathrm{d}\xi \right) \sin \frac{n\pi}{\ell} x - \frac{2}{\ell} \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\omega_n^2} \cos \omega_n t \left(\int_0^\ell f(\xi) \sin \frac{n\pi}{\ell}\xi \mathrm{d}\xi \right) \sin \frac{n\pi}{\ell} x.$$

Z tohoto výsledku vidíme, že řešení úlohy je součtem dvou funkcí. První z nich je funkcí pouze prostorové proměnné x, druhá je funkcí času t i prostorové proměnné x. Řešení úlohy tedy můžeme zapsat ve tvaru

$$u(t,x) = U(x) + w(t,x),$$

kde funkce U vyjadřuje stacionární stav struny (statické prohnutí). Pro funkci U platí $U(0) = 0 = U(\ell)$ a

$$U''(x) = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} \sum_{n=1}^\infty \left(\frac{2\varrho\ell^2}{\ell T (n\pi)^2} \int_0^\ell f(\xi) \sin \frac{n\pi}{\ell}\xi \mathrm{d}\xi \right) \sin \frac{n\pi}{\ell} x =$$

$$= -\frac{\varrho}{T} \sum_{n=1}^\infty \left(\frac{2}{\ell} \int_0^\ell f(\xi) \sin \frac{n\pi}{\ell}\xi \mathrm{d}\xi \right) \sin \frac{n\pi}{\ell} x = -\frac{\varrho}{T} f(x),$$

tj.

$$U''(x) = -\frac{\varrho}{T} f(x).$$

Odtud integrací v mezích od 0 do x dostaneme

$$U'(x) = c - \frac{\varrho}{T} \int_0^x f(\xi) \mathrm{d}\xi,$$

kde $c = U'(0)$. Další integrací (s využitím vztahu $U(0) = 0$) dostaneme

$$U(x) = cx - \frac{\varrho}{T} \int_0^x \left(\int_0^\eta f(\xi) \mathrm{d}\xi \right) \mathrm{d}\eta = cx - \frac{\varrho}{T} \iint\limits_{\substack{0<\eta<x \\ 0<\xi<\eta}} f(\xi) \mathrm{d}\eta \mathrm{d}\xi =$$

$$= cx - \frac{\varrho}{T} \iint\limits_{\substack{0<\xi<x \\ \xi<\eta<x}} f(\xi) \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta = cx - \frac{\varrho}{T} \int_0^x \left(\int_\xi^x f(\xi) \mathrm{d}\eta \right) \mathrm{d}\xi = cx - \frac{\varrho}{T} \int_0^x (x-\xi) f(\xi) \mathrm{d}\xi.$$

Z podmínky $U(\ell) = 0$ nyní dostaneme

$$c = \frac{\varrho}{T\ell} \int_0^\ell (\ell - \xi) f(\xi) \mathrm{d}\xi.$$

Celkem je řešení úlohy popisující strunu smyčcového nástroje dáno výrazem

$$u(t,x)=\frac{\varrho}{T}\left(\frac{x}{\ell}\int\limits_0^\ell(\ell-\xi)f(\xi)\mathrm{d}\xi-\int\limits_0^x(x-\xi)f(\xi)\mathrm{d}\xi\right)-\sum_{n=1}^{\infty}C_n\cos\omega_n t\sin\frac{n\pi}{\ell}x,$$

kde

$$C_n=\frac{2}{\ell\omega_n^2}\int\limits_0^\ell f(\xi)\sin\frac{n\pi}{\ell}\xi\mathrm{d}\xi.$$

Kmitání struny je popsáno poslední sumou.

Ve všech uvažovaných případech hudebních nástrojů jsou kmity struny popsány výrazem

$$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n h_n(t)\sin\frac{\pi}{\ell}x,$$

kde α_n jsou nějaké konstanty a h_k je funkce harmonického pohybu,

$$h_n(t)=\sin(\omega_n t+\phi),\quad \text{kde } \phi=\begin{cases}0, & \text{drnkací nebo smyčcový nástroj,}\\ \frac{1}{2}\pi, & \text{klavír.}\end{cases}$$

Pohyb každého bodu x_0 struny je tedy superpozicí (součtem) stojatých vln, tj. harmonických kmitů s amplitudami

$$\alpha_n\sin\frac{n\pi}{\ell}x_0$$

a frekvencemi ω_n. Frekvence

$$\omega_1=\frac{\pi}{\ell}\sqrt{\frac{T}{\varrho}}$$

je frekvencí základního tónu struny, frekvence svrchních (alikvotních) tónů ω_n, $n=2,3,4,\dots$ jsou násobky základní frekvence.

Označme

$$u_n(t,x)=\alpha_n\sin(\omega_n t+\phi)\,\sin\frac{n\pi}{\ell}x$$

n-tou stojatou vlnu. Její celková energie (součet kinetické a potenciální energie) je dána výrazem

$$E_n=\frac{1}{2}\int\limits_0^\ell\left(\varrho\left(\frac{\partial u_n}{\partial t}(t,x)\right)^2+T\left(\frac{\partial u_n}{\partial x}(t,x)\right)^2\right)\mathrm{d}x.$$

Platí

$$\left(\frac{\partial u_n}{\partial t}(t,x)\right)^2=\left(\alpha_n\omega_n\cos(\omega_n t+\phi)\,\sin\frac{n\pi}{\ell}x\right)^2,\qquad\left(\frac{\partial u_n}{\partial x}(t,x)\right)^2=\left(\alpha_n\frac{n\pi}{\ell}\sin(\omega_n t+\phi)\,\cos\frac{n\pi}{\ell}x\right)^2,$$

$$\int\limits_0^\ell\left(\cos\frac{n\pi}{\ell}x\right)^2\mathrm{d}x=\int\limits_0^\ell\left(\sin\frac{n\pi}{\ell}x\right)^2\mathrm{d}x=\frac{\ell}{2},$$

takže

$$E_n=\frac{\ell}{4}\left(\varrho\big(\alpha_n\omega_n\cos(\omega_n t+\phi)\big)^2+T\left(\alpha_n\frac{n\pi}{\ell}\sin(\omega_n t+\phi)\right)^2\right)=$$
$$=\frac{\ell}{4}\alpha_n^2\left(\varrho\big(\omega_n\cos(\omega_n t+\phi)\big)^2+T\left(\sqrt{\frac{\varrho}{T}}\,\omega_n\sin(\omega_n t+\phi)\right)^2\right)=\frac{\ell}{4}\alpha_n^2\varrho\omega_n^2=\frac{\alpha_n^2}{4}\omega_n^2 m,$$

kde m je hmotnost struny.

3.1.4 Obecná úloha pro nehomogenní hyperbolickou rovnici ve dvou proměnných

$$
\begin{aligned}
u_{tt}(t,x) &= a^2 u_{xx}(t,x) + f(t,x)\,, & (t,x) \in (0,\infty)\times(0,\ell)\,, \quad (3.16)\\
u(0,x) &= \varphi(x)\,, \quad u_t(0,x) = \psi(x)\,, & x \in (0,\ell)\,, \quad (3.17)\\
\alpha_0 u(t,0) + \beta_0 u_x(t,0) &= \mu_0(t)\,,\ \alpha_1 u(t,\ell) + \beta_1 u_x(t,\ell) = \mu_1(t)\,, & t \in (0,\infty)\,, \quad (3.18)
\end{aligned}
$$

Řešení je tvaru $u(t,x) = v(t,x) + U(t,x)$, kde funkce $U = U(t,x)$ splňuje okrajové podmínky (3.18) a funkce $v = v(t,x)$ je řešením úlohy (1.58), (1.59), (1.60). Za funkci $U = U(t,x)$ lze vzít funkci danou předpisem

$$
U(t,x) = \\
= \begin{cases}
\dfrac{\alpha_1\mu_0(t) - \alpha_0\mu_1(t)}{\beta_0\alpha_1 - \beta_1\alpha_0 - \alpha_0\alpha_1\ell}x + \dfrac{\beta_0\mu_1(t) - \beta_1\mu_0(t) - \ell\alpha_1\mu_0(t)}{\beta_0\alpha_1 - \beta_1\alpha_0 - \alpha_0\alpha_1\ell}, & \beta_0\alpha_1 - \beta_1\alpha_0 \neq \alpha_0\alpha_1\ell,\\[2ex]
\dfrac{\beta_0\mu_1(t) - \beta_1\mu_0(t) - \alpha_1\ell\mu_0}{\beta_0\ell(\alpha_1\ell + 2\beta_1)}x^2 + \dfrac{\mu_0(t)}{\beta_0}x, & \beta_0\alpha_1 - \beta_1\alpha_0 = \alpha_0\alpha_1\ell,\ \beta_0\ell(\alpha_1\ell + 2\beta_1) \neq 0,\\[2ex]
\dfrac{\alpha_1\mu_0(t) - \alpha_0\mu_1(t)}{2\alpha_0\alpha_1}\exp\left(\dfrac{\alpha_0}{\beta_0}x\right) + \dfrac{\mu_1(t)}{\alpha_1}, & \beta_0 \neq 0 = \beta_0\alpha_1 + \beta_1\alpha_0,\\[2ex]
\dfrac{\alpha_1\mu_0(t) - \alpha_0\mu_1(t)}{\alpha_0\alpha_1}\exp\left(\dfrac{x}{\ell}\right) + \dfrac{\mu_1(t)}{\alpha_1}, & \beta_0 = 0 = \beta_1 + \alpha_1\ell.
\end{cases} \quad (3.19)
$$

Zejména pro $\alpha_0 = \alpha_1 = 1$, $\beta_0 = \beta_1 = 0$ (Dirichletova úloha) lze položit

$$U(t,x) = \frac{\mu_1(t) - \mu_0(t)}{\ell}x + \mu_0(t),$$

pro $\dfrac{2}{\ell} \neq \alpha_0 = -\alpha_1$, $\beta_0 = \beta_1 = 1$ lze položit

$$U(t,x) = \frac{\mu_1(t) + \mu_0(t)}{2 - \alpha_0\ell}x - \frac{\mu_1(t) - \mu_0(t) + \alpha_0\ell\mu_0(t)}{\alpha_0(2 - \alpha_0\ell)}$$

a pro $\alpha_0 = \alpha_1 = 0$, $\beta_0 = \beta_1 = 1$ (Neumannova úloha) lze položit

$$U(t,x) = \frac{\mu_1(t) - \mu_0(t)}{2\ell}x^2 + \mu_0(t)x.$$

Pokud je možné funkci U volit jako lineární ve druhé proměnné x (tj. pokud $\beta_0\alpha_1 - \beta_1\alpha_0 \neq \alpha_0\alpha_1\ell$), pak je $U_{xx} \equiv 0$.

3.1.5 Hyperbolické rovnice s nehomogenitou tvaru αu_t (tlumené kmity konečné struny)

$$
\begin{aligned}
u_{tt}(t,x) &= a^2 u_{xx}(t,x) - \alpha u_t(t,x)\,, & (t,x) \in (0,\infty)\times(0,\ell)\,, \quad (3.20)\\
u(0,x) &= \varphi(x)\,, \quad u_t(0,x) = \psi(x)\,, & x \in (0,\ell)\,, \quad (3.21)\\
\alpha_0 u(t,0) + \beta_0 u_x(t,0) &= 0 = \alpha_1 u(t,\ell) + \beta_1 u_x(t,\ell)\,, & t \in (0,\infty)\,, \quad (3.22)
\end{aligned}
$$

Zavedeme novou neznámou funkci $w = w(t,x)$ vztahem

$$u(t,x) = \mathrm{e}^{-(\alpha/2)t}w(t,x)$$

(sr. 1.3.6). Pak je

$$u_t(t,x) = \mathrm{e}^{-(\alpha/2)t}\left(w_t(t,x) - \frac{\alpha}{2}w(t,x)\right),$$

$$u_{tt}(t,x) = \mathrm{e}^{-(\alpha/2)t}\left(w_{tt}(t,x) - \alpha w_t(t,x) + \frac{\alpha^2}{4}w(t,x)\right), u_{xx}(t,x) = \mathrm{e}^{-(\alpha/2)t}w_{xx}(t,x).$$

Dosadíme do rovnice (3.20), do podmínky (3.22) a upravíme:

$$w_{tt}(t,x) \;=\; a^2 w_{xx}(t,x) + \frac{\alpha^2}{4} w(t,x)\,, \tag{3.23}$$

$$\alpha_0 w(t,0) + \beta_0 w_x(t,0) \;=\; 0 \;=\; \alpha_1 w(t,\ell) + \beta_1 w_x(t,\ell)\,, \quad t \in (0,\infty)\,, \tag{3.24}$$

Řešení okrajové úlohy (3.23), (3.24) budeme opět hledat ve tvaru $w(t,x) = T(t)X(x)$. Po dosazení do rovnice (3.23) a úpravě dostaneme

$$\frac{T''(t) - \dfrac{\alpha^2}{4} T(t)}{a^2 T(t)} \;=\; \frac{X''(x)}{X(x)}\,.$$

Pravá strana poslední rovnice závisí pouze na x, levá strana závisí pouze na t a to znamená, že výrazy na obou stranách jsou konstantní. Opět je položíme rovny $-\lambda$. Funkce X je opět řešením Sturmovy-Liouvilleovy úlohy (3.5), (3.6) a funkce T je řešením rovnice

$$T''(t) + \left(\lambda a^2 - \frac{\alpha^2}{4}\right) T(t) \;=\; 0\,.$$

Předpokládejme, že $\alpha < 4a^2\lambda_n$ (tlumení je malé). Pak řešení poslední rovnice pro $\lambda = \lambda_n$ je

$$T_n(t) \;=\; A_n \cos\frac{\sqrt{4\lambda_n a^2 - \alpha^2}}{2} t + B_n \sin\frac{\sqrt{4\lambda_n a^2 - \alpha^2}}{2} t\,.$$

Řešení úlohy (3.23), (3.24) tedy je

$$w(t,x) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos\frac{\sqrt{4\lambda_n a^2 - \alpha^2}}{2} t + B_n \sin\frac{\sqrt{4\lambda_n a^2 - \alpha^2}}{2} t \right) v_n(x)\,,$$

kde $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots$ jsou vlastní čísla a $v_1,\ v_2,\ \ldots$ jsou vlastní funkce Sturmovy-Liouvilleovy úlohy (3.5), (3.6). Řešení rovnice (3.20) s okrajovou podmínkou (3.22) je

$$u(t,x) \;=\; \mathrm{e}^{-(\alpha/2)t} \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos\frac{\sqrt{4\lambda_n a^2 - \alpha^2}}{2} t + B_n \sin\frac{\sqrt{4\lambda_n a^2 - \alpha^2}}{2} t \right) v_n(x)\,. \tag{3.25}$$

Platí

$$u(0,x) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} A_n v_n(x)\,.$$

takže ke splnění první z podmínek (3.21) stačí, aby

$$A_n \;=\; \frac{1}{\|v_n\|^2} \int_0^{\ell} \varphi(\xi) v_n(\xi) \mathrm{d}\xi\,. \tag{3.26}$$

Dále

$$\begin{aligned} u_t(t,x) \;=\; & -\frac{\alpha}{2} \mathrm{e}^{-(\alpha/2)t} \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos\frac{\sqrt{4\lambda_n a^2 - \alpha^2}}{2} t + B_n \sin\frac{\sqrt{4\lambda_n a^2 - \alpha^2}}{2} t \right) v_n(x) + \\ & + \mathrm{e}^{-(\alpha/2)t} \sum_{n=1}^{\infty} \left(-A_n \frac{\sqrt{4\lambda_n a^2 - \alpha^2}}{2} \sin\frac{\sqrt{4\lambda_n a^2 - \alpha^2}}{2} t + B_n \frac{\sqrt{4\lambda_n a^2 - \alpha^2}}{2} \cos\frac{\sqrt{4\lambda_n a^2 - \alpha^2}}{2} t \right) v_n(x)\,, \end{aligned}$$

takže

$$u_t(0,x) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \left(B_n \frac{\sqrt{4\lambda_n a^2 - \alpha^2}}{2} - \frac{\alpha}{2} A_n \right) v_n(x)\,.$$

Aby byla splněna druhá z podmínek (3.21) stačí, aby

$$B_n \frac{\sqrt{4\lambda_n a^2 - \alpha^2}}{2} - \frac{\alpha}{2} A_n \; = \; \frac{1}{\|v_n\|^2} \int\limits_0^\ell \psi(\xi) v_n(\xi) \mathrm{d}\xi \,,$$

neboli

$$B_n \; = \; \frac{2}{\sqrt{4\lambda_n a^2 - \alpha^2}\;\|v_n\|^2} \int\limits_0^\ell \Big(\psi(\xi) + \frac{\alpha}{2}\varphi(x)\Big)\, v_n(\xi) \mathrm{d}\xi \,. \tag{3.27}$$

Řešení úlohy (3.20), (3.21), (3.22) je tedy dáno řadou (3.25), kde $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \dots$ jsou vlastní čísla a $v_1,\ v_2,\ \dots$ jsou vlastní funkce Sturmovy-Liouvilleovy úlohy (3.5), (3.6) a koeficienty A_n, B_n jsou dány formulemi (3.26) a (3.27).

3.2 Parabolické rovnice

3.2.1 Parabolická rovnice ve dvou proměnných (vedení tepla v tenké tyči)

Budeme řešit parabolickou rovnici homogenní

$$u_t(t,x) \; = \; a^2 u_{xx}(t,x) \,, \qquad (t,x) \in (0,\infty) \times (0,\ell) \,, \tag{3.28}$$

nebo nehomogenní

$$u_t(t,x) \; = \; a^2 u_{xx}(t,x) + f(t,x) \,, \qquad (t,x) \in (0,\infty) \times (0,\ell) \,, \tag{3.29}$$

s počáteční podmínkou nehomogenní

$$u(0,x) \; = \; \varphi(x) \,, \qquad x \in (0,\ell) \,, \tag{3.30}$$

nebo homogenní

$$u(0,x) \; = \; 0 \,, \qquad x \in (0,\ell) \,, \tag{3.31}$$

a okrajovými podmínkami homogenními

$$\alpha_0 u(t,0) + \beta_0 u_x(t,0) \; = \; 0 \; = \; \alpha_1 u(t,\ell) + \beta_1 u_x(t,\ell) \,, \qquad t \in (0,\infty) \,, \tag{3.32}$$

nebo nehomogenními

$$\alpha_0 u(t,0) + \beta_0 u_x(t,0) \; = \; \mu_0(t) \,, \quad \alpha_1 u(t,\ell) + \beta_1 u_x(t,\ell) \; = \; \mu_1(t) \,, \qquad t \in (0,\infty) \,. \tag{3.33}$$

Přitom předpokládáme, že $a > 0$, funkce φ a f jsou po částech spojité a funkce $\mu_0,\ \mu_1$ jsou diferencovatelné.

Nejdříve budeme řešit úlohu (3.28), (3.30), (3.32). Řešení budeme opět předpokládat ve tvaru

$$u(t,x) = T(t) X(x) \,.$$

Dosazením do (3.28) a (3.32) ukážeme, že funkce $X = X(x)$ je řešením Sturmovy-Liouvilleovy úlohy (3.5), (3.6) a funkce $T = T(t)$ splňuje rovnici

$$T'(t) + a^2 \lambda T(t) \; = \; 0 \,,$$

tedy

$$T(t) \; = \; C \mathrm{e}^{-a^2 \lambda t} \,.$$

Jsou-li $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \dots$ vlastní hodnoty a $v_1,\ v_2,\ \dots$ vlastní funkce úlohy (3.5), (3.6), pak řešení rovnice (3.28) splňující podmínku (3.32) je

$$u(t,x) \; = \; \sum_{n=1}^{\infty} C_n \mathrm{e}^{-a^2 \lambda_n t} v_n(x) \,. \tag{3.34}$$

Aby byla splněna podmínka (3.30), musí platit

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n v_n(x) \; = \; \varphi(x) \,,$$

což znamená, že

$$C_n = \frac{1}{\|v_n\|^2} \int_0^\ell \varphi(\xi) v_n(\xi) \mathrm{d}\xi\,, \quad \text{kde } \|v_n\|^2 = \int_0^\ell (v_n(\xi))^2 \mathrm{d}\xi\,. \tag{3.35}$$

Řešení úlohy (3.28), (3.30), (3.32) je tedy dáno řadou (3.34), jejíž koeficienty jsou dány formulemi (3.35), tedy

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\|v_n\|^2} \left(\int_0^\ell \varphi(\xi) v_n(\xi) \mathrm{d}\xi \right) \mathrm{e}^{-a^2\lambda_n t} v_n(x)\,.$$

Při označení

$$G(x,\xi,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\|v_n\|^2} v_n(x) v_n(\xi) \mathrm{e}^{-a^2\lambda_n t} \tag{3.36}$$

lze řešení zapsat ve tvaru

$$u(t,x) = \int_0^\ell \varphi(\xi) G(x,\xi,t) \mathrm{d}\xi\,.$$

Analogicky jako při metodě variace konstant u obyčejných diferenciálních lineárních nehomogenních rovnic budeme řešení úlohy (3.29), (3.31), (3.32) hledat ve tvaru

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n(t) v_n(x)\,,$$

kde $v_1,\ v_2,\ \ldots$ jsou vlastní funkce Sturmovy-Liouvilleovy úlohy (3.5), (3.6). Pak je

$$u_t(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n'(t) v_n(x)\,, \qquad u_{xx}(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n(t) v_n''(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n C_n(t) v_n(x)\,,$$

neboť funkce v_n je řešením rovnice (3.5) s $\lambda = \lambda_n$. Funkci $f(t,\cdot)$ vyjádříme jako součet Fourierovy řady vzhledem k ortogonálnímu systému funkcí $v_1,\ v_2,\ \ldots$:

$$f(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) v_n(x)\,, \quad \text{kde } F_n(t) = \frac{1}{\|v_n\|^2} \int_0^\ell f(t,\xi) v_n(\xi) \mathrm{d}\xi\,,$$

Dosazením do rovnice (3.29) a podmínky (3.31) dostaneme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(C_n'(t) + a^2 \lambda_n C_n(t) \right) v_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) v_n(x)\,, \quad \sum_{n=1}^{\infty} C_n(0) v_n(x) = 0\,.$$

Přitom λ_n je vlastní hodnota úlohy (3.5), (3.6), jíž přísluší vlastní funkce $v_n,\ n = 1, 2, \ldots$. Funkce C_n jsou tedy řešením Cauchyovy úlohy pro obyčejnou lineární diferenciální rovnici prvního řádu

$$C_n'(t) + a^2 \lambda_n C_n(t) = F_n(t)\,, \qquad C_n(0) = 0\,.$$

Řešení této úlohy je

$$C_n(t) = \mathrm{e}^{-a^2\lambda_n t} \int_0^t F_n(\sigma) \mathrm{e}^{a^2\lambda_n \sigma} \mathrm{d}\sigma\,,$$

po dosazení za F_n dostaneme

$$C_n(t) = \frac{1}{\|v_n\|^2} \int_0^t \int_0^\ell f(\sigma,\xi) v_n(\xi) \mathrm{e}^{-a^2\lambda_n (t-\sigma)} \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\sigma\,.$$

Řešení úlohy (3.29), (3.31), (3.32) je tedy

$$u(t,x) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\|v_n\|^2}\int\limits_0^t\int\limits_0^\ell f(\sigma,\xi)v_n(\xi)\mathrm{e}^{-a^2\lambda_n(t-\sigma)}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\sigma\right)v_n(x)\,.$$

Při označení (3.36) lze řešení zapsat ve tvaru

$$u(t,x) \;=\; \int\limits_0^t\int\limits_0^\ell f(\sigma,\xi)G(x,\xi,t-\sigma)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\sigma\,.$$

Řešení úlohy (3.29), (3.30), (3.32) je tvaru

$$u(t,x) \;=\; v(t,x)+w(t,x)\,,$$

kde $v=v(t,x)$ je řešením úlohy (3.28), (3.30), (3.32) a $w=w(t,x)$ je řešením úlohy (3.29), (3.31), (3.32). Řešení úlohy (3.29), (3.30), (3.32) je tedy

$$u(t,x) \;=\; \int\limits_0^\ell \varphi(\xi)G(x,\xi,t)\mathrm{d}\xi+\int\limits_0^t\int\limits_0^\ell f(\sigma,\xi)G(x,\xi,t-\sigma)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\sigma\,.$$

Řešení úlohy (3.29), (3.30), (3.33) je tvaru

$$u(t,x) \;=\; v(t,x)+U(t,x)\,,$$

kde funkce $U=U(t,x)$ splňuje okrajové podmínky (3.33) a $v=v(t,x)$ je řešením rovnice

$$u_t(t,x) \;=\; a^2u_{xx}(t,x)+f(t,x)-\left(U_t(t,x)-a^2U_{xx}(t,x)\right), \qquad (t,x)\in(0,\infty)\times(0,\ell)$$

s počáteční podmínkou

$$u(0,x) \;=\; \varphi(x)-U(0,x)\,, \qquad x\in(0,\ell)$$

a homogenními okrajovými podmínkami (3.32). Za funkci $U=U(t,x)$ opět stačí vzít (3.19).

Interpretace funkce G**:** Uvažujme úlohu

$$\begin{aligned} u_t(t,x) &= a^2u_{xx}(t,x), && (t,x)\in(0,\infty)\times(0,\ell),\\ u(0,x) &= \varphi(x), && x\in(0,\ell),\\ u(t,0) &= u(t,\ell) \;=\; 0, && t\in(0,\infty). \end{aligned}$$

(Vedení tepla v homogenní tyči, která byla zahřáta na teplotu $\varphi(x)$ a jejíž konce udržujeme na nulové teplotě.) Množství tepla, kterým se teplota tělesa o hmotnosti m změní o Δu, je

$$Q = cm\Delta u,$$

kde c je specifické teplo. Má-li těleso na počátku děje nulovou teplotu a je zahřáto na teplotu u, pak $\Delta u = u$. Je-li tedy tyč v bodě vzdáleném ξ od jejího začátku zahřáta z nulové teploty na teplotu $\varphi(\xi)$, je množství tepla dodaného části tyče o malé délce $\Delta\xi$ ve vzdálenosti ξ od jejího začátku rovno

$$\Delta Q \;=\; c\,(\rho\Delta\xi)\,\varphi(\xi),$$

kde ρ je lineární hustota tyče. Limitním přechodem $\Delta\xi\to 0$ dostaneme $\mathrm{d}Q=c\rho\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi$, takže celkové množství tepla dodaného tyči je

$$Q \;=\; c\rho\int\limits_0^\ell \varphi(\xi)\mathrm{d}\xi.$$

Představme si nyní, že tyč měla nulovou teplotu a v čase $t = 0$ vznikl v bodě $\xi^* \in (0, \ell)$ bodový teplotní impuls, který „zahřál bod ξ^*“ na teplotu u_0, zbytek tyče ponechal na teplotě 0, tj.

$$\varphi(x) = u_0 \delta(x - \xi^*)$$

(δ je Diracova distribuce). Velikost tohoto impulsu byla

$$Q = c\rho \int_0^\ell \varphi(\xi) \mathrm{d}\xi = c\rho u_0 \int_0^\ell \delta(\xi - \xi^*) \mathrm{d}\xi = c\rho u_0.$$

Pak

$$u(t, x) = \int_0^\ell \varphi(\xi) G(x, \xi, t) \mathrm{d}\xi = u_0 \int_0^\ell \delta(x - \xi^*) G(x, \xi, t) \mathrm{d}\xi = u_0 G(x, \xi^*, t) = \frac{Q}{c\rho} G(x, \xi^*, t).$$

Odtud plyne, že $G(x, \xi, t)$ vyjadřuje teplotní účinek okamžitého bodového zdroje tepla mohutnosti $Q = c\rho$ umístěného v bodě ξ intervalu $[0, \ell]$.

3.3 Eliptické rovnice

3.3.1 Laplaceova rovnice ve dvou proměnných s okrajovými podmínkami na obdélníku

Budeme řešit rovnici

$$\Delta u(x, y) \; = \; 0 \, , \qquad (x, y) \in (0, a) \times (0, b) \tag{3.37}$$

s jednou homogenní okrajovou podmínkou

$$\alpha_0 u(0, y) + \beta_0 u_x(0, y) \; = \; 0 \; = \; \alpha_1 u(a, y) + \beta_1 u_x(a, y) \, , \qquad y \in (0, b) \, , \tag{3.38}$$

a jednou nehomogenní okrajovou podmínkou

$$\gamma_0 u(x, 0) + \delta_0 u_y(x, 0) \; = \; \nu_0(x) \, , \quad \gamma_1 u(x, b) + \delta_1 u_y(x, b) \; = \; \nu_1(x) \, , \qquad x \in (0, a) \, . \tag{3.39}$$

Řešení této úlohy budeme hledat ve tvaru součinu výrazů, z nichž jeden závisí pouze na x a druhý pouze na y, tedy

$$u(x, y) \; = \; X(x) Y(y) \, .$$

Pak je $u_{xx} = X''Y$, $u_{yy} = XY''$. Po dosazení do rovnice (3.37) a úpravě dostaneme

$$\frac{X''(x)}{X(x)} \; = \; -\frac{Y''(y)}{Y(y)} \, .$$

Výraz na levé straně nezávisí na y, výraz na pravé straně nezávisí na x a to znamená, že oba výrazy jsou rovny nějaké konstantě, řekněme $-\lambda$:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} \; = \; -\frac{Y''(y)}{Y(y)} \; = \; -\lambda \, .$$

Opět vidíme, že funkce $X = X(x)$ je řešením Sturmovy-Liouvilleovy úlohy (3.5), (3.6). Funkce $Y = Y(y)$ je řešením rovnice

$$Y''(y) - \lambda Y(y) \; = \; 0 \, .$$

Jsou-li $\lambda_1, \ \lambda_2, \ \ldots$ vlastní hodnoty a $v_1, \ v_2, \ \ldots$ odpovídající vlastní funkce úlohy (3.5), (3.6), přičemž $\lambda_1 > 0$, je řešení poslední rovnice s $\lambda = \lambda_n$ tvaru

$$Y(y) \; = \; A_n \mathrm{e}^{\sqrt{\lambda_n}\, y} + B_n \mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda_n}\, y} \, ,$$

a tedy řešení rovnice (3.37) s podmínkou (3.38) je tvaru

$$u(x, y) \; = \; \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \mathrm{e}^{\sqrt{\lambda_n}\, y} + B_n \mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda_n}\, y} \right) v_n(x) \, . \tag{3.40}$$

Aby byla splněna podmínka (3.39), musí platit

$$
\begin{aligned}
\nu_0(x) &= \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\gamma_0(A_n+B_n)+\delta_0\sqrt{\lambda_n}\,(A_n-B_n)\Big)\,v_n(x)\,,\\
\nu_1(x) &= \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\gamma_1\left(A_n\mathrm{e}^{\sqrt{\lambda_n}\,b}+B_n\mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda_n}\,b}\right)+\delta_1\sqrt{\lambda_n}\left(A_n\mathrm{e}^{\sqrt{\lambda_n}\,b}-B_n\mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda_n}\,b}\right)\Big)\,v_n(x)\,,
\end{aligned}
$$

což znamená, že koeficienty A_n, B_n jsou řešením soustavy lineárních rovnic

$$
\begin{aligned}
(\gamma_0+\delta_0\sqrt{\lambda_n}\,)A_n+(\gamma_0-\delta_0\sqrt{\lambda_n}\,)B_n &= \frac{1}{\|v_n\|^2}\int_0^a \nu_0(\eta)v_n(\eta)\mathrm{d}\eta\,,\\
(\gamma_1+\delta_1\sqrt{\lambda_n}\,)\mathrm{e}^{\sqrt{\lambda_n}\,b}A_n+(\gamma_1-\delta_1\sqrt{\lambda_n}\,)\mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda_n}\,b}B_n &= \frac{1}{\|v_n\|^2}\int_0^a \nu_1(\eta)v_n(\eta)\mathrm{d}\eta\,.
\end{aligned}
\tag{3.41}
$$

Řešení úlohy (3.37), (3.38), (3.39) je dáno řadou (3.40), kde $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \dots$ jsou vlastní hodnoty a $v_1,\ v_2,\ \dots$ odpovídající vlastní funkce úlohy (3.5), (3.6), přičemž $\lambda_1 > 0$. Koeficienty A_n, B_n řady (3.40) jsou řešením soustavy algebraických rovnic (3.41). Tato soustava může být řešitelná jednoznačně. Pak dostáváme jediné řešení uvedeného tvaru. Pokud má soustava (3.41) nekonečně mnoho řešení, pak také úloha (3.37), (3.38), (3.39) má nekonečně mnoho řešení. Pokud soustava (3.41) řešení nemá, pak také úloha (3.37), (3.38), (3.39) nemá řešení uvedeného tvaru. (Obecným podmínkám řešitelnosti eliptických rovnic se budeme věnovat v 4.2.)

Řešení rovnice (3.37) s okrajovými podmínkami

$$
\alpha_0u(0,y)+\beta_0u_x(0,y) = \mu_0(y)\,,\quad \alpha_1u(a,y)+\beta_1u_x(a,y) = \mu_1(y)\,,\qquad y\in(0,b)\,, \tag{3.42}
$$

$$
\gamma_0u(x,0)+\delta_0u_y(x,0) = 0 = \gamma_1u(x,b)+\delta_1u_y(x,b)\,,\qquad x\in(0,a)\,, \tag{3.43}
$$

lze hledat analogicky.

Řešení úlohy (3.37), (3.42), (3.39) je tvaru

$$
u(x,y) = v(x,y)+w(x,y)\,,
$$

kde $v = v(x,y)$ je řešení úlohy (3.37), (3.38), (3.39) a $w = w(x,y)$ je řešení úlohy (3.37), (3.42), (3.43).

3.3.2 Laplaceova rovnice ve dvou proměnných s Dirichletovými okrajovými podmínkami na kruhu

$$
\Delta u(x,y) = 0\,,\qquad x^2+y^2<R^2\,, \tag{3.44}
$$

$$
u(x,y) = g(x,y)\,,\qquad x^2+y^2=R^2\,. \tag{3.45}
$$

Předpokládáme, že $R>0$ a funkce g je spojitá.

Provedeme transformaci do polárních souřadnic

$$
x = r\cos\varphi\,,\qquad y = r\sin\varphi\,.
$$

Rovnice (3.44) se transformuje na tvar

$$
u_{rr}(r,\varphi)+\frac{1}{r}u_r(r,\varphi)+\frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi}(r,\varphi) = 0\,. \tag{3.46}
$$

Označme $f(\varphi)=g(R\cos\varphi,R\sin\varphi)$. Z podmínky (3.45) dostaneme

$$
u(R,\varphi) = f(\varphi)\,,\qquad \varphi\in[0,2\pi]\,. \tag{3.47}
$$

Funkce $u=u(r,\varphi)$ musí být 2π-periodická, tedy

$$
u(r,\varphi) = u(r,\varphi+2\pi)\,,\qquad r\in(0,R]\,,\ \varphi\in\mathbb{R}\,. \tag{3.48}
$$

Hodnota funkce $u = u(r,\varphi)$ nemůže pro $r = 0$ záviset na úhlu φ a samozřejmě musí být konečná, tedy

$$u(0,\varphi) \;=\; const \in \mathbb{R}\,, \qquad \varphi \in \mathbb{R}\,. \tag{3.49}$$

Řešení rovnice (3.46) budeme hledat ve tvaru součinu funkcí, z nichž jedna závisí pouze na r a druhá pouze na φ, tedy

$$u(r,\varphi) \;=\; X(r)\Phi(\varphi)\,.$$

Po dosazení do rovnice (3.46) dostaneme

$$X''(r)\Phi(\varphi) + \frac{1}{r}X'(r)\Phi(\varphi) + \frac{1}{r^2}X(r)\Phi''(\varphi) \;=\; 0\,,$$

po vynásobení výrazem $\dfrac{r^2}{X(r)\Phi(\varphi)}$ a jednoduché úpravě

$$r^2\frac{X''(r)}{X(r)} + r\frac{X'(r)}{X(r)} \;=\; -\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)}\,.$$

Výraz na levé straně závisí pouze na proměnné r, výraz na pravé straně pouze na proměnné φ a to znamená, že oba výrazy jsou rovny nějaké konstantě, řekněme λ. Funkce $\Phi = \Phi(\varphi)$ je tedy řešením rovnice

$$\Phi''(\varphi) + \lambda\Phi(\varphi) \;=\; 0 \tag{3.50}$$

a funkce $X = X(r)$ je řešením rovnice

$$r^2X''(r) + rX'(r) - \lambda X(r) \;=\; 0\,. \tag{3.51}$$

Z podmínky (3.48) dostaneme

$$\Phi(\varphi) \;=\; \Phi(\varphi + 2\pi)\,, \tag{3.52}$$

tedy funkce Φ je 2π-periodická. Podle příkladu 2) v B.2 má úloha (3.50), (3.52) netriviální řešení pouze pro hodnoty $\lambda = \lambda_n = n^2,\; n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Toto řešení je

$$\Phi_n(\varphi) \;=\; a_n\cos n\varphi + b_n\sin n\varphi\,, \qquad n = 0,1,2,\ldots\,.$$

Nyní budeme řešit rovnici (3.51) s $\lambda = n^2$. Hledanou funkci označíme X_n a řešíme tedy rovnici

$$r^2X_n''(r) + rX_n'(r) - n^2X_n(r) \;=\; 0\,.$$

Jedná se o Eulerovu rovnici. Zavedeme substituci $s = \ln r$, tedy

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}X_n = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}X_n\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}r} = \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}X_n\,, \qquad \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}X_n = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}X_n\right) = -\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}X_n + \frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}X_n\,,$$

po dosazení

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}X_n - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}X_n + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}X_n - n^2X \;=\; 0$$

a po úpravě

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}X_n - n^2X_n \;=\; 0\,.$$

Řešení této rovnice je

$$X_n(s) \;=\; \begin{cases} c_0 + d_0 s\,, & \text{pro } n = 0 \\ c_n\mathrm{e}^{ns} + d_n\mathrm{e}^{-ns}\,, & \text{pro } n > 0 \end{cases}\,, \qquad \text{tj. } X_n(r) \;=\; \begin{cases} c_0 + d_0\ln r\,, & \text{pro } n = 0 \\ c_nr^n + d_nr^{-n}\,, & \text{pro } n > 0 \end{cases}\,.$$

Kdyby pro nějaké $n \in \{0,1,2,\ldots\}$ bylo $d_n \neq 0$, pak by $\lim\limits_{r\to 0+}|X_n(r)| = \infty$ a nemohla by být splněna podmínka (3.49). Je tedy $d_n = 0$, $n = 0,1,2,\ldots$ a

$$X_n(r) \;=\; c_nr^n\,, \quad n = 0,1,2,\ldots\,.$$

Řešení úlohy (3.46), (3.48), (3.49) je lineární kombinací součinů funkcí $\Phi_n = \Phi_n(\varphi)$ a $X_n = X_n(r)$, tj.

$$u(r,\varphi) \;=\; a_0c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n r^n \left(a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi\right) ,$$

při označení $A_0 = 2a_0c_0,\ A_n = a_nc_n,\ B_n = b_nc_n$ dostaneme

$$u(r,\varphi) \;=\; \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \left(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi\right)$$

Dosadíme do podmínky (3.47):

$$u(R,\varphi) \;=\; \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} R^n \left(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi\right) \;=\; f(\varphi)$$

takže

$$A_n \;=\; \frac{1}{\pi R^n}\int_0^{2\pi} f(\sigma)\cos n\sigma \mathrm{d}\sigma\,, \quad n = 0,1,2,\dots\,, \qquad B_n \;=\; \frac{1}{\pi R^n}\int_0^{2\pi} f(\sigma)\sin n\sigma \mathrm{d}\sigma\,, \quad n = 0,1,2,\dots\,.$$

Celkem je

$$\begin{aligned} u(r,\varphi) \;&=\; \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\sigma)\left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n (\cos n\sigma \cos n\varphi + \sin n\sigma \sin n\varphi)\right)\mathrm{d}\sigma \;= \\ &=\; \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\sigma)\left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n \cos n(\sigma-\varphi)\right)\mathrm{d}\sigma\,. \end{aligned}$$

Výraz $\cos n(\sigma-\varphi)$ je reálnou částí komplexního čísla $\mathrm{e}^{\mathrm{i}n(\sigma-\varphi)}$, tedy

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n \cos n(\sigma-\varphi)$$

je reálnou částí výrazu

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n(\sigma-\varphi)} \;&=\; \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\sigma-\varphi)}}{R}\right)^n \;=\; \frac{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\sigma-\varphi)}}{R}\,\frac{1}{1-\dfrac{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\sigma-\varphi)}}{R}} \;=\; \frac{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\sigma-\varphi)}}{R-r\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\sigma-\varphi)}} \;= \\ &=\; \frac{r(\cos(\sigma-\varphi)+\mathrm{i}\sin(\sigma-\varphi))}{R-r\cos(\sigma-\varphi)-\mathrm{i}r\sin(\sigma-\varphi)} \;= \\ &=\; \frac{r(\cos(\sigma-\varphi)+\mathrm{i}\sin(\sigma-\varphi))(R-r\cos(\sigma-\varphi)+\mathrm{i}r\sin(\sigma-\varphi))}{(R-r\cos(\sigma-\varphi))^2+r^2\sin^2(\sigma-\varphi)}\,. \end{aligned}$$

Odtud dostáváme

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n \cos n(\sigma-\varphi) \;&=\; \frac{1}{2} + \frac{Rr\cos(\sigma-\varphi)-r^2\cos^2(\sigma-\varphi)-r^2\sin^2(\sigma-\varphi)}{R^2-2Rr\cos(\sigma-\varphi)+r^2\cos^2(\sigma-\varphi)+r^2\sin^2(\sigma-\varphi)} \;= \\ &=\; \frac{1}{2} + \frac{Rr\cos(\sigma-\varphi)-r^2}{R^2-2Rr\cos(\sigma-\varphi)+r^2} \;= \\ &=\; \frac{R^2-2Rr\cos(\sigma-\varphi)+r^2+2Rr\cos(\sigma-\varphi)-2r^2}{2(R^2-2Rr\cos(\sigma-\varphi)+r^2)} \;= \\ &=\; \frac{R^2-r^2}{2(R^2-2Rr\cos(\sigma-\varphi)+r^2)}\,. \end{aligned}$$

Řešení úlohy (3.46), (3.47), (3.48), (3.49) tedy dostáváme ve tvaru

$$u(r,\varphi) \;=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(\sigma)\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\sigma-\varphi)+r^2}\mathrm{d}\sigma\,,\ \text{pro } r<R\,, \qquad u(r,\varphi)\;=f(\varphi)\,,\ \text{pro } r=R\,.$$

Výraz

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(\sigma)\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\sigma-\varphi)+r^2}\mathrm{d}\sigma \tag{3.53}$$

se nazývá *Poissonův integrál*, výraz

$$K(r,\varphi,R,\sigma) \;=\; \frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\sigma-\varphi)+r^2}$$

se nazývá *Poissonovo jádro.*

Vrátíme se k původním proměnným, tj. provedeme zpětnou transformaci

$$r \;=\sqrt{x^2+y^2}\,,\qquad \cos\varphi=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad \sin\varphi=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,.$$

Pak je

$$\begin{aligned} R^2-2Rr\cos(\sigma-\varphi)+r^2 \;&=\; R^2-2Rr(\cos\sigma\cos\varphi+\sin\sigma\sin\varphi)+r^2 \;= \\ &=\; x^2+y^2-2R(x\cos\sigma+y\sin\sigma)+R^2(\cos^2\sigma+\sin^2\sigma) \;=\; (x-R\cos\sigma)^2+(y-R\sin\sigma)^2\,. \end{aligned}$$

Řešení úlohy (3.44), (3.45) je tedy

$$u(x,y) \;=\; \frac{R^2-x^2-y^2}{2\pi R}\int\limits_0^{2\pi} g(R\cos\sigma,R\sin\sigma)\frac{R}{(x-R\cos\sigma)^2+(y-R\sin\sigma)^2}\mathrm{d}\sigma\,.$$

Označíme-li $\boldsymbol{x}=(x,y)$, $S^R_{(0,0)}$ kružnici se středem v počátku a poloměrem R, S bod na této kružnici, lze řešení zapsat pomocí křivkového integrálu

$$u(\boldsymbol{x}) \;=\; \frac{R^2-\|\boldsymbol{x}\|^2}{2\pi R}\int\limits_{S^R_{(0,0)}} g(S)\frac{\mathrm{d}S}{\|\boldsymbol{x}-S\|^2}\,. \tag{3.54}$$

Tato formule se nazývá *Poissonův vzorec.*

3.3.3 Poissonova rovnice ve dvou proměnných s homogenními Dirichletovými okrajovými podmínkami na kruhu

$$\Delta u(x,y) \;=\; G(x,y)\,,\qquad x^2+y^2<R^2\,, \tag{3.55}$$

$$u(x,y) \;=\; 0\,,\qquad x^2+y^2=R^2\,. \tag{3.56}$$

Předpokládáme, že $R>0$ a funkce G je spojitá. Rovnici transformujeme do polárních souřadnic

$$x \;=\; r\cos\varphi\,,\qquad y \;=\; r\sin\varphi\,.$$

Při označení $F(r,\varphi)=G(r\cos\varphi,r\sin\varphi)$ se rovnice (3.55) transformuje na tvar

$$u_{rr}(r,\varphi)+\frac{1}{r}u_r(r,\varphi)+\frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi} \;=\; F(r,\varphi)\,. \tag{3.57}$$

Analogicky jako u Laplaceovy rovnice musí funkce $u=u(r,\varphi)$ splňovat podmínky

$$u(R,\varphi) \;=\; 0\,,\qquad \varphi\in[0,2\pi]\,, \tag{3.58}$$

$$u(r,\varphi) \;=\; u(r,\varphi+2\pi)\,,\qquad r\in(0,R]\,,\ \varphi\in\mathbb{R}\,, \tag{3.59}$$

$$u(0,\varphi) \;=\; \mathit{const}\in\mathbb{R}\,,\qquad \varphi\in\mathbb{R}\,. \tag{3.60}$$

Poněvadž podle (3.59) je funkce $u(r,\cdot)$ 2π-periodická pro každé $r \in (0,R]$, lze ji hledat ve tvaru

$$u(r,\varphi) \;=\; \frac{a_0(r)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n(r)\cos n\varphi + b_n(r)\sin n\varphi\right) .$$

Pravá strana rovnice (3.57) bude

$$\frac{a_0''(r)}{2} + \frac{a_0'(r)}{2r} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(a_n''(r) + \frac{a_n'(r)}{r} - \frac{n^2 a_n(r)}{r^2} \right) \cos n\varphi + \left(b_n''(r) + \frac{b_n'(r)}{r} - \frac{n^2 b_n(r)}{r^2} \right) \sin n\varphi \right) .$$

Funkce $F(r,\cdot)$ je také 2π-periodická, proto ji můžeme také vyjádřit ve tvaru Fourierovy řady

$$F(r,\varphi) \;=\; \frac{c_0(r)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(c_n(r)\cos n\varphi + d_n(r)\sin n\varphi\right) .$$

kde

$$c_n(r) \;=\; \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(r,\alpha)\cos n\alpha \mathrm{d}\alpha\,, \quad n=0,1,2,\ldots\,, \qquad d_n(r) \;=\; \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(r,\alpha)\sin n\alpha \mathrm{d}\alpha\,, \quad n=0,1,2,\ldots .$$

Porovnáním koeficientů vidíme, že funkce $a_n = a_n(r)$ a $b_n = b_n(r)$ jsou řešením Eulerových obyčejných diferenciálních rovnic

$$r^2 a_n''(r) + r a_n'(r) - n^2 a_n(r) \;=\; \frac{r^2}{\pi}\int_0^{2\pi} F(r,\alpha)\cos n\alpha \mathrm{d}\alpha\,, \quad n=0,1,2,\ldots\,,$$

$$r^2 b_n''(r) + r b_n'(r) - n^2 b_n(r) \;=\; \frac{r^2}{\pi}\int_0^{2\pi} F(r,\alpha)\sin n\alpha \mathrm{d}\alpha\,, \quad n=1,2,\ldots$$

s okrajovými podmínkami

$$a_n(R) \;=\; 0\,, \quad a_n(r) \text{ je omezená pro } r \to 0+\,,$$
$$b_n(R) \;=\; 0\,, \quad b_n(r) \text{ je omezená pro } r \to 0+ \,.$$

Vyšetříme speciální případ, kdy pravá strana rovnice (3.55) je konstantní, $G \equiv c$. Pak také $F \equiv c$ a tedy

$$\int_0^{2\pi} c\mathrm{d}\alpha \;=\; 2\pi c\,, \qquad \int_0^{2\pi} c\cos n\alpha \mathrm{d}\alpha \;=\; \int_0^{2\pi} c\sin n\alpha \mathrm{d}\alpha \;=\; 0 \quad \text{pro } n=1,2,\ldots .$$

Funkce $a_0 = a_0(r)$ je řešením rovnice

$$r^2 a_0''(r) + r a_0'(r) \;=\; 2cr^2\,,$$

tedy $a_0(r) = \frac{c}{2}r^2 + A\ln r + B$. Poněvadž $a_0(r)$ je omezená pro $r \to 0+$, musí být $A = 0$; poněvadž $a_0(R) = 0$, musí být $B = -\frac{c}{2}R^2$. Celkem

$$a_0(r) \;=\; \frac{c}{2}(r^2 - R^2)\,.$$

Funkce $a_n = a_n(r)$ pro $n = 1,2,\ldots$ jsou řešením rovnice

$$r^2 a_n''(r) + r a_n'(r) - n^2 a_n(r) \;=\; 0\,,$$

tedy $a_n(r) = Ar^n + Br^{-n}$. Poněvadž $a_0(r)$ je omezená pro $r \to 0+$, musí být $B = 0$; poněvadž $a_n(R) = 0$, musí být $A = 0$. Analogické úvahy provedeme pro funkce $b_n = b_n(r)$, $n = 1,2,\ldots$. Celkem dostaneme

$$a_n(r) \;=\; b_n(r) \;=\; 0\,, \quad n=1,2,\ldots .$$

Dosazením do řady vyjadřující funkci $u = u(r,\varphi)$ dostaneme

$$u(r,\varphi) \;=\; \frac{c}{4}(r^2 - R^2)$$

a návratem k původním proměnným dostaneme řešení úlohy (3.55), (3.56) s $G \equiv c$ ve tvaru

$$u(x,y) \;=\; \frac{c}{4}(x^2 + y^2 - R^2)\,.$$

3.3.4 Rotačně (azimutálně) symetrické řešení Laplaceovy rovnice na kouli

$$\Delta u(x,y,z) = 0, \qquad x^2+y^2+z^2 < R^2, \tag{3.61}$$

$$u(x,y,z) = f(z), \qquad x^2+y^2+z^2 = R^2. \tag{3.62}$$

Provedeme transformaci do sférických souřadnic

$$x = r\cos\varphi\cos\vartheta, \quad y = r\sin\varphi\cos\vartheta, \quad z = r\sin\vartheta.$$

Hodnoty funkce u nezávisí na úhlu φ, tedy $u = u(r,\vartheta)$ a $\dfrac{\partial u}{\partial\vartheta} = 0$. To znamená že rovnice (3.61) se transformuje na následující rovnici (sr. Dodatek D)

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\cos\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\cos\vartheta\frac{\partial u}{\partial\vartheta}\right) = 0 \tag{3.63}$$

a okrajová podmínka (3.62) na podmínku $u(R,\vartheta) = f(R\sin\vartheta)$, nebo při označení $g(\xi) = f(R\xi)$ na

$$u(R,\vartheta) = g(\sin\vartheta), \qquad -\frac{\pi}{2} < \vartheta < \frac{\pi}{2}. \tag{3.64}$$

Budeme hledat ohraničené řešení rovnice (3.61) a proto budeme dále požadovat

$$\limsup_{r\to 0+} |u(r,\vartheta)| < \infty, \qquad -\frac{\pi}{2} < \vartheta < \frac{\pi}{2}. \tag{3.65}$$

Z rotační symetrie řešení u rovnice (3.61) plyne

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,0,z) = 0 = \frac{\partial u}{\partial y}(0,0,z)$$

pro každé z, $-R \le z \le R$. Po transformaci tedy dostaneme podmínku

$$\frac{\partial u}{\partial\vartheta}\left(r,-\frac{\pi}{2}\right) = 0 = \frac{\partial u}{\partial\vartheta}\left(r,\frac{\pi}{2}\right), \qquad 0 < r < R. \tag{3.66}$$

Řešení rovnice (3.63) hledáme ve tvaru součinu výrazů, z nichž jeden závisí pouze na r a druhý pouze na ϑ, tj.

$$u(r,\vartheta) = X(r)\Theta(\vartheta). \tag{3.67}$$

Dosazením do rovnice (3.63) dostaneme po snadné úpravě

$$\frac{\left(r^2X'\right)'}{X} = -\frac{\left(\Theta'\cos\vartheta\right)'}{\Theta\cos\vartheta}.$$

Symbol $'$ označuje obyčejnou derivaci podle příslušné proměnné; na levé strane podle r, na pravé podle ϑ. Výraz na levé straně závisí pouze na r, výraz na pravé straně závisí pouze na ϑ. To znamená, že obě strany předchozí rovnosti jsou rovny nějaké konstantě, řekněme λ. Tedy

$$\frac{\left(r^2X'\right)'}{X} = -\frac{\left(\Theta'\cos\vartheta\right)'}{\Theta\cos\vartheta} = \lambda. \tag{3.68}$$

Nejprve budeme řešit rovnici

$$\frac{1}{\cos\vartheta}\left(\Theta'\cos\vartheta\right)' + \lambda\Theta = 0 \tag{3.69}$$

s okrajovou podmínkou

$$\Theta'\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0 = \Theta'\left(\frac{\pi}{2}\right), \tag{3.70}$$

která plyne z podmínky (3.66). Zavedeme novou nezávisle proměnnou $\xi = \sin\vartheta$. Pak je

$$\Theta' = \frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\vartheta} = \frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\xi}\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}\theta} = \cos\vartheta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\xi}$$

a podmínka (3.70) je splněna. Dále

$$(\Theta' \cos\vartheta)' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\vartheta}\left(\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\vartheta}\cos\vartheta\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\vartheta}\left(\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\xi}\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}\vartheta}\cos\vartheta\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\left((1-\xi^2)\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\xi}\right)\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}\vartheta} = \left((1-\xi^2)\frac{\mathrm{d}^2\Theta}{\mathrm{d}\xi^2} - 2\xi\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\xi}\right)\cos\vartheta.$$

Rovnice (3.69) se tedy transformuje na rovnici

$$(1-\xi^2)\frac{\mathrm{d}^2\Theta}{\mathrm{d}\xi^2} - 2\xi\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\xi} + \lambda\Theta = 0,$$

což je Legendreova rovnice (sr. C.1), která má netriviální řešení pro $\lambda_n = n(n+1)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Těmito řešeními jsou Legendreovy polynomy P_n. Úloha (3.69), (3.70) má tedy řešení

$$\Theta_n(\vartheta) = P_n(\sin\vartheta), \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{3.71}$$

Nalezené vlastní hodnoty $\lambda = \lambda_n = n(n+1)$ dosadíme do rovnice (3.68). Dostaneme Eulerovu obyčejnou diferenciální rovnici

$$\left(r^2 X_n'\right)' - n(n+1)X_n = 0,$$

která má obecné řešení

$$X_n(r) = A_n r^n + B_n r^{-(n+1)}.$$

Z podmímky (3.65) plyne, že $\limsup\limits_{r\to 0+} |X_n(r)| < \infty$ a tedy $B_n = 0$ pro všechna $n = 0, 1, 2, \ldots$, tj

$$X_n(r) = A_n r^n. \tag{3.72}$$

Z vyjádření (3.67), nalezených řešení (3.71), (3.72) a faktu, že lineární rovnice (3.68) je homogenní, dostaneme řešení rovnice (3.63) je tvaru

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\sin\vartheta).$$

Toto řešení splňuje podmínky (3.65) a (3.66). Podmínku (3.66) můžeme přepsat na

$$g(\sin\vartheta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n R^n P_n(\sin\vartheta)$$

neboli

$$g(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n R^n P_n(\xi).$$

Odtud plyne, že $A_n R^n$ jsou Fourierovými koeficienty funkce g vzhledem k orthogonální soustavě Legendreových polynomů. Tedy podle věty C.1.4 platí

$$A_n = \frac{2n+1}{2R^n}\int_{-1}^{1} g(\xi)P_n(\xi)\mathrm{d}\xi = \frac{2n+1}{2R^n}\int_{-1}^{1} f(R\xi)P_n(\xi)\mathrm{d}\xi.$$

Řešení úlohy (3.63), (3.64), (3.65), (3.66) je

$$u(r,\vartheta) = \int_{-1}^{1} f(R\xi)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{2}\left(\frac{r}{R}\right)^n P_n(\sin\theta)P_n(\xi)\mathrm{d}\xi$$

a řešení úlohy (3.61), (3.62) je

$$u(x,y,z) = \int_{-1}^{1} f(R\xi)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{2}\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{R}\right)^n P_n\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)P_n(\xi)\mathrm{d}\xi.$$

3.3.5 Řešení Laplaceovy rovnice na válci

$$\Delta u(x,y,z) = 0, \qquad x^2+y^2<R^2,\ 0<z<h, \tag{3.73}$$
$$u(x,y,0)=0,\ u(x,y,h)=f(x,y), \qquad x^2+y^2<R^2, \tag{3.74}$$
$$u(x,y,z)=0, \qquad x^2+y^2=R^2,\ 0<z<h. \tag{3.75}$$

Rovnici i okrajové podmínky transformujeme do cylindrických souřadnic

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = z.$$

Podle D dostaneme rovnici

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \qquad 0<r<R,\ \varphi\in\mathbb{R},\ 0<z<h. \tag{3.76}$$

Okrajové podmínky se transformují na tvar

$$u(r,\varphi,0)=0,\ u(r,\varphi,h)=f(r\cos\varphi, r\sin\varphi), \qquad 0<r<R,\ \varphi\in\mathbb{R}, \tag{3.77}$$
$$u(R,\varphi,z)=0,\ \limsup_{r\to 0+}|u(r,\varphi,z)|<\infty, \qquad \varphi\in\mathbb{R},\ 0<z<h, \tag{3.78}$$
$$u(r,\varphi,z)=u(r,\varphi+2\pi,z), \qquad 0<r<R,\ \varphi\in\mathbb{R},\ 0<z<h. \tag{3.79}$$

Řešení transformované úlohy budeme hledat ve tvaru součinu tří funkcí, z nichž každá závisí právě na jedné z proměnných, tj.

$$u(r,\varphi,z) = X(r)\Phi(\varphi)Z(z). \tag{3.80}$$

Po dosazení do rovnice (3.76) a jednoduché úpravě dostaneme

$$\frac{(rX')'}{rX} + \frac{\Phi''}{r^2\Phi} = -\frac{Z''}{Z}.$$

Symbol $'$ označuje obyčejnou derivaci funkce podle její jediné proměnné. Na levé straně rovnosti je výraz, který závisí pouze na proměnných r a φ, výraz na pravé straně závisí pouze na φ. To je možné jedině tak, že výrazy na obou stranách rovnosti jsou rovny nějaké konstantě. Označíme ji $-\lambda$ a dostaneme

$$\frac{Z''}{Z} = \lambda = -\frac{(rX')'}{rX} - \frac{\Phi''}{r^2\Phi}. \tag{3.81}$$

Druhá z těchto rovností dává

$$-\frac{\Phi''}{\Phi} = r\frac{(rX')'}{X} + \lambda r^2.$$

Výraz na levé straně nezávisí na proměnné r, výraz na pravé straně nezávisí na proměnné φ. Musí se tedy oba rovnat nějaké konstantě, řekněme μ. Tedy

$$-\frac{\Phi''}{\Phi} = \mu = r\frac{(rX')'}{X} + \lambda r^2. \tag{3.82}$$

Z první rovnosti (3.81), z rovností (3.82) a z podmínek v (3.77), (3.78), (3.79) dostaneme tři obyčejné rovnice druhého řádu s okrajovými podmínkami:

$$\Phi'' + \mu\Phi = 0, \qquad \Phi(\varphi) = \Phi(\varphi+2\pi), \tag{3.83}$$
$$r\left(rX'\right)' + \left(\lambda r^2 - \mu\right)X = 0, \qquad \limsup_{r\to 0+}|X(r)|<\infty,\ X(R)=0, \tag{3.84}$$
$$Z'' - \lambda Z = 0, \qquad Z(0)=0. \tag{3.85}$$

Úloha (3.83) je shodná s úlohou (3.50), (3.52). Má tedy netriviální řešení pouze pro $\mu = m^2$, kde $m\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ a toto řešení je

$$\Phi_m(\varphi) = A_m\cos m\varphi + B_m\sin m\varphi, \quad m = 0,1,2\dots. \tag{3.86}$$

Předpokládejme, že $\lambda > 0$. Položíme $\lambda = l^2$ a v úloze (3.84) s $\mu = m^2$ zavedeme novou nezávisle proměnnou ϱ vztahem $\varrho = lr$; jedná se o změnu měřítka průvodiče. Pak

$$X' = l\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}\varrho}, \quad (rX')' = l\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varrho}\left(\frac{\varrho}{l}l\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}\varrho}\right) = l\left(\varrho\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}\varrho^2} + \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}\varrho}\right)$$

a rovnice v (3.84) se transformuje na Besselovu rovnici celočíselného řádu m,

$$\varrho^2\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}\varrho} + \varrho\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}\varrho} + (\varrho^2 - m^2)X = 0,$$

sr. C.5. Obecné řešení této rovnice je podle C.5.11 rovno

$$X = X_{ml}(\varrho) = C_{ml}J_m(\varrho) + D_{ml}Y_m(\varrho),$$

kde C_{ml}, D_{ml} jsou nějaké konstanty, J_m, resp. Y_m, je Besselova funkce prvního, resp. druhého, druhu. Avšak podle C.5.8 je $\left|\lim\limits_{\varrho\to 0+} Y_m\right| = \infty$. Aby byla splněna podmínka ohraničenosti v (3.84), musí být $D_{ml} = 0$. Řešení úlohy (3.84) jsou tedy tvaru

$$X = X_{ml}(r) = C_{ml}J_m(lr).$$

Z druhé okrajové podmínky (3.84) plyne $C_{ml}J_m(lR) = 0$. Aby řešení bylo nenulové a současně bylo $l > 0$, musí být

$$l = l_{mk} = \frac{x_{mk}}{R}, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

kde x_{mk} je k-tý jednoduchý kořen Besselovy funkce J_m, sr. C.5.6. Řešení úlohy (3.84) tedy jsou

$$X_{mk}(r) = c_{mk}J_m\left(\frac{x_{mk}}{R}r\right), \quad m = 0, 1, 2, \ldots, \; k = 1, 2, 3, \ldots, \tag{3.87}$$

kde $c_{mk} = C_{ml}$ pro $l = \frac{x_{mk}}{R}$.

Za předpokladu $\lambda > 0$ tedy je $\lambda = l_{mk}^2 = \left(\frac{x_{mk}}{R}\right)^2$. Řešení rovnice (3.85) v takovém případě bude

$$Z_{mk}(z) = D_{mk}\mathrm{e}^{l_{mk}z} + E_{mk}e^{-l_{mk}z},$$

kde D_{mk}, E_{mk} jsou nějaké konstanty. Z okrajové podmínky v (3.85) dostaneme $0 = Z_{mk}(0) = D_{mk} + E_{mk}$. Odtud plyne $E_{mk} = -D_{mk}$ a tedy

$$Z_{mk}(z) = D_{mk}\,\mathrm{sh}\,(l_{mk}z) = D_{mk}\,\mathrm{sh}\left(\frac{x_{mk}}{R}z\right), \quad m = 0, 1, 2, \ldots, \; k = 1, 2, 3, \ldots. \tag{3.88}$$

Označme $a_{mk} = A_m c_{mk} D_{mk}$, $b_{mk} = B_m c_{mk} D_{mk}$. Z vyjádření (3.80), nalezených řešení (3.86), (3.87) a (3.88) a ze skutečnosti, že rovnice (3.76) je homogenní, dostaneme její řešení ve tvaru

$$u(r, \varphi, z) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{sh}\left(\frac{x_{mk}}{R}z\right) J_m\left(\frac{x_{mk}}{R}r\right)(a_{mk}\cos m\varphi + b_{mk}\sin m\varphi). \tag{3.89}$$

Toto řešení splňuje okrajové podmínky (3.78), (3.79) a první z podmínek (3.77). Konstanty a_{mk}, b_{mk} určíme tak, aby byla splněna druhá z podmínek (3.77), tedy aby platilo

$$g(r, \varphi) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{sh}\left(\frac{x_{mk}}{R}h\right) J_m\left(\frac{x_{mk}}{R}r\right)(a_{mk}\cos m\varphi + b_{mk}\sin m\varphi),$$

kde $g(r, \varphi) = f(r\cos\varphi, r\cos\varphi)$. Výraz $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathrm{sh}\left(\frac{x_{mk}}{R}h\right) J_m\left(\frac{x_{mk}}{R}r\right) a_{mk}$ je tedy Fourierovým koeficientem funkce $g(r, \cdot)$ vzhledem k bázové funkci $\cos(m\,\cdot)$, takže

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{sh}\left(\frac{x_{mk}}{R}h\right) J_m\left(\frac{x_{mk}}{R}r\right) a_{mk} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(r, \sigma)\cos m\sigma \mathrm{d}\sigma$$

pro $m > 0$ a

$$\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{sh}\left(\frac{x_{0k}}{R}h\right) J_0\left(\frac{x_{0k}}{R}r\right) a_{0k} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} g(r,\sigma)\mathrm{d}\sigma.$$

Podle C.5.7 funkce $J_m\left(\frac{x_{mk}}{R}\,\cdot\right)$ tvoří orthogonální systém funkcí na intervalu $(0,R)$; skalární součin funkcí F, G definovaných na $(0,R)$ je přitom definován jako $(F,G) = \int\limits_0^R \xi F(\xi)G(\xi)\mathrm{d}\xi$. Z předchozí rovnosti tedy plyne, že výraz $a_{mk}\operatorname{sh}\left(\frac{x_{mk}}{R}h\right)$, resp. $a_{0k}\operatorname{sh}\left(\frac{x_{0k}}{R}h\right)$, je Fourierovým koeficientem funkce

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} g(\,\cdot\,,\sigma)\cos m\sigma\mathrm{d}\sigma, \quad \text{resp.} \quad \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} g(\,\cdot\,,\sigma)\mathrm{d}\sigma,$$

příslušným k bázové funkci $J_m\left(\frac{x_{mk}}{R}\,\cdot\right)$, resp. $J_0\left(\frac{x_{0k}}{R}\,\cdot\right)$. Vzhledem k C.5.7 to znamená, že

$$a_{mk}\operatorname{sh}\left(\frac{x_{mk}}{R}h\right) = \frac{2}{\pi R^2\big(J_{m+1}(x_{mk})\big)^2}\int\limits_0^R\int\limits_0^{2\pi} \varrho g(\varrho,\sigma)J_m\left(\frac{x_{mk}}{R}\varrho\right)\cos m\sigma\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}\varrho$$

pro $m = 1,2,3.\ldots$, tedy

$$a_{mk} = \frac{2}{\pi R^2\operatorname{sh}\left(\frac{x_{mk}}{R}h\right)\big(J_{m+1}(x_{mk})\big)^2}\int\limits_0^R\int\limits_0^{2\pi} \varrho f(\varrho\cos\sigma,\varrho\sin\sigma)J_m\left(\frac{x_{mk}}{R}\varrho\right)\cos m\sigma\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}\varrho,$$
$$m = 1,2,3,\ldots,\ k = 1,2,3,\ldots. \tag{3.90}$$

Analogicky dostaneme

$$a_{0k} = \frac{1}{\pi R^2\operatorname{sh}\left(\frac{x_{0k}}{R}h\right)\big(J_1(x_{0k})\big)^2}\int\limits_0^R\int\limits_0^{2\pi} \varrho f(\varrho\cos\sigma,\varrho\sin\sigma)J_0\left(\frac{x_{0k}}{R}\varrho\right)\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}\varrho, \qquad k = 1,2,3,\ldots, \tag{3.91}$$

$$b_{mk} = \frac{2}{\pi R^2\operatorname{sh}\left(\frac{x_{mk}}{R}h\right)\big(J_{m+1}(x_{mk})\big)^2}\int\limits_0^R\int\limits_0^{2\pi} \varrho f(\varrho\cos\sigma,\varrho\sin\sigma)J_m\left(\frac{x_{mk}}{R}\varrho\right)\sin m\sigma\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}\varrho,$$
$$m = 1,2,3,\ldots,\ k = 1,2,3,\ldots, \tag{3.92}$$

$$b_{0,k} = 0, \quad k = 1,2,3,\ldots. \tag{3.93}$$

Řešení úlohy (3.76)–(3.79), což je řešení původní úlohy (3.73)–(3.75) v cylindrických souřadnicích, je dáno formulí (3.89), přičemž koeficienty a_{mk}, b_{mk} jsou vyjádřeny rovnostmi (3.90)–(3.93).

Poznamenejme, že toto řešení jsme našli za předpokladu $\lambda > 0$. Naskýtá se otázka, zda volba $\lambda \leq 0$ nedá nějaké jiné řešení. Ovšem dále (v odstavci 4.2) bude ukázáno, že úloha (3.73)–(3.75) má jediné řešení.

Cvičení

1) Řešte úlohu o chvění struny délky l, je-li

a) struna upevněna na obou koncích, na počátku je ve vzdálenosti c od jednoho konce vychýlena na vzdálenost h od rovnovážné polohy a nepohybuje se.

b) struna upevněna na obou koncích a je rozechvěna úderem plochého tvrdého kladívka o šířce 2δ, jehož střed se struny dotkne ve vzdálenosti c od jednoho konce a jež se pohybuje rychlostí v.

c) struna je upevněna na obou koncích a působí na ni konstatntní síla f; na počátku je struna v rovnovážné poloze a nepohybuje se.

d) struna je upevněna na jednom konci, druhý konec vykonává harmonický pohyb s amplitudou A a frekvencí $\omega = \dfrac{a\pi}{l}$. (Na počátku je druhý konec vychýlen na vzdálenost A a struna je v klidu.)

2) Řešte úlohu o chladnutí homogenní tyče délky l která byla stejnoměrně zahřáta na teplotu u_0, na jejímž bočním povrchu nedochází k výměně tepla a

a) jeden její konec udržujeme na teplotě 0, druhý je tepelně izolován.

b) jeden její konec udržujeme na teplotě u_1, druhý na teplotě u_2.

c) na koncích nastává výměna tepla s prostředím nulové teploty.

3) Homogenní koule o poloměru R byla zahřáta tak, že její počáteční teplota v libovolném bodě závisí pouze na vzdálenosti r tohoto bodu od středu koule, tj. $u(0,x,y,z) = f\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)$. Povrch koule udržujeme na nulové teplotě. Určete teplotu koule v libovolném bodě a libovolném čase.

Řešte úlohu

4) $u_{xx} + u_{yy} = 0,\ 0 < x < a,\ 0 < y < b$

$u(0,y) = Ay(b-y),\ u(a,y) = 0,\ 0 \le y \le b;\ u(x,0) = B\sin\frac{\pi x}{a},\ u(x,b) = 0,\ 0 \le x \le a$

5) $u_{xx} + u_{yy} = -2,\ 0 < x < a,\ -\frac{b}{2} < y < \frac{b}{2}$

$u(0,y) = u(a,y) = 0,\ -\frac{b}{2} \le y \le \frac{b}{2}\ ;\ u(x,-\frac{b}{2}) = u(x,\frac{b}{2}) = 0,\ 0 \le x \le a$

Výsledky:

1a) $u_{tt} = a^2 u_{xx}$

$$u(0,x) = \begin{cases} \frac{h}{c}x, & x \in [0,c) \\ \frac{h}{c-l}(x-l), & x \in [c,l], \end{cases},\ u_t(0,x) = 0$$

$u(t,0) = u(t,l) = 0$

$$u(t,x) = \frac{2l^2h}{c(l-c)\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin(\tfrac{\pi n}{l}c)\sin(\tfrac{\pi n}{l}x)\cos(\tfrac{a\pi n}{l}t)$$

1b) $u_{tt} = a^2 u_{xx}$

$$u(0,x) = 0,\ u_t(0,x) = \begin{cases} v, & x \in [c-\delta, c+\delta] \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$$

$u(t,0) = u(t,l) = 0$

$$u(t,x) = \frac{4lv}{a\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin(\tfrac{\pi n}{l}c)\sin(\tfrac{\pi n}{l}\delta)\sin(\tfrac{\pi n}{l}x)\sin(\tfrac{a\pi n}{l}t)$$

1c) $u_{tt} = a^2 u_{xx} + f$

$u(0,x) = u_t(0,x) = 0,\ u(t,0) = u(t,l) = 0$

$$u(t,x) = \frac{4l^2 f}{a^2\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}\left(1-\cos\left(\tfrac{a\pi(2n+1)}{l}t\right)\right)\sin\left(\tfrac{\pi(2n+1)}{l}x\right)$$

1d) $u_{tt} = a^2 u_{xx}$

$$u(0,x) = \frac{A}{l}x,\ u_t(0,x) = 0,\quad u(t,0) = 0,\ u(t,l) = A\cos\omega t$$

$$u(t,x) = \frac{A}{l}\left(x\cos(\tfrac{a\pi}{l}t) - at\sin(\tfrac{a\pi}{l}t)\right) + \frac{4A}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3-n}\sin\left(\tfrac{a\pi(n+1)}{l}t\right)\sin\left(\tfrac{\pi n}{l}x\right)$$

2a) $u_t = a^2 u_{xx}$

$u(0,x) = u_0;\ u(t,0) = 0,\ u_x(t,l) = 0$

$$u(t,x) = \frac{4u_0}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(\frac{2n+1}{2l}\pi x)}{(2n+1)\exp\left\{\left(\frac{(2n+1)a\pi}{2l}\right)^2 t\right\}},\ \text{stacionární stav } u \equiv 0$$

2b) $u_t = a^2 u_{xx}$

$u(0,x) = u_0;\ u(t,0) = u_1,\ u(t,l) = u_2$

$$u(t,x) = \frac{u_2-u_1}{l}x + u_1 + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(u_0 - u_1 + (-1)^{n+1}(u_0-u_2)\right)\sin(\frac{\pi n}{l}x)}{n\exp\left\{\left(\frac{a\pi n}{l}\right)^2 t\right\}},\ \text{stacionární stav } u(x) = u_1 + \frac{u_2-u_1}{l}x$$

2c) $u_t = a^2 u_{xx}$

$u(0,x) = u_0;\ u_x(t,0) = hu(t,0),\ u_x(t,l) = -hu(t,l)$

$$u(x,t) = 2u_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp(-a^2\lambda_n t)}{\lambda_n l + h^2 l + 2h} \left(\sin(\sqrt{\lambda_n}\, l) - \tfrac{h}{\sqrt{\lambda_n}} \left(\cos(\sqrt{\lambda_n}\, l) - 1\right)\right) \left(\sqrt{\lambda_n} \cos(\sqrt{\lambda_n}\, x) + h \sin(\sqrt{\lambda_n}\, x)\right),$$

kde $\lambda_1, \lambda_2 \dots$ jsou kladné kořeny rovnice $\frac{\sqrt{\lambda}}{h} - \frac{h}{\sqrt{\lambda}} = 2\operatorname{cotg}(\sqrt{\lambda} l)$

3) $u_t = a^2 \Delta u$

$$u(0,x,y,z) = f\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right), \quad u(t,x,y,z) = 0 \text{ pro } x^2+y^2+z^2 = R^2$$

$$u(t,x,y,z) = \tfrac{2}{R\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left\{-\left(\tfrac{n\pi a}{R}\right)^2 t\right\} \sin\left(\frac{n\pi\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{R}\right) \int_0^R \rho f(\rho) \sin(\tfrac{n\pi\rho}{R}) \mathrm{d}\rho$$

4) $$u(x,y) = \frac{B \operatorname{sh}\left(\frac{\pi(b-y)}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{\pi b}{a}\right)} + \tfrac{8Ab^2}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{(2n+1)\pi(a-x)}{b}\right) \sin\left(\frac{(2n+1)\pi y}{b}\right)}{(2n+1)^3 \operatorname{sh}\left(\frac{(2n+1)\pi a}{b}\right)}$$

5) $$u(x,y) = x(a-x) - \tfrac{8a^2}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{ch}\left(\frac{2n+1}{a}\pi y\right) \sin\left(\frac{2n+1}{a}\pi x\right)}{(2n+1)^3 \operatorname{ch}\left(\frac{2n+1}{2a}\pi b\right)}$$

Kapitola 4

Metody řešení eliptické rovnice

4.1 Integrace per partes a Greenovy vzorce

Buď $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ oblast s dostatečně hladkou hranicí $\partial\Omega$, $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2) = \big(\nu_1(x,y), \nu_2(x,y)\big)$ jednotkový vektor vnější normály k $\partial\Omega$, $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ diferencovatelná funkce. Integrací podle jedné proměnné ověříme, že platí

$$\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \;=\; \int_{\partial\Omega} f\nu_1\,\mathrm{d}S\,, \qquad \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \;=\; \int_{\partial\Omega} f\nu_2\,\mathrm{d}S\,.$$

Položíme-li $f = uv$, kde $u,\ v$ jsou diferencovatelné funkce na $\overline{\Omega}$, dostaneme vzorce pro integraci per partes u dvojných integrálů:

$$\int_\Omega u\frac{\partial v}{\partial x}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \;=\; \int_{\partial\Omega} uv\nu_1\,\mathrm{d}S - \int_\Omega v\frac{\partial u}{\partial x}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,, \qquad \int_\Omega u\frac{\partial v}{\partial y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \;=\; \int_{\partial\Omega} uv\nu_2\,\mathrm{d}S - \int_\Omega v\frac{\partial u}{\partial y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,.$$

Odtud plyne

$$\int_\Omega u\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \;=\; \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial x}\nu_1\mathrm{d}S - \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,, \qquad \int_\Omega u\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \;=\; \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial y}\nu_2\mathrm{d}S - \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,.$$

Sečtením těchto rovnic dostaneme

$$\int_\Omega u\Delta v\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \;=\; \int_{\partial\Omega} u\left(\frac{\partial v}{\partial x}\nu_1 + \frac{\partial v}{\partial y}\nu_2\right)\mathrm{d}S - \int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,.$$

Výraz $\dfrac{\partial v}{\partial x}\nu_1 + \dfrac{\partial v}{\partial y}\nu_2$ je derivace funkce v ve směru jednotkového vektoru vnější normály. Označíme ho $\dfrac{\partial v}{\partial \boldsymbol{\nu}}$ a dostaneme *první Greenův vzorec*

$$\int_\Omega u\Delta v\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \;=\; \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{\nu}}\mathrm{d}S - \int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,.$$

Analogicky odvodíme

$$\int_\Omega v\Delta u\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \;=\; \int_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}\mathrm{d}S - \int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,.$$

Odečtením prvních Greenových vzorců dostaneme *druhý Greenův vzorec*

$$\int_\Omega (u\Delta v - v\Delta u)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \;=\; \int_{\partial\Omega} \left(u\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{\nu}} - v\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}\right)\mathrm{d}S\,.$$

Analogické vzorce platí i pro funkce více proměnných: Nechť $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ je oblast s dostatečně hladkou hranicí $\partial\Omega$, $u,\ v$ diferencovatelné funkce na $\overline{\Omega}$ a $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n)$ jednotkový vektor vnější normály k $\partial\Omega$. Pak platí

- Integrace per partes

$$\int_\Omega u\frac{\partial v}{\partial x_i}\mathrm{d}V \;=\; \int_{\partial\Omega} uv\,\nu_i\,\mathrm{d}S - \int_\Omega v\frac{\partial u}{\partial x_i}\,\mathrm{d}V\,, \qquad i=1,2,\dots,n\,.$$

- První Greenův vzorec

$$\int_\Omega u\Delta v\,\mathrm{d}V \;=\; \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{\nu}}\,\mathrm{d}S - \int_\Omega \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}\,\mathrm{d}V \;=\; \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{\nu}}\,\mathrm{d}S - \int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\,\mathrm{d}V\,.$$

- Druhý Greenův vzorec

$$\int_\Omega (u\Delta v - v\Delta u)\,\mathrm{d}V \;=\; \int_{\partial\Omega}\left(u\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{\nu}} - v\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}\right)\mathrm{d}S\,.$$

4.2 Jednoznačnost řešení Dirichletovy a Neumannovy úlohy pro Poissonovu rovnici

Buď $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ oblast s dostatečně hladkou hranicí $\partial\Omega$. Uvažujme *Poissonovu rovnici*

$$\Delta u(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}), \qquad \boldsymbol{x}\in\Omega \tag{4.1}$$

s *Dirichletovou*

$$u(\boldsymbol{x}) = g_0(\boldsymbol{x}), \qquad \boldsymbol{x}\in\partial\Omega \tag{4.2}$$

nebo *Neumannovou*

$$\frac{\partial u(\boldsymbol{x})}{\partial\boldsymbol{\nu}} = g_1(\boldsymbol{x}), \qquad \boldsymbol{x}\in\partial\Omega \tag{4.3}$$

okrajovou podmínkou. Nechť funkce u_1, u_2 současně splňují rovnici (4.1) s některou z podmínek (4.2) nebo (4.3). Položme $u = u_1 - u_2$. Pro $\boldsymbol{x}\in\Omega$ platí

$$\Delta u(\boldsymbol{x}) = \Delta u_1(\boldsymbol{x}) - \Delta u_2(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}) = 0,$$

tedy funkce u splňuje na Ω Laplaceovu rovnici. Pro $\boldsymbol{x}\in\partial\Omega$ platí

$$u(\boldsymbol{x}) = u_1(\boldsymbol{x}) - u_2(\boldsymbol{x}) = g_0(\boldsymbol{x}) - g_0(\boldsymbol{x}) = 0, \quad \text{nebo} \quad \frac{\partial u(\boldsymbol{x})}{\partial\boldsymbol{\nu}} = \frac{\partial u_1(\boldsymbol{x})}{\partial\boldsymbol{\nu}} - \frac{\partial u_2(\boldsymbol{x})}{\partial\boldsymbol{\nu}} = g_1(\boldsymbol{x}) - g_1(\boldsymbol{x}) = 0,$$

zejména tedy $u(\boldsymbol{x})\dfrac{\partial u(\boldsymbol{x})}{\partial\nu} = 0$ na $\partial\Omega$. S využitím prvního Greenova vzorce dostaneme

$$0 = \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial u}{\partial\nu}\mathrm{d}S = \int_\Omega u\Delta u\mathrm{d}V + \int_\Omega \nabla u\cdot\nabla u\mathrm{d}V = 0 + \int_\Omega |\nabla u|^2\,\mathrm{d}V.$$

Odtud plyne, že $\nabla u(\boldsymbol{x}) = 0$ pro $\boldsymbol{x}\in\Omega$ a tedy, že $u(\boldsymbol{x}) = const$. To dále znamená, že $u_1(\boldsymbol{x}) - u_2(\boldsymbol{x}) = const$ pro $\boldsymbol{x}\in\bar\Omega$, neboť řešení každé z úloh (4.1), (4.2) a (4.1), (4.3) je spojité na $\bar\Omega$. V případě Dirichletovy podmínky je $const = 0$, neboť $u_1(\boldsymbol{x}) - u_2(\boldsymbol{x}) = 0$ pro $\boldsymbol{x}\in\Omega$.

Platí tedy: Všechna řešení úlohy (4.1), (4.2) jsou shodná, tj. úloha (4.1), (4.2) má nejvýše jedno řešení; všechna řešení úlohy (4.1), (4.3) se liší o aditivní konstantu.

4.3 Laplaceova rovnice a harmonické funkce

Buď $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ oblast (otevřená souvislá množina). Řekneme, že funkce u definovaná na Ω je *harmonická*, má-li spojité parciální derivace druhého řádu, na Ω splňuje *Laplaceovu rovnici*

$$\Delta u \;=\; 0$$

$\left(\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dots + \dfrac{\partial^2}{\partial x_n^2}\right)$ a je-li Ω neohraničená, platí navíc

$$\limsup_{\boldsymbol{x}\in\Omega,|\boldsymbol{x}|\to\infty} |\boldsymbol{x}|^{n-2}u(\boldsymbol{x}) \;<\; \infty\,.$$

($|\boldsymbol{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$ je euklidovská vzdálenost bodu $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ od počátku $(0, 0, \dots, 0)$.)

4.3.1 Jednoduché harmonické funkce v rovině

Rovnice

$$u_{xx} + u_{yy} \;=\; 0$$

má v polárních souřadnicích $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$ tvar

$$u_{rr} + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi} + \frac{1}{r}u_r \;=\; 0\,.$$

Snadno ověříme, že funkce

$$u(r,\varphi) \;=\; r^k\cos k\varphi \qquad \text{a} \qquad v(r,\varphi) \;=\; r^k\sin k\varphi\,, \qquad k = 0,1,2,\dots$$

jsou řešením poslední rovnice. Vyjádříme tyto funkce v kartézských souřadnicích

$u(r,\varphi)$	1	$r\cos\varphi$	$r\sin\varphi$	$r^2\cos 2\varphi$	$r^2\sin 2\varphi$	$r^3\cos 3\varphi$	$r^3\sin 3\varphi$	$\dots$
$u(x,y)$	1	x	y	$x^2 - y^2$	$2xy$	$x^3 - 3xy^2$	$3x^2y - y^3$	$\dots$

Získáme polynomy stupně k, které nazýváme *jednoduché harmonické funkce stupně* k. Nechť Ω je ohraničená oblast, jejíž hranice $\partial\Omega$ je jednoduchá uzavřená křivka implicitně daná rovnicí $P(x,y) = 0$, kde P je polynom stupně nejvýše k. Řešení rovnice

$$u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) \;=\; 0\,, \qquad (x,y) \in \Omega$$

s některou z okrajových podmínek

$$\begin{aligned} u(x,y) \;&=\; g_1(x,y)\,, \quad (x,y) \in \partial\Omega\,,\\ \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}(x,y) \;&=\; g_2(x,y)\,, \quad (x,y) \in \partial\Omega\,,\\ \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}(x,y) \;&=\; h(g_3(x,y) - u(x,y))\,, \quad (x,y) \in \partial\Omega\,, \end{aligned}$$

g_1 je polynom stupně nejvýše k; $g_2,\ g_3$ jsou polynomy stupně nejvýše $k-1$ a $\dfrac{\partial}{\partial\boldsymbol{\nu}}$ značí derivaci ve směru vnější normály, lze v tomto případě hledat ve tvaru lineární kombinace jednoduchých harmonických funkcí stupně nejvýše k.

4.3.2 Kruhová a kulová inverse

Kruhová inverse vzhledem ke kružnici $x^2 + y^2 = a^2$, v polárních souřadnicích $r = a$, je zobrazení $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dané předpisem

$$(x,y) \mapsto \left(\frac{xa^2}{x^2+y^2}\,,\ \frac{ya^2}{x^2+y^2}\right) \;=\; \frac{a^2}{|(x,y)|^2}(x,y)\,,$$

v polárních souřadnicích

$$(r,\varphi) \mapsto \left(\frac{a^2}{r},\varphi\right)\,.$$

Kruhová inverse je prosté a vzájemně jednoznačné zobrazení množiny $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2+y^2 \geq a^2\}$ na množinu $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 < x^2+y^2 \leq a^2\}$, body kružnice jsou pevné (samodružné) body tohoto zobrazení.

Funkce $u = u(r,\varphi)$ je harmonická na množině $\{(r,\varphi) :\ r < a\}$ právě tehdy, když funkce

$$v = v(r',\varphi) = u\left(\frac{a^2}{r'},\varphi\right) = u(r,\varphi)$$

je harmonická na množině $\{(r',\varphi) :\ r' > a\}$.

D.: $r = \dfrac{a^2}{r'}$, $\dfrac{\partial r}{\partial r'} = -\dfrac{a^2}{r'^2} = -\dfrac{r^2}{a^2}$, tedy

$$\begin{aligned}
v_{r'}(r',\varphi) &= v_r(r',\varphi)\frac{\partial r}{\partial r'} \;=\; -\frac{r^2}{a^2}u_r(r,\varphi)\,,\\
v_{r'r'}(r',\varphi) &= \frac{\partial}{\partial r}v_{r'}(r',\varphi)\frac{\partial r}{\partial r'} \;=\; \frac{\partial}{\partial r}\left(-\frac{r^2}{a^2}u_r(r,\varphi)\right)\left(-\frac{r^2}{a^2}\right) \;=\\
&= \frac{r^2}{a^4}\left(2ru_r(r,\varphi)+r^2u_{rr}\,(r,\varphi)\right) \;=\; \frac{2r^3}{a^4}u_r(r,\varphi)+\frac{r^4}{a^4}u_{rr}(r,\varphi)\,,\\
\Delta_{r',\varphi}\,v(r',\varphi) &= v_{r'r'}(r',\varphi)+\frac{1}{r'^2}v_{\varphi\varphi}(r',\varphi)+\frac{1}{r'}v_{r'}(r',\varphi) \;=\\
&= \frac{2r^3}{a^4}u_r(r,\varphi)+\frac{r^4}{a^4}u_{rr}(r,\varphi)+\frac{r^2}{a^4}u_{\varphi\varphi}(r,\varphi)-\frac{r^3}{a^4}u_r(r,\varphi) \;=\\
&= \frac{r^4}{a^4}\left(u_{rr}(r,\varphi)+\frac{1}{r}u_r(r,\varphi)+u_{\varphi\varphi}(r,\varphi)\right) \;=\; \frac{r^4}{a^4}\Delta_{r,\varphi}\,u(r,\varphi)\,.
\end{aligned}$$

$\square$

Tato vlastnost umožňuje převádět řešení úlohy

$$\Delta u(x,y) \;=\; 0\,,\quad x^2+y^2<a^2$$

na řešení úlohy

$$\Delta u(x,y) \;=\; 0\,,\quad x^2+y^2>a^2\,.$$

Kruhová inverse jednoduchých harmonických funkcí:

$$1,\ \frac{1}{r}\cos\varphi,\ \frac{1}{r}\sin\varphi,\ \frac{1}{r^2}\cos 2\varphi,\ \frac{1}{r^2}\sin 2\varphi,\ \ldots\,.$$

Kulová inverse vzhledem ke sféře $x^2+y^2+z^2=a^2$, ve sférických souřadnicích $r=a$, je zobrazení dané předpisem

$$(x,y,z)\mapsto\frac{a^2}{|(x,y,z)|^2}(x,y,z)\,,$$

ve sférických souřadnicích

$$(r,\varphi,\vartheta)\mapsto\left(\frac{a^2}{r},\varphi,\vartheta\right)\,.$$

Kulová inverse je prosté a vzájemně jednoznačné zobrazení množiny $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\,x^2+y^2+z^2\geq a^2\}$ na množinu $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\,0<x^2+y^2+z^2\leq a^2\}$, body sféry jsou pevné body tohoto zobrazení.

Funkce $u=u(r,\varphi,\vartheta)$ je harmonická právě tehdy, když funkce

$$v \;=\; v(r',\varphi,\vartheta) \;=\; \frac{a^2}{r'}u\left(\frac{a^2}{r'},\varphi,\vartheta\right) \;=\; ru(r,\varphi,\vartheta)$$

je harmonická.

D.: $r=\dfrac{a^2}{r'}$, $\dfrac{\partial r}{\partial r'}=-\dfrac{r^2}{a^2}$. Tedy

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r'^2}\frac{\partial}{\partial r'}\left(r'^2\frac{\partial v}{\partial r'}\right) &= \frac{r^2}{a^4}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{a^4}{r^2}\frac{\partial ru}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial r'}\right)\frac{\partial r}{\partial r'} \;=\; \frac{r^2}{a^4}\frac{\partial}{\partial r}\left(-a^2\left(u+r\frac{\partial u}{\partial r}\right)\right)\left(-\frac{r^2}{a^2}\right) \;=\\
&= \frac{r^4}{a^4}\left(\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial u}{\partial r}+r\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\right) \;=\; \frac{r^3}{a^4}\left(2r\frac{\partial u}{\partial r}+r^2\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\right) \;=\\
&= \frac{r^3}{a^4}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) \;=\; \frac{r^5}{a^4}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)\,,\\
\frac{1}{r'^2\cos^2\vartheta}\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2} &= \frac{r^2}{a^4}\frac{1}{\cos^2\vartheta}\frac{\partial^2 ru}{\partial\varphi^2} \;=\; \frac{r^3}{a^4}\frac{1}{\cos^2\vartheta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} \;=\; \frac{r^5}{a^4}\frac{1}{r^2\cos^2\vartheta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\,,\\
\frac{1}{r'^2\cos\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\cos\vartheta\frac{\partial v}{\partial\vartheta}\right) &= \frac{r^2}{a^4}\frac{1}{\cos\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\cos\vartheta\frac{\partial ru}{\partial\vartheta}\right) \;=\; \frac{r^5}{a^4}\frac{1}{r^2\cos\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\cos\vartheta\frac{\partial u}{\partial\vartheta}\right)\,,
\end{aligned}$$

odtud

$$\Delta_{r',\varphi,\vartheta}\, v \;=\; \frac{r^5}{a^4}\Delta_{r,\varphi,\vartheta}\, u\,.$$

□

Transformace

$$v(r',\varphi,\vartheta) \;=\; ru(r,\varphi,\vartheta)\,, \qquad \text{kde} \quad r=\frac{1}{r'}$$

se nazývá *Kelvinova*.

4.3.3 Fundamentální harmonické funkce

Hledáme symetrické řešení rovnice

$$\Delta u(\boldsymbol{x}) \;=\; 0\,, \quad \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}\,.$$

Provedeme transformaci do sférických souřadnic

$$\begin{aligned}
x_1 &= r\cos\varphi_1\ldots\cos\varphi_{n-3}\cos\varphi_{n-2}\cos\varphi_{n-1}\\
x_2 &= r\cos\varphi_1\ldots\cos\varphi_{n-3}\cos\varphi_{n-2}\sin\varphi_{n-1}\\
x_3 &= r\cos\varphi_1\ldots\cos\varphi_{n-3}\sin\varphi_{n-2}\\
&\vdots\\
x_{n-1} &= r\cos\varphi_1\sin\varphi_2\\
x_n &= r\sin\varphi_1\,.
\end{aligned}$$

Poněvadž funkce u má být symetrická, t.j. její hodnota závisí pouze na vzdálenosti argumentu od počátku, je $u=u(r)$ a $\dfrac{\partial u}{\partial\varphi_i}=0,\ i=1,2,\ldots,n-1$. Tedy

$$\begin{aligned}
\Delta u &= \sum_{i=1}^n\frac{\partial^2u}{\partial x_i^2} = \sum_{i=1}^n\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x_i}+\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial u}{\partial\varphi_j}\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\right) = \sum_{i=1}^n\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x_i}\right) = \sum_{i=1}^n\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x_i}\right)\frac{\partial r}{\partial x_i} =\\
&= \sum_{i=1}^n\left(\frac{\partial^2u}{\partial r^2}\left(\frac{\partial r}{\partial x_i}\right)^2+\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial^2 r}{\partial x_i^2}\right) = \frac{\partial^2u}{\partial r^2}\sum_{i=1}^n\left(\frac{\partial r}{\partial x_i}\right)^2+\frac{\partial u}{\partial r}\sum_{i=1}^n\frac{\partial^2 r}{\partial x_i^2}\,.
\end{aligned}$$

Poněvadž $r=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}$, platí

$$\begin{aligned}
\frac{\partial r}{\partial x_i} &= \frac{x_i}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}} = \frac{x_i}{r}\,, \quad \text{tedy} \quad \left(\frac{\partial r}{\partial x_i}\right)^2 = \frac{x_i^2}{r^2}\,,\\
\frac{\partial^2 r}{\partial x_i^2} &= \frac{\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}-\dfrac{x_i^2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}}}{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2} = \frac{r^2-x_i^2}{r^3}\,.
\end{aligned}$$

Tedy

$$\sum_{i=1}^n\left(\frac{\partial r}{\partial x_i}\right)^2 = \sum_{i=1}^n\frac{x_i^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2} = 1\,, \qquad \sum_{i=1}^n\frac{\partial^2 r}{\partial x_i^2} = \sum_{i=1}^n\left(\frac{1}{r}-\frac{x_i^2}{r^3}\right) = \frac{n}{r}-\frac{r^2}{r^3} = \frac{n-1}{r}\,.$$

Celkem máme

$$\Delta u \;=\; u_{rr}+\frac{n-1}{r}u_r \;=\; 0\,.$$

Řešení této rovnice je

$$u(r) \;=\; \begin{cases} C_1\ln r+C_2, & n=2\\[2mm] \dfrac{C_1}{r^{n-2}}+C_2, & n\ge 3\end{cases}\,.$$

Aby $\lim\limits_{r\to\infty} r^{n-2}u(r) < \infty$, musí být $C_1 < 0$ v případě $n = 2$. Volíme $C_2 = 0$ a $C_1 = \begin{cases} -1, & n = 2 \\ 1, & n \geq 3 \end{cases}$.

Definice: Funkci $v(\boldsymbol{x}_0, \cdot)$ definovanou na $\mathbb{R}^n \setminus \{\boldsymbol{x}_0\}$ vztahem

$$v(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}) \;=\; \begin{cases} \ln \dfrac{1}{|\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}|}, & n = 2 \\[2ex] \dfrac{1}{|\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}|^{n-2}}, & n \geq 3 \end{cases}$$

nazýváme *fundamentální (elementární) harmonickou funkcí se singularitou v bodě* $\boldsymbol{x}_0$.

Speciální případy:

$$\begin{aligned} v(x_0, y_0, x, y) &= \ln \frac{1}{\sqrt{(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2}}, \\ v(x_0, y_0, z_0, x, y, z) &= \frac{1}{\sqrt{(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2 + (z_0 - z)^2}}. \end{aligned}$$

Z úvahy provedené před definicí plyne, že fundamentální harmonická funkce se singularitou v bodě $\boldsymbol{x}_0$ je harmonickou funkcí na oblasti $\mathbb{R}^n \setminus \{\boldsymbol{x}_0\}$. Dále je zřejmé, že

$$v(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}) \;=\; v(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_0) \tag{4.4}$$

a pro každé $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \neq \boldsymbol{x}_0 = (x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n})$ platí

$$\Delta_{x_1, x_2, \ldots, x_n} v(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}) \;=\; \Delta_{x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n}} v(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x})\,. \tag{4.5}$$

Interpretace fundamentální harmonické funkce $v(\boldsymbol{x}_0, \cdot\,)$ a její derivace.
Pro $n = 3$ při označení $\boldsymbol{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ platí

$$\begin{aligned} \frac{\partial v(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x})}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\sqrt{(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2 + (z_0 - z)^2}} = \\ &= -\frac{1}{2} \frac{-2(x_0 - x)}{\big((x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2 + (z_0 - z)^2\big)^{3/2}} = -\frac{x - x_0}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0|^3}, \end{aligned}$$

a podobně

$$\frac{\partial v(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x})}{\partial y} = -\frac{y - y_0}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0|^3}, \qquad \frac{\partial v(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x})}{\partial z} = -\frac{z - z_0}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0|^3},$$

takže

$$\nabla v(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}) = -\frac{\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0|^3}.$$

Nechť v bodě o souřadnicích $\boldsymbol{x}_0$ se nachází bodový náboj velikosti Q. Na kladný jednotkový bodový náboj umístěný v bodě $\boldsymbol{x} = (x, y, z)$ působí podle Coulombova zákona elektrostatická síla o velikosti

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{|Q|}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0|^2},$$

která je orientovaná ve směru vektoru $\operatorname{sgn} Q(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)$; přitom ε označuje permitivitu prostředí. V bodě $\boldsymbol{x}$ je tedy intenzita elektrostatického pole vytvářeného nábojem Q v bodě $\boldsymbol{x}_0$ rovna

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{Q}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0|^2} \frac{\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0|} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon} \frac{\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0|^3} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\big(- \nabla v(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x})\big).$$

Při označení

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = \frac{Q}{4\pi} v(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}) \tag{4.6}$$

tedy intenzitu $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})$ můžeme zapsat ve tvaru

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\varepsilon}\big(- \nabla\varphi(\boldsymbol{x})\big).$$

To znamená, že funkce $v(\boldsymbol{x}_0, \cdot\,)$ vyjadřuje (až na multiplikativní konstantu charakterizující permitivitu prostředí) potenciál elektrostatického pole vytvářeného bodovým nábojem umístěným v bodě $\boldsymbol{x}_0$.

Uvažujme nyní elektrický dipól, tj. dva bodové náboje opačného znaménka stejné velikosti $|Q|$ v malé vzdálenosti h od sebe. Nechť náboj Q se nachází v bodě $\boldsymbol{x}_+$ a náboj $-Q$ v bodě $\boldsymbol{x}_-$. Označme dále $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_+ - \boldsymbol{x}_-$, $\boldsymbol{x}_0 = \frac{1}{2}(\boldsymbol{x}_+ + \boldsymbol{x}_-)$. Vektor $\boldsymbol{p} = Q\boldsymbol{d}$ se nazývá dipólový moment, jeho velikost je $N = Q|\boldsymbol{d}| = Qh$ a směr $\boldsymbol{d}_0 = \dfrac{\boldsymbol{d}}{h}$; bod $\boldsymbol{x}_0$ lze považovat za umístění dipólu.

Potenciál elektrostatického pole vytvářeného uvažovaným dipólem v pevně zvoleném bodě $\boldsymbol{x}$ bude podle (4.6) roven

$$\varphi_{III}(\boldsymbol{x}) = \frac{Q}{4\pi}v(\boldsymbol{x}_+,\boldsymbol{x}) - \frac{Q}{4\pi}v(\boldsymbol{x}_-,\boldsymbol{x}) = \frac{Q}{4\pi}\big(v(\boldsymbol{x}_+,\boldsymbol{x}) - v(\boldsymbol{x}_-,\boldsymbol{x})\big)$$

(až na multiplikativní konstantu vyjadřující permitivitu). Podle věty o střední hodnotě je

$$v(\boldsymbol{x}_+,\boldsymbol{x}) - v(\boldsymbol{x}_-,\boldsymbol{x}) = \frac{\partial v(\boldsymbol{x}_- + \vartheta\boldsymbol{d},\boldsymbol{x})}{\partial\boldsymbol{d}} = h\frac{\partial v(\boldsymbol{x}_- + \vartheta\boldsymbol{d},\boldsymbol{x})}{\partial\boldsymbol{d}_0},$$

kde $\vartheta \in [0,1]$ a $\dfrac{\partial}{\partial\boldsymbol{d}}$ označuje směrovou derivaci podle vektoru $\boldsymbol{d}$. Potenciál φ_{III} tedy můžeme vyjádřit vztahem

$$\varphi_{III}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi}N\frac{\partial v(\boldsymbol{x}_- + \vartheta\boldsymbol{d},\boldsymbol{x})}{\partial\boldsymbol{d}_0}.$$

Pokud vzdálenost nábojů h je malá ve srovnání se vzdáleností $|\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}|$ bodu $\boldsymbol{x}$ od dipólu, je

$$\frac{\partial v(\boldsymbol{x}_- + \vartheta\boldsymbol{d},\boldsymbol{x})}{\partial\boldsymbol{d}_0} \approx \frac{\partial v(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{x})}{\partial\boldsymbol{d}_0}$$

a potenciál dipólu s momentem velikosti N a směru $\boldsymbol{d}_0$ lze vyjádřit formulí

$$\varphi_{III}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi}N\frac{\partial v(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{x})}{\partial\boldsymbol{d}_0}. \tag{4.7}$$

4.3.4 Integrální representace dvakrát diferencovatelné funkce

Buď $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ohraničená oblast s dostatečně hladkou hranicí $\partial\Omega$, u funkce definovaná na $\overline{\Omega}$, která má na $\overline{\Omega}$ spojité parciální derivace druhého řádu. Pak pro každé $\boldsymbol{x} \in \Omega$ platí

$$u(\boldsymbol{x}) \;=\; \frac{1}{c_n}\int\limits_{\partial\Omega}\left(v(\boldsymbol{x},\cdot)\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{\nu}} - u\frac{\partial v(\boldsymbol{x},\cdot)}{\partial\boldsymbol{\nu}}\right)\mathrm{d}S \;-\; \frac{1}{c_n}\int\limits_{\Omega} v(\boldsymbol{x},\cdot)\Delta u\,\mathrm{d}V\,,$$

kde $v(\boldsymbol{x},\cdot)$ je fundamentální harmonická funkce se singularitou v $\boldsymbol{x}$, $\dfrac{\partial}{\partial\boldsymbol{\nu}}$ je derivace ve směru jednotkového vektoru vnější normály $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1,\nu_2,\dots,\nu_n)$, tj. $\dfrac{\partial}{\partial\boldsymbol{\nu}} = \nabla\cdot\boldsymbol{\nu}$ a

$$c_n = \begin{cases} 2\pi, & n = 2\\ (n-2)\sigma_n, & n \geq 3\end{cases},$$

kde σ_n je $(n-1)$-rozměrná míra jednotkové sféry v $\mathbb{R}^n$, $\sigma_{2k+1} = \dfrac{2^{k+1}\pi^k}{(2k-1)!!}$, $\sigma_{2k} = \dfrac{2\pi^k}{(k-1)!}$. (Zejména $c_3 = 4\pi$.) Nevlastní integrál na pravé straně rovnosti definujeme vztahem

$$\int\limits_{\Omega} v(\boldsymbol{x},\cdot)\Delta u\,\mathrm{d}V \;=\; \lim_{\varepsilon\to 0+}\int\limits_{\Omega\setminus K^\varepsilon_{\boldsymbol{x}}} v(\boldsymbol{x},\cdot)\Delta u\,\mathrm{d}V\,,$$

kde $K^\varepsilon_{\boldsymbol{x}}$ je koule se středem $\boldsymbol{x}$ a poloměrem ε.

D.: Důkaz provedeme pro $n \geq 3$, $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Označme $K_{\boldsymbol{x}}^a$, resp. $S_{\boldsymbol{x}}^a$ kouli, resp. sféru se středem $\boldsymbol{x}$ a poloměrem a. Buďte $\boldsymbol{x} \in \Omega$ a $\varepsilon > 0$ takové, že $K_{\boldsymbol{x}}^\varepsilon \subseteq \Omega$. Podle druhého Greenova vzorce platí

$$\int\limits_{\Omega \setminus K_{\boldsymbol{x}}^\varepsilon} (u\Delta v(\boldsymbol{x},\cdot) - v(\boldsymbol{x},\cdot)\Delta u)\,\mathrm{d}V =$$

$$= \int\limits_{\partial\Omega} \left(u\frac{\partial v(\boldsymbol{x},\cdot)}{\partial \boldsymbol{\nu}} - v(\boldsymbol{x},\cdot)\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} \right) \mathrm{d}S - \int\limits_{S_{\boldsymbol{x}}^\varepsilon} \left(u\frac{\partial v(\boldsymbol{x},\cdot)}{\partial \boldsymbol{\nu}} - v(\boldsymbol{x},\cdot)\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} \right) \mathrm{d}S\,,$$

Poněvadž funkce $v(\boldsymbol{x},\cdot)$ je na $\Omega \setminus K_{\boldsymbol{x}}^\varepsilon$ harmonická, je

$$-\int\limits_{\Omega \setminus K_{\boldsymbol{x}}^\varepsilon} v(\boldsymbol{x},\cdot)\Delta u\,\mathrm{d}V = \int\limits_{\partial\Omega} \left(u\frac{\partial v(\boldsymbol{x},\cdot)}{\partial \boldsymbol{\nu}} - v(\boldsymbol{x},\cdot)\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} \right) \mathrm{d}S + \int\limits_{S_{\boldsymbol{x}}^\varepsilon} \left(v(\boldsymbol{x},\cdot)\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} - u\frac{\partial v(\boldsymbol{x},\cdot)}{\partial \boldsymbol{\nu}} \right) \mathrm{d}S\,.$$

Normálový vektor k $S_{\boldsymbol{x}}^\varepsilon$ v bodě $\boldsymbol{y}$ má složky $\nu_i = \dfrac{1}{\varepsilon}(y_i - x_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$. Pro $\boldsymbol{y} \in S_{\boldsymbol{x}}^\varepsilon$ je

$$\frac{\partial v(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\partial y_i} = \frac{n-2}{\varepsilon^n}(x_i - y_i)\,,$$

takže pro $\boldsymbol{y} \in S_{\boldsymbol{x}}^\varepsilon$ je

$$\frac{\partial v(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\partial \boldsymbol{\nu}} = -\frac{n-2}{\varepsilon^{n+1}}\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 = -\frac{n-2}{\varepsilon^{n-1}}\,.$$

Dále podle věty o střední hodnotě integrálního počtu existuje $\boldsymbol{\xi} \in S_{\boldsymbol{x}}^\varepsilon$, že

$$\int\limits_{S_{\boldsymbol{x}}^\varepsilon} u\frac{\partial v(\boldsymbol{x},\cdot)}{\partial \boldsymbol{\nu}}\,\mathrm{d}S = u(\boldsymbol{\xi})\int\limits_{S_{\boldsymbol{x}}^\varepsilon} \frac{\partial v(\boldsymbol{x},\cdot)}{\partial \boldsymbol{\nu}}\,\mathrm{d}S = -u(\boldsymbol{\xi})\int\limits_{S_{\boldsymbol{x}}^\varepsilon} \frac{n-2}{\varepsilon^{n-1}}\,\mathrm{d}S = -u(\boldsymbol{\xi})\frac{n-2}{\varepsilon^{n-1}}\sigma_n\varepsilon^{n-1} =$$

$$= -(n-2)\sigma_n u(\boldsymbol{\xi})\,,$$

takže

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{S_{\boldsymbol{x}}^\varepsilon} u\frac{\partial v(\boldsymbol{x},\cdot)}{\partial \boldsymbol{\nu}}\,\mathrm{d}S = -(n-2)\sigma_n u(\boldsymbol{x})\,.$$

Poněvadž $\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}$ je spojitá na $S_{\boldsymbol{x}}^\varepsilon$, existuje podle 1. Weierstrassovy věty $K \in \mathbb{R}$ takové, že $\left|\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}\right| \leq K$ pro každý bod na $S_{\boldsymbol{x}}^\varepsilon$. Tedy

$$\left| \int\limits_{S_{\boldsymbol{x}}^\varepsilon} v(\boldsymbol{x},\cdot)\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}\,\mathrm{d}S \right| \leq K\int\limits_{S_{\boldsymbol{x}}^\varepsilon} \frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^{n-2}}\,\mathrm{d}S_{\boldsymbol{y}} = \frac{K}{\varepsilon^{n-2}}\sigma_n\varepsilon^{n-1} = K\sigma_n\varepsilon\,,$$

takže

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{S_{\boldsymbol{x}}^\varepsilon} v(\boldsymbol{x},\cdot)\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}\,\mathrm{d}S = 0\,.$$

□

Důsledky:

1. Je-li funkce u navíc harmonická na Ω, platí pro každé $\boldsymbol{x} \in \Omega$

$$u(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{c_n}\int\limits_{\partial\Omega} \left(v(\boldsymbol{x},\cdot)\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} - u\frac{\partial v(\boldsymbol{x},\cdot)}{\partial \boldsymbol{\nu}} \right) \mathrm{d}S\,. \tag{4.8}$$

2. Pro každou nekonečněkrát diferencovatelnou funkci ψ s kompaktním nosičem (sr. A.1) platí

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi \Delta v(\boldsymbol{x}, \cdot) \mathrm{d}V = -c_n \psi(\boldsymbol{x}),$$

neboli

$$\Delta_{\boldsymbol{y}} v(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = -c_n \delta(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}), \tag{4.9}$$

kde δ je Diracova distribuce.

D.: $\Delta_{\boldsymbol{y}} v(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ je distribuce, která splňuje

$$\left\langle \Delta_{\boldsymbol{y}} v(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \;\middle|\; \psi(\boldsymbol{y}) \right\rangle = \left\langle v(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \;\middle|\; \Delta \psi(\boldsymbol{y}) \right\rangle$$

pro každou nekonečněkrát diferencovatelnou funkci ψ s kompaktním nosičem (sr. A.3). Buď $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ taková oblast s hladkou hranicí, že $\operatorname{Supp} \psi \subseteq \Omega$.
Pak pro $\boldsymbol{y} \in \partial\Omega$ je $\psi(\boldsymbol{y}) = 0 = \dfrac{\partial \psi(\boldsymbol{y})}{\partial \boldsymbol{\nu}}$ a tedy s využitím předchozí věty dostaneme

$$\left\langle \Delta_{\boldsymbol{y}} v(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \;\middle|\; \psi(\boldsymbol{y}) \right\rangle = \left\langle v(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \;\middle|\; \Delta \psi(\boldsymbol{y}) \right\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^n} v(\boldsymbol{x}, \cdot) \Delta \psi \mathrm{d}V = \int\limits_{\Omega} v(\boldsymbol{x}, \cdot) \Delta \psi \mathrm{d}V =$$

$$= -c_n \left(\psi(\boldsymbol{x}) - \frac{1}{c_n} \int\limits_{\partial\Omega} \left(v(\boldsymbol{x}, \cdot) \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\nu}} - \psi \frac{\partial v(\boldsymbol{x}, \cdot)}{\partial \boldsymbol{\nu}} \right) \mathrm{d}S \right) = -c_n \psi(\boldsymbol{x}).$$

□

4.3.5 Vlastnosti harmonických funkcí

Buď $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ohraničená oblast s dostatečně hladkou hranicí $\partial\Omega$, u harmonická funkce se spojitými druhými parciálními derivacemi na $\overline{\Omega}$. Pak platí

1. $$\int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} \mathrm{d}S = 0.$$

D.: Ve druhém Greenově vzorci stačí položit $v \equiv 1$. □

2. Věta o střední hodnotě
Buď $\boldsymbol{x} \in \Omega$, $S^a_{\boldsymbol{x}}$ sféra se středem $\boldsymbol{x}$ a poloměrem a taková, že $S^a_{\boldsymbol{x}} \subseteq \Omega$. Pak

$$u(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2\pi a} \int\limits_{S^a_{\boldsymbol{x}}} u \,\mathrm{d}S, \qquad \text{pro } n = 2,$$

$$u(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi a^2} \int\limits_{S^a_{\boldsymbol{x}}} u \,\mathrm{d}S, \qquad \text{pro } n = 3,$$

$$u(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\sigma_n a^{n-1}} \int\limits_{S^a_{\boldsymbol{x}}} u \,\mathrm{d}S, \qquad \text{pro } n > 3,$$

kde σ_n je číslo zavedené v 4.3.4.

D.: Důkaz provedeme pro $n \geq 3$, $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.
Je $\nu_i = \dfrac{1}{a}(y_i - x_i)$. Pro $\boldsymbol{y} \in S^a_{\boldsymbol{x}}$ platí $v(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \dfrac{1}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|^{n-2}} = \dfrac{1}{a^{n-2}}$, takže podle 1. je

$$\int\limits_{S^a_{\boldsymbol{x}}} v(\boldsymbol{x}, \cdot) \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} \mathrm{d}S = \frac{1}{a^{n-1}} \int\limits_{S^a_{\boldsymbol{x}}} \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} \mathrm{d}S = 0.$$

Dále pro $\boldsymbol{y} \in S^a_{\boldsymbol{x}}$ je

$$\frac{\partial v(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\partial \boldsymbol{\nu}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\partial y_i}\nu_i = \frac{1}{a}\sum_{i=1}^{n} \frac{(2-n)(y_i-x_i)}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^n}(y_i-x_i) = \frac{2-n}{a|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^{n-2}} = \frac{2-n}{a^{n-1}},$$

takže

$$\int\limits_{S^a_{\boldsymbol{x}}} u\frac{\partial v(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\partial \boldsymbol{\nu}}\,\mathrm{d}S = \frac{2-n}{a^{n-1}}\int\limits_{S^a_{\boldsymbol{x}}} u\,\mathrm{d}S\,.$$

Podle (4.8) je

$$u(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{c_n}\int\limits_{S^a_{\boldsymbol{x}}}\left(v(\boldsymbol{x},\cdot)\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} - u\frac{\partial v(\boldsymbol{x},\cdot)}{\partial \boldsymbol{\nu}}\right)\mathrm{d}S = \frac{n-2}{c_n a^{n-1}}\int\limits_{S^a_{\boldsymbol{x}}} u\,\mathrm{d}S = \frac{1}{\sigma_n a^{n-1}}\int\limits_{S^a_{\boldsymbol{x}}} u\,\mathrm{d}S\,.$$

□

3. Princip maxima
Je-li harmonická funkce u nekonstantní na oblasti Ω, pak nabývá své největší a nejmenší hodnoty na hranici $\partial\Omega$, tj. pro každé $\boldsymbol{x} \in \Omega$ platí

$$\min\{u(\boldsymbol{y}) : \boldsymbol{y} \in \partial\Omega\} < u(\boldsymbol{x}) < \max\{u(\boldsymbol{y}) : \boldsymbol{y} \in \partial\Omega\}\,.$$

D.: Plyne z předchozího tvrzení. □

4.4 Metoda potenciálů

V celém oddílu bude $v(\boldsymbol{x},\cdot)$ označovat fundamentální harmonickou funkci se singularitou v $\boldsymbol{x}$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ oblast s hladkou hranicí $\partial\Omega$, $\dfrac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu}}$ derivaci ve směru jednotkového vektoru vnější normály k $\partial\Omega$, c_n číslo zavedené v 4.3.4.

Nejprve provedeme heuristickou úvahu. Představme si, že v omezené oblasti $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ je rozložen elektrický náboj, jeho hustotu v bodě $\boldsymbol{y} \in \Omega$ označíme $\varrho(\boldsymbol{y})$. Náboj objemového elementu $\mathrm{d}V_{\boldsymbol{y}}$ v okolí bodu $\boldsymbol{y}$ tedy je $\varrho(\boldsymbol{y})\mathrm{d}V_{\boldsymbol{y}}$ a potenciál tohoto elementu v bodě $\boldsymbol{x} \notin \bar{\Omega}$ je podle (4.6) a (4.4) roven

$$\mathrm{d}\varphi(\boldsymbol{x}) = \frac{\varrho(\boldsymbol{y})\mathrm{d}V_{\boldsymbol{y}}}{4\pi}v(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) = \frac{1}{c_3}\varrho(\boldsymbol{y})v(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\mathrm{d}V_{\boldsymbol{y}}$$

(až na multiplikativní konstantu vyjadřující permitivitu prostředí). Celkový potenciál náboje rozloženého v oblasti Ω tedy je

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{c_3}\int\limits_{\Omega} \varrho v(\boldsymbol{x},\cdot)\mathrm{d}V.$$

Pokud by byl elektrický náboj rozložen pouze na hranici oblasti Ω (na povrchu tělesa) a v bodě $\boldsymbol{y} \in \partial\Omega$ by měl plošnou hustotu $\mu = \mu(\boldsymbol{y})$ (tj. náboj plošného elementu $\mathrm{d}S_{\boldsymbol{y}}$ v okolí bodu $\boldsymbol{y}$ by byl $\mu(\boldsymbol{y})\mathrm{d}S_{\boldsymbol{y}}$), jeho potenciál v bodě $\boldsymbol{x} \notin \partial\Omega$ by se rovnal

$$\varphi_{II}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{c_3}\int\limits_{\partial\Omega} \mu v(\boldsymbol{x},\cdot)\mathrm{d}S.$$

Uvažujme dále dipóly rozmístěné na hranici oblasti Ω s hustotou λ a orientované ve směru vnější normály, tj. dipólový moment plošného elementu $\mathrm{d}S_{\boldsymbol{y}}$ v okolí bodu $\boldsymbol{y} \in \partial\Omega$ má velikost $N_{\boldsymbol{y}} = \lambda(\boldsymbol{y})\mathrm{d}S_{\boldsymbol{y}}$ a orientaci $\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\nu}_{\boldsymbol{y}}$. Potenciál plošného elementu $\mathrm{d}S_{\boldsymbol{y}}$ v bodě $\boldsymbol{x} \notin \partial\Omega$ je podle (4.7) a (4.4) roven

$$\mathrm{d}\varphi_{III}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi}\lambda(\boldsymbol{y})\mathrm{d}S_{\boldsymbol{y}}\frac{\partial v(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{\nu}_{\boldsymbol{y}}} = \frac{1}{c_3}\lambda(\boldsymbol{y})\frac{\partial v(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\partial \boldsymbol{\nu}_{\boldsymbol{y}}}\mathrm{d}S_{\boldsymbol{y}}.$$

V bodě $\boldsymbol{x}$ je tedy celkový potenciál hranice oblasti roven plošnému integrálu

$$\varphi_{III}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{c_3}\int\limits_{\partial\Omega} \lambda\frac{\partial v(\boldsymbol{x},\cdot)}{\partial \boldsymbol{\nu}}\mathrm{d}S.$$

Tento výraz lze interpretovat jako elektrostatický potenciál tenké nevodivé plochy (povrchu tělesa), na jejíž vnější straně je rozmístěn elektrický náboj a na vnitřní straně je stejně rozmístěn stejně velký náboj opačného znaménka.

4.4.1 Objemový potenciál

Nechť $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ je ohraničená a $\varrho : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ je funkce.
Funkce $\varphi_I : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definovaná pro každé $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ vztahem

$$\varphi_I(\boldsymbol{x}) \;=\; \frac{1}{c_n} \int\limits_{\Omega} \varrho v(\boldsymbol{x}, \cdot)\, \mathrm{d}V$$

se nazývá *objemový potenciál.*

- Je-li funkce ϱ spojitá na $\overline{\Omega}$, pak φ_I je harmonickou funkcí na $\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$ pro $n \geq 3$. Je-li $n = 2$ a funkce ϱ je navíc nezáporná, je φ_I harmonickou funkcí na $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Omega}$.

  D.: Z toho, že funkce f je spojitá na kompaktní množině $\bar{\Omega}$ plyne, že následující výpočet je korektní.

  $$\Delta\varphi_I(\boldsymbol{x}) \;=\; \frac{1}{c_n} \int\limits_{\Omega} \Delta_{\boldsymbol{x}} \left(\varrho v(\boldsymbol{x}, \cdot)\right) \mathrm{d}V \;=\; \frac{1}{c_n} \int\limits_{\Omega} \varrho \Delta_{\boldsymbol{x}} v(\boldsymbol{x}, \cdot) \mathrm{d}V \;=\; \frac{1}{c_n} \int\limits_{\Omega} \varrho(\boldsymbol{y}) \Delta_{\boldsymbol{y}} v(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \mathrm{d}V_{\boldsymbol{y}} \;=\; 0.$$

  Předposlední rovnost plyne z (4.5), poslední z toho, že pro $\boldsymbol{x} \notin \bar{\Omega}$ je $v(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ harmonická v každém $\boldsymbol{y} \in \Omega$.
  Dále pro $n \geq 3$ platí

  $$\lim_{|\boldsymbol{x}| \to \infty} |\boldsymbol{x}|^{n-2} \varphi_I(\boldsymbol{x}) \;=\; \frac{1}{c_n} \int\limits_{\Omega} \varrho \lim_{|\boldsymbol{x}| \to \infty} |\boldsymbol{x}|^{n-2} v(\boldsymbol{x}, \cdot) \mathrm{d}V \;=\; \frac{1}{c_n} \int\limits_{\Omega} \varrho \mathrm{d}V \;<\; \infty.$$

  Je-li $n = 2$ a $\varrho \geq 0$ na Ω, pak

  $$\lim_{|\boldsymbol{x}| \to \infty} \varphi_I(\boldsymbol{x}) \;=\; \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Omega} \varrho \lim_{|\boldsymbol{x}| \to \infty} v(\boldsymbol{x}, \cdot) \mathrm{d}V \;=\; -\infty \;<\; \infty.$$

  □

- Má-li funkce ϱ spojité parciální derivace prvního řádu na Ω a je spojitá na $\overline{\Omega}$, pak φ_I má spojité parciální derivace druhého řádu na Ω a platí

  $$\Delta\varphi_I \;=\; -\varrho\,.$$

  D.: Pro $\boldsymbol{x} \in \Omega$ dostaneme s využitím (4.5) a (4.9)

  $$\Delta\varphi_I(\boldsymbol{x}) \;=\; \frac{1}{c_n} \int\limits_{\Omega} \Delta_{\boldsymbol{x}} \big(\varrho v(\boldsymbol{x}, \cdot)\big) \mathrm{d}V \;=\; \frac{1}{c_n} \int\limits_{\Omega} \varrho \Delta_{\boldsymbol{x}} v(\boldsymbol{x}, \cdot) \mathrm{d}V \;=\; \frac{1}{c_n} \int\limits_{\Omega} \varrho \Delta_{\boldsymbol{x}} v(\cdot, \boldsymbol{x}) \mathrm{d}V \;=$$
  $$=\; \frac{1}{c_n} \int\limits_{\Omega} \varrho(\boldsymbol{y}) \Delta_{\boldsymbol{x}} v(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) \mathrm{d}V_{\boldsymbol{y}} \;=\; -\frac{1}{c_n} \int\limits_{\Omega} \varrho(\boldsymbol{y}) c_n \delta(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}) \mathrm{d}V_{\boldsymbol{y}} \;=\; -\varrho(\boldsymbol{x}).$$

  □

4.4.2 Řešení Dirichletovy úlohy pro Poissonovu rovnici

$$\begin{aligned} \Delta u(\boldsymbol{x}) \;&=\; f(\boldsymbol{x})\,, \qquad \boldsymbol{x} \in \Omega\,, \\ u(\boldsymbol{x}) \;&=\; g(\boldsymbol{x})\,, \qquad \boldsymbol{x} \in \partial\Omega\,, \end{aligned}$$

kde Ω je ohraničená oblast s dostatečně hladkou hranicí.
Řešení hledáme ve tvaru $u(\boldsymbol{x}) = w(\boldsymbol{x}) - \varphi(\boldsymbol{x})$, kde

$$\varphi(\boldsymbol{x}) \;=\; \varphi(x_1, \ldots, x_n) \;=\; \frac{1}{c_n} \int\limits_{\Omega} f(\xi_1, \ldots, \xi_n) v(x_1, \ldots, x_n, \xi_1, \ldots, \xi_n)\, \mathrm{d}\xi_1 \cdots \mathrm{d}\xi_n$$

a w je řešením Dirichletovy úlohy pro Laplaceovu rovnici

$$\begin{aligned} \Delta w(\boldsymbol{x}) \;&=\; 0\,, \qquad \boldsymbol{x} \in \Omega\,, \\ w(\boldsymbol{x}) \;&=\; g(\boldsymbol{x}) + \varphi(\boldsymbol{x})\,, \qquad \boldsymbol{x} \in \partial\Omega\,. \end{aligned}$$

4.4.3 Plošné potenciály

Buďte $\mu, \lambda : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ funkce takové, že v případě neohraničenosti $\partial\Omega$ platí

$$\lim_{\boldsymbol{x}\in\partial\Omega, |\boldsymbol{x}|\to\infty} |\boldsymbol{x}|^{n-2}\mu(\boldsymbol{x}) \;=\; 0\,, \qquad \lim_{\boldsymbol{x}\in\partial\Omega, |\boldsymbol{x}|\to\infty} |\boldsymbol{x}|^{n-2}\lambda(\boldsymbol{x}) \;=\; 0\,.$$

Funkce $\varphi_{II} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definovaná pro každé $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ vztahem

$$\varphi_{II}(\boldsymbol{x}) \;=\; \frac{1}{c_n} \int\limits_{\partial\Omega} \mu v(\boldsymbol{x}, \cdot)\, \mathrm{d}S$$

se nazývá *potenciál jednoduché vrstvy.*
Funkce $\varphi_{III} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definovaná pro každé $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ vztahem

$$\varphi_{III}(\boldsymbol{x}) \;=\; \frac{1}{c_n} \int\limits_{\partial\Omega} \lambda \frac{\partial v(\boldsymbol{x}, \cdot)}{\partial \boldsymbol{\nu}}\, \mathrm{d}S$$

se nazývá *potenciál dvojvrstvy.*

- Jsou-li funkce μ, λ spojité na $\partial\Omega$, pak funkce φ_{II} a φ_{III} jsou harmonické na $\mathbb{R}^n \setminus \partial\Omega$.

  D.: Důkaz je analogií důkazu analogického tvrzení pro objemový potenciál. □

  Každý z integrálů φ_{II}, φ_{III} určuje vlastně dvě funkce. Jednu funkci harmonickou na Ω a druhou harmonickou na $\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$.

- Buď $\boldsymbol{x}_0 \in \partial\Omega$ a ψ funkce definovaná v okolí bodu $\boldsymbol{x}_0$. Označme

  $$[\psi(\boldsymbol{x}_0)]_I \;=\; \lim_{\Omega\ni\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0} \psi(\boldsymbol{x})\,, \qquad [\psi(\boldsymbol{x}_0)]_E \;=\; \lim_{\mathbb{R}^n\setminus\overline{\Omega}\ni\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0} \psi(\boldsymbol{x})\,,$$

  za předpokladu, že tyto limity existují.
  Pro každý bod $\boldsymbol{x} \in \partial\Omega$ platí

  $$\left[\frac{\partial\varphi_{II}(\boldsymbol{x})}{\partial\boldsymbol{\nu}}\right]_I \;=\; \frac{\partial\varphi_{II}(\boldsymbol{x})}{\partial\boldsymbol{\nu}} + \frac{1}{2}\mu(\boldsymbol{x})\,, \qquad \left[\frac{\partial\varphi_{II}(\boldsymbol{x})}{\partial\boldsymbol{\nu}}\right]_E \;=\; \frac{\partial\varphi_{II}(\boldsymbol{x})}{\partial\boldsymbol{\nu}} - \frac{1}{2}\mu(\boldsymbol{x})\,, \tag{4.10}$$

  $$[\varphi_{III}(\boldsymbol{x})]_I \;=\; \varphi_{III}(\boldsymbol{x}) - \frac{1}{2}\lambda(\boldsymbol{x})\,, \qquad [\varphi_{III}(\boldsymbol{x})]_E \;=\; \varphi_{III}(\boldsymbol{x}) + \frac{1}{2}\lambda(\boldsymbol{x})\,. \tag{4.11}$$

  D.: A. N. Tichonov, A. A. Samarskij: Rovnice matematické fysiky, Praha 1955, str. 395–402. □

  Derivace potenciálu jednoduché vrstvy ve směru vnější normály má tedy na $\partial\Omega$ nespojitost prvního druhu se skokem velikosti

  $$\left[\frac{\partial\varphi_{II}(\boldsymbol{x})}{\partial\boldsymbol{\nu}}\right]_E - \left[\frac{\partial\varphi_{II}(\boldsymbol{x})}{\partial\boldsymbol{\nu}}\right]_I \;=\; -\mu(\boldsymbol{x})\,,$$

  potenciál dvojvrstvy má na $\partial\Omega$ nespojitost prvního druhu se skokem velikosti

  $$[\varphi_{III}(\boldsymbol{x})]_E - [\varphi_{III}(\boldsymbol{x})]_I \;=\; \lambda(\boldsymbol{x})\,.$$

Podle 4.3.4 lze každou dvakrát spojitě diferencovatelnou funkci u vyjádřit jako součet potenciálu objemového, jednoduché vrstvy a dvojvrstvy, přičemž

$$\varrho \;=\; -\Delta u\,, \qquad \mu \;=\; \frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{\nu}}\,, \qquad \lambda \;=\; -u\,.$$

Proto se 4.3.4 někdy nazývá věta o třech potenciálech.

4.4.4 Řešení okrajových úloh pro Laplaceovu rovnici

Budeme řešit některou z rovnic

$$\Delta u(\boldsymbol{x}) = 0\,, \quad \boldsymbol{x} \in \Omega\,, \tag{4.12}$$

$$\Delta u(\boldsymbol{x}) = 0\,, \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}\,, \tag{4.13}$$

s některou z okrajových podmínek

$$u(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})\,, \quad \boldsymbol{x} \in \partial\Omega\,, \tag{4.14}$$

$$\frac{\partial u(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{\nu}} = f(\boldsymbol{x})\,, \quad \boldsymbol{x} \in \partial\Omega\,. \tag{4.15}$$

Úloha	(4.12), (4.14)	se nazývá	*vnitřní Dirichletova úloha,*
	(4.13), (4.14)		*vnější Dirichletova úloha,*
	(4.12), (4.15)		*vnitřní Neumannova úloha,*
	(4.13), (4.15)		*vnější Neumannova úloha.*

Řešení Dirichletovy úlohy hledáme ve tvaru potenciálu dvojvrstvy

$$u(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{c_n} \int\limits_{\partial\Omega} \lambda \frac{\partial v(\boldsymbol{x}, \cdot)}{\partial \boldsymbol{\nu}} \,\mathrm{d}S\,,$$

kde λ je zatím neurčená funkce. Pro každé $\boldsymbol{x} \in \partial\Omega$ je podle (4.11)

$$[u(\boldsymbol{x})]_I + \frac{1}{2}\lambda(\boldsymbol{x}) = u(\boldsymbol{x}) = [u(\boldsymbol{x})]_E - \frac{1}{2}\lambda(\boldsymbol{x})\,.$$

Označme

$$K(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{s}) = \frac{\partial v(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{s})}{\partial \boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{s})} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{s})}{\partial s_i} \nu_i(\boldsymbol{s})\,.$$

Pak

$$u(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{c_n} \int\limits_{\partial\Omega} \lambda K(\boldsymbol{x}, \cdot) \,\mathrm{d}S\,.$$

Při řešení vnitřní úlohy musí být $[u(\boldsymbol{x})]_I = f(\boldsymbol{x})$, tedy funkce λ musí splňovat integrální rovnici

$$-\frac{1}{2}\lambda(\boldsymbol{x}) + \frac{1}{c_n} \int\limits_{\partial\Omega} \lambda K(\boldsymbol{x}, \cdot) \,\mathrm{d}S = f(\boldsymbol{x})\,,$$

při řešení vnější úlohy musí být $[u(\boldsymbol{x})]_E = f(\boldsymbol{x})$, tedy funkce λ musí splňovat integrální rovnici

$$\frac{1}{2}\lambda(\boldsymbol{x}) + \frac{1}{c_n} \int\limits_{\partial\Omega} \lambda K(\boldsymbol{x}, \cdot) \,\mathrm{d}S = f(\boldsymbol{x})\,.$$

Řešení Neumannovy úlohy hledáme ve tvaru potenciálu jednoduché vrstvy

$$u(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{c_n} \int\limits_{\partial\Omega} \mu v(\boldsymbol{x}, \cdot) \,\mathrm{d}S\,,$$

kde μ je zatím neurčená funkce. Pro každé $\boldsymbol{x} \in \partial\Omega$ je podle (4.10)

$$\left[\frac{\partial u(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{\nu}}\right]_I - \frac{1}{2}\mu(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial u(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{\nu}} = \left[\frac{\partial u(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{\nu}}\right]_E + \frac{1}{2}\mu(\boldsymbol{x})\,.$$

Platí

$$\frac{\partial u(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{\nu}} = \frac{\partial u(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{x})} = \frac{1}{c_n} \int\limits_{\partial\Omega} \mu \frac{\partial v(\boldsymbol{x}, \cdot)}{\partial \boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{x})} \,\mathrm{d}S\,.$$

Označme

$$L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{s}) \;=\; \frac{\partial v(\boldsymbol{x},\boldsymbol{s})}{\partial \boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{x})} \;=\; \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v(\boldsymbol{x},\boldsymbol{s})}{\partial x_i}\nu_i(\boldsymbol{x})\,.$$

Pak

$$\frac{\partial u(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{\nu}} \;=\; \frac{1}{c_n}\int\limits_{\partial\Omega} \mu L(\boldsymbol{x},\cdot)\,\mathrm{d}S\,.$$

Při řešení vnitřní úlohy musí být $\left[\dfrac{\partial u(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{\nu}}\right]_I = f(\boldsymbol{x})$, tedy funkce μ musí splňovat integrální rovnici

$$\frac{1}{2}\mu(\boldsymbol{x}) + \frac{1}{c_n}\int\limits_{\partial\Omega} \mu L(\boldsymbol{x},\cdot)\,\mathrm{d}S \;=\; f(\boldsymbol{x})\,,$$

při řešení vnější úlohy musí být $\left[\dfrac{\partial u(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{\nu}}\right]_E = f(\boldsymbol{x})$, tedy funkce μ musí splňovat integrální rovnici

$$-\frac{1}{2}\mu(\boldsymbol{x}) + \frac{1}{c_n}\int\limits_{\partial\Omega} \mu L(\boldsymbol{x},\cdot)\,\mathrm{d}S \;=\; f(\boldsymbol{x})\,.$$

Výrazy $K(\cdot,\cdot)$ a $L(\cdot,\cdot)$ nazýváme *jádro* příslušné integrální rovnice.

Příklady:

• Dirichletova úloha na polorovině

$$\Delta u(x,y) \;=\; 0\,, \qquad x\in\mathbb{R},\ y>0\,, \tag{4.16}$$

$$u(x,0) \;=\; f(x)\,, \qquad x\in\mathbb{R}\,. \tag{4.17}$$

V tomto případě je

$$v(x,y,\xi,\eta) \;=\; -\frac{1}{2}\ln\big((x-\xi)^2+(y-\eta)^2\big)\,,$$

$$\frac{\partial v(x,y,\xi,\eta)}{\partial \xi} \;=\; \frac{x-\xi}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}\,, \qquad \frac{\partial v(x,y,\xi,\eta)}{\partial \eta} \;=\; \frac{y-\eta}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}\,,$$

$$\boldsymbol{\nu}(\xi,\eta) \;=\; (0,-1)\,,\ \text{pro } \eta=0\,, \qquad K(x,y,\xi,\eta) \;=\; \frac{\eta-y}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}\,.$$

Jádro integrání rovnice je $K(x,0,\xi,0)=0$, takže funkce $\lambda=\lambda(x)$ musí splňovat rovnici

$$-\frac{1}{2}\lambda(x) \;=\; f(x)\,,$$

tedy $\lambda(x) = -2f(x)$ a řešení dané úlohy je

$$u(x,y) \;=\; \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\frac{y}{(x-\xi)^2+y^2}\,\mathrm{d}\xi\,. \tag{4.18}$$

• Neumannova úloha na polorovině

$$\Delta u(x,y) \;=\; 0\,, \qquad x\in\mathbb{R},\ y>0\,,$$

$$-u_y(x,0) \;=\; f(x)\,, \qquad x\in\mathbb{R}\,.$$

V tomto případě je

$$v(x,y,\xi,\eta) \;=\; -\frac{1}{2}\ln\big((x-\xi)^2+(y-\eta)^2\big)\,, \qquad \boldsymbol{\nu}(x,y) \;=\; (0,-1)\,,\ \text{pro } y=0,$$

takže

$$L(x,y,\xi,\eta) \;=\; \frac{\partial v(x,y,\xi,\eta)}{\partial \boldsymbol{\nu}(x,y)} = \frac{y-\eta}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}, \qquad L(x,0,\xi,0) \;=\; 0.$$

Funkce μ tedy splňuje rovnici

$$\frac{1}{2}\mu(x) = f(x),$$

tj. $\mu(x) = 2f(x)$ a řešení dané úlohy je

$$u(x,y) \;=\; \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} 2f(\xi)\left(-\frac{1}{2}\ln\big((x-\xi)^2-(y-0)^2\big)\right)\mathrm{d}\xi \;=\; -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\ln\big((x-\xi)^2+y^2\big)\,\mathrm{d}\xi.$$

• Dirichletova úloha na kruhu

$$\begin{aligned} \Delta u(x,y) \;&=\; 0\,, \qquad x^2+y^2<R^2\,,\\ u(x,y) \;&=\; f(x,y)\,, \qquad x^2+y^2=R^2\,. \end{aligned}$$

V tomto případě je

$$v(x,y,\xi,\eta) \;=\; -\frac{1}{2}\ln\big((x-\xi)^2+(y-\eta)^2\big)\,,$$

$$\frac{\partial v(x,y,\xi,\eta)}{\partial \xi} \;=\; \frac{x-\xi}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}\,, \qquad \frac{\partial v(x,y,\xi,\eta)}{\partial \eta} \;=\; \frac{y-\eta}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}\,,$$

$$\Omega = K^R_{(0,0)} = \big\{(\xi,\eta)\in\mathbb{R}^2 : \xi^2+\eta^2<R^2\big\}\,, \qquad \partial\Omega = S^R_{(0,0)} = \big\{(\xi,\eta)\in\mathbb{R}^2 : \xi^2+\eta^2=R^2\big\}\,,$$

$$\boldsymbol{\nu}(\xi,\eta) \;=\; \frac{1}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}(\xi,\eta) = \frac{1}{R}(\xi,\eta), \qquad \frac{\partial v(x,y,\xi,\eta)}{\partial \boldsymbol{\nu}} = \frac{x\xi+y\eta-\xi^2-\eta^2}{R\,((x-\xi)^2+(y-\eta)^2)}.$$

Řešení úlohy hledáme ve tvaru potenciálu dvojvrstvy

$$u(x,y) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\partial\Omega}\lambda(\xi,\eta)\frac{x\xi+y\eta-\xi^2-\eta^2}{R\,((x-\xi)^2+(y-\eta)^2)}\mathrm{d}S_{(\xi,\eta)} = \frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi}\lambda(\sigma)\frac{xR\cos\sigma+yR\sin\sigma-R^2}{x^2+y^2+R^2-2R(x\cos\sigma+y\sin\sigma)}\mathrm{d}\sigma.$$

Funkci u lze vyjádřit také v polárních souřadnicích

$$u(r,\varphi) = \frac{R}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\lambda(\sigma)\frac{r\cos\varphi\cos\sigma+r\sin\varphi\sin\sigma-R}{r^2+R^2-2Rr(\cos\varphi\cos\sigma+\sin\varphi\sin\sigma)}\mathrm{d}\sigma = \frac{R}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\lambda(\sigma)\frac{r\cos(\varphi-\sigma)-R}{r^2+R^2-2Rr\cos(\varphi-\sigma)}\mathrm{d}\sigma.$$

Podle (4.11) musí funkce λ splňovat integrální rovnici

$$u(R,\varphi)+\frac{1}{2}\lambda(\varphi) = \frac{R}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\lambda(\sigma)\frac{R\cos(\varphi-\sigma)-R}{R^2+R^2-2Rr\cos(\varphi-\sigma)}\mathrm{d}\sigma.$$

Při označení $g(\varphi) = f(R\cos\varphi, R\sin\varphi)$ dostaneme

$$g(\varphi)+\frac{1}{2}\lambda(\varphi) = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi}\lambda(\sigma)\mathrm{d}\sigma. \tag{4.19}$$

Výraz na pravé straně nezávisí na φ, takže derivováním podle φ dostaneme obyčejnou diferenciální rovnici

$$g'(\varphi)+\frac{1}{2}\lambda'(\varphi) = 0,$$

jejíž řešení je $\lambda(\varphi) = C - 2g(\varphi)$. Hodnotu integrační konstanty C zjistíme dosazením do původní integrální rovnice (4.19):

$$g(\varphi)+\frac{C}{2}-g(\varphi) = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi}\big(C-2g(\sigma)\big)\mathrm{d}\sigma,$$

tedy $C = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} g(s)\mathrm{d}s$ a řešení dané úlohy je

$$u(r,\varphi) = \frac{R}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} g(s)\mathrm{d}s - 2g(\sigma)\right)\frac{r\cos(\varphi-\sigma)-R}{R^2+r^2-2Rr\cos(\varphi-\sigma)}\mathrm{d}\sigma =$$

$$= \frac{R}{4\pi^2}\int\limits_0^{2\pi} g(s)\mathrm{d}s\int\limits_0^{2\pi}\frac{r\cos(\varphi-\sigma)-R}{R^2+r^2-2Rr\cos(\varphi-\sigma)}\mathrm{d}\sigma - \frac{R}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} g(\sigma)\frac{r\cos(\varphi-\sigma)-R}{R^2+r^2-2Rr\cos(\varphi-\sigma)}\mathrm{d}\sigma.$$

Druhý integrál v prvním členu pravé strany upravíme:

$$R\int\limits_0^{2\pi}\frac{r\cos(\varphi-\sigma)-R}{R^2+r^2-2Rr\cos(\varphi-\sigma)}\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{R}\int\limits_0^{2\pi}\frac{Rr\cos\varphi\cos\sigma+Rr\sin\varphi\sin\sigma-R^2}{R^2+r^2-2Rr\cos\varphi\cos\sigma-2Rr\sin\varphi\sin\sigma}R\mathrm{d}\sigma =$$

$$= \frac{1}{R}\int\limits_0^{2\pi}\frac{r\cos\varphi R\cos\sigma+r\sin\varphi R\sin\sigma-R^2}{(r\cos\varphi-R\cos\sigma)^2+(r\sin\varphi-R\sin\sigma)^2}R\mathrm{d}\sigma =$$

$$= \frac{1}{R}\int\limits_{\partial\Omega}\frac{x\xi+y\eta-R^2}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}\mathrm{d}S_{(\xi,\eta)} = \int\limits_{\partial\Omega}\frac{\partial v(x,y,\xi,\eta)}{\partial\boldsymbol{\nu}}\mathrm{d}S_{(\xi,\eta)}.$$

V prvním Greenově vzorci položíme $u \equiv 1$ a využijeme vlastnost (4.9); tak dostaneme hodnotu posledního inegrálu

$$\int\limits_{\partial\Omega}\frac{\partial v(x,y,\xi,\eta)}{\partial\boldsymbol{\nu}}\mathrm{d}S_{(\xi,\eta)} = \int\limits_{\Omega}\Delta v(x,y,\xi,\eta)\mathrm{d}V_{(\xi,\eta)} = -2\pi.$$

Řešení dané úlohy tedy můžeme vyjádřit ve tvaru

$$u(r,\varphi) = \frac{1}{4\pi^2}(-2\pi)\int\limits_0^{2\pi} g(s)\mathrm{d}s - \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} g(\sigma)\frac{Rr\cos(\varphi-\sigma)-R^2}{R^2+r^2-2Rr\cos(\varphi-\sigma)}\mathrm{d}\sigma =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} g(\sigma)\left(\frac{1}{2}+\frac{Rr\cos(\varphi-\sigma)-R^2}{R^2+r^2-2Rr\cos(\varphi-\sigma)}\right)\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} g(\sigma)\frac{R^2-r^2}{R^2+r^2-2Rr\cos(\varphi-\sigma)}\mathrm{d}\sigma,$$

což je Poissonův integrál (3.53).

4.5 Greenova funkce Laplaceova operátoru

Buď $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ oblast s hladkou hranicí $\partial\Omega$, $\dfrac{\partial}{\partial\boldsymbol{\nu}} = \dfrac{\partial}{\partial\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{y})}$ derivace ve směru vnější normály k $\partial\Omega$ v bodě $\boldsymbol{y}$.

Greenova funkce Laplaceova operátoru s okrajovou podmínkou typu (α,β) je funkce $G = G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ definovaná na $\Omega\times\overline{\Omega}$, pro niž platí:

(i) Pro každé $\boldsymbol{x}\in\Omega$ a všechna $\boldsymbol{y}\in\Omega$ platí

$$\Delta_{\boldsymbol{y}} G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \delta(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}),$$

(ii) pro každé $\boldsymbol{x}\in\Omega$ a všechna $\boldsymbol{y}\in\partial\Omega$ platí

$$\alpha\frac{\partial G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\partial\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{y})} + \beta G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \ = \ 0\,.$$

Podmínku (i) lze rozepsat podrobněji:

(i$_1$) $G(\boldsymbol{x}, \cdot)$ je harmonická na $\Omega \setminus \{\boldsymbol{x}\}$;

(i$_2$) pro každou nekonečněkrát diferencovatelnou funkci ψ s kompaktním nosičem $\operatorname{Supp} \psi \subseteq \bar{\Omega}$ (sr. A.1) platí

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi \Delta G(\boldsymbol{x}, \cdot)\, \mathrm{d}V \;=\; \int\limits_{\Omega} \psi \Delta G(\boldsymbol{x}, \cdot)\, \mathrm{d}V \;=\; \psi(\boldsymbol{x})\,.$$

Lemma: Nechť $G_k(\boldsymbol{x}, \cdot)$ je pro každé $k \in \mathbb{N}$ řešením úlohy

$$\begin{aligned} \Delta_{\boldsymbol{y}} G_k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) &= d_k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\,, \qquad && \boldsymbol{y} \in \Omega\,, \\ \alpha \frac{\partial G_k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{\partial \boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{y})} + \beta G_k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) &= 0\,, \qquad && \boldsymbol{y} \in \partial\Omega\,, \end{aligned}$$

kde

$$d_k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \;=\; \begin{cases} 0, & \boldsymbol{y} \notin K_{\boldsymbol{x}}^{1/k} \\ \omega_k, & \boldsymbol{y} \in K_{\boldsymbol{x}}^{1/k} \end{cases},$$

přičemž $K_{\boldsymbol{x}}^{1/k} \;=\; \left\{ \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n :\, |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}| \le \dfrac{1}{k} \right\}$ je koule se středem $\boldsymbol{x}$ a poloměrem $\dfrac{1}{k}$, ω_k je převrácená hodnota n-rozměrné míry této koule, tedy $\int\limits_{K_{\boldsymbol{x}}^{1/k}} \omega_k \,\mathrm{d}V \;=\; 1$.

Pak Greenova funkce Laplaceova operátoru s počáteční podmínkou typu (α, β) je

$$G(\boldsymbol{x}, \cdot) \;=\; \lim_{k \to \infty} G_k(\boldsymbol{x}, \cdot)\,.$$

D.: Důkaz pouze naznačíme. Nebudeme dokazovat, že všechny použité záměny limitních operací jsou korektní.

(i$_1$) Existuje $k_0 \in \mathbb{N}$, že pro každé $k \ge k_0$ je funkce $G_k(\boldsymbol{x}, \cdot)$ harmonická na oblasti $\Omega \setminus \left\{ \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n :\, |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}| \le \dfrac{1}{k} \right\}$.

(i$_1$) Platí

$$\begin{aligned} \Delta G(\boldsymbol{x}, \cdot) \;&=\; \lim_{k \to \infty} \Delta G_k(\boldsymbol{x}, \cdot)\,, \\ \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi \Delta G(\boldsymbol{x}, \cdot)\, \mathrm{d}V \;&=\; \lim_{k \to \infty} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi \Delta G_k(\boldsymbol{x}, \cdot)\, \mathrm{d}V \;=\; \lim_{k \to \infty} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi d_k(\boldsymbol{x}, \cdot)\, \mathrm{d}V \;= \\ &=\; \lim_{k \to \infty} \psi(\boldsymbol{x}_k) \int\limits_{K_{\boldsymbol{x}}^{1/k}} \omega_k \,\mathrm{d}V \;=\; \lim_{k \to \infty} \psi(\boldsymbol{x}_k)\,, \end{aligned}$$

kde $\boldsymbol{x}_k \in K_{\boldsymbol{x}}^{1/k}$ je číslo z věty o střední hodnotě integrálního počtu. Ze spojitosti funkce ψ plyne

$$\lim_{k \to \infty} \psi(\boldsymbol{x}_k) \;=\; \psi(\boldsymbol{x})\,.$$

Odtud již plyne platnost podmínky.

(ii) Je zřejmé.

□

4.5.1 Řešení okrajové úlohy pro Poissonovu rovnici

$$\Delta u(\boldsymbol{x}) \;=\; f(\boldsymbol{x})\,, \qquad \boldsymbol{x} \in \Omega\,, \tag{4.20}$$

$$\alpha \frac{\partial u(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{\nu}} + \beta u(\boldsymbol{x}) \;=\; g(\boldsymbol{x})\,, \qquad \boldsymbol{x} \in \partial\Omega\,. \tag{4.21}$$

Nechť G_k jsou funkce z předchozího lemma. Podle druhého Greenova vzorce je

$$\int_{\Omega} (u\Delta G_k(\boldsymbol{x},\cdot) - G_k(\boldsymbol{x},\cdot)\Delta u)\,\mathrm{d}V \;=\; \int_{\partial\Omega} \left(u\frac{\partial G_k(\boldsymbol{x},\cdot)}{\partial\boldsymbol{\nu}} - G_k(\boldsymbol{x},\cdot)\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{\nu}}\right)\mathrm{d}S\,.$$

Dále platí

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty}\int_{\Omega} u\Delta G_k(\boldsymbol{x},\cdot)\,\mathrm{d}V \;&=\; \int_{\Omega} u\Delta G(\boldsymbol{x},\cdot)\,\mathrm{d}V \;=\; u(\boldsymbol{x})\,,\\
\lim_{k\to\infty}\int_{\Omega} G_k(\boldsymbol{x},\cdot)\Delta u\,\mathrm{d}V \;&=\; \int_{\Omega} G(\boldsymbol{x},\cdot) f\,\mathrm{d}V\,,\\
\lim_{k\to\infty}\int_{\partial\Omega}\left(u\frac{\partial G_k(\boldsymbol{x},\cdot)}{\partial\boldsymbol{\nu}} - G_k(\boldsymbol{x},\cdot)\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{\nu}}\right)\mathrm{d}S \;&=\; \int_{\partial\Omega}\left(u\frac{\partial G(\boldsymbol{x},\cdot)}{\partial\boldsymbol{\nu}} - G(\boldsymbol{x},\cdot)\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{\nu}}\right)\mathrm{d}S\,.
\end{aligned}$$

Pro každé $\boldsymbol{x}\in\Omega$ tedy řešení úlohy (4.20), (4.21) splňuje rovnici

$$u(\boldsymbol{x}) \;=\; \int_{\Omega} G(\boldsymbol{x},\cdot) f\,\mathrm{d}V + \int_{\partial\Omega}\left(u\frac{\partial G(\boldsymbol{x},\cdot)}{\partial\boldsymbol{\nu}} - G(\boldsymbol{x},\cdot)\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{\nu}}\right)\mathrm{d}S\,.$$

Speciální případy podmínek (4.21):

- $\alpha = 0,\ \beta = 1$ (Dirichletova úloha)
  Pro $\boldsymbol{y}\in\partial\Omega$ je $G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = 0$ podle podmínky (iii) v definici Greenovy funkce a $u(\boldsymbol{y}) = g(\boldsymbol{y})$ podle (4.21). Tedy pro $\boldsymbol{x}\in\Omega$ je

  $$u(\boldsymbol{x}) \;=\; \int_{\Omega} fG(\boldsymbol{x},\cdot)\,\mathrm{d}V + \int_{\partial\Omega} g\frac{\partial G(\boldsymbol{x},\cdot)}{\partial\boldsymbol{\nu}}\,\mathrm{d}S\,.$$

- $\alpha = 1,\ \beta = 0$ (Neumannova úloha)
  Pro $\boldsymbol{y}\in\partial\Omega$ je $\dfrac{\partial G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\partial\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{y})} = 0$ podle podmínky (iii) v definici Greenovy funkce a $\dfrac{\partial u(\boldsymbol{y})}{\partial\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{y})} = g(\boldsymbol{x})$ podle (4.21). Tedy pro $\boldsymbol{x}\in\Omega$ je

  $$u(\boldsymbol{x}) \;=\; \int_{\Omega} fG(\boldsymbol{x},\cdot)\,\mathrm{d}V - \int_{\partial\Omega} gG(\boldsymbol{x},\cdot)\,\mathrm{d}S\,.$$

- $\alpha \neq 0 \neq \beta$ (Newtonova úloha)
  Pro $\boldsymbol{y}\in\partial\Omega$ je $\dfrac{\partial G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\partial\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{y})} = -\dfrac{\beta}{\alpha}G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ podle podmínky (iii) v definici Greenovy funkce a
  $\dfrac{\partial u(\boldsymbol{y})}{\partial\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{y})} = \dfrac{1}{\alpha}(g(\boldsymbol{y}) - \beta u(\boldsymbol{y}))$ podle (4.21), tedy

  $$\begin{aligned}
  \int_{\partial\Omega}\left(u\frac{\partial G(\boldsymbol{x},\cdot)}{\partial\boldsymbol{\nu}} - G(\boldsymbol{x},\cdot)\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{\nu}}\right)\mathrm{d}S \;&=\; \int_{\partial\Omega}\left(-\frac{\beta}{\alpha}uG(\boldsymbol{x},\cdot) - \frac{1}{\alpha}(g-\beta u)G(\boldsymbol{x},\cdot)\right)\mathrm{d}S \;=\\
  &=\; -\frac{1}{\alpha}\int_{\partial\Omega} gG(\boldsymbol{x},\cdot)\,\mathrm{d}S\,.
  \end{aligned}$$

  Pro $\boldsymbol{x}\in\Omega$ je tedy

  $$u(\boldsymbol{x}) \;=\; \int_{\Omega} fG(\boldsymbol{x},\cdot)\,\mathrm{d}V - \frac{1}{\alpha}\int_{\partial\Omega} gG(\boldsymbol{x},\cdot)\,\mathrm{d}S\,.$$

4.5.2 Vyjádření Greenovy funkce

Greenovu funkci můžeme hledat ve tvaru

$$G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \;=\; -\frac{1}{c_n}v(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+h(\boldsymbol{y}),$$

kde $v(\boldsymbol{x},\cdot)$ je fundamentální harmonická funkce se singularitou v $\boldsymbol{x}\in\Omega$ a c_n je číslo z 4.3.4.

Pak podle (4.9) platí

$$\Delta_{\boldsymbol{y}}G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \;=\; -\frac{1}{c_n}\Delta_{\boldsymbol{y}}v(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+\Delta_{\boldsymbol{y}}h(\boldsymbol{y}) \;=\; -\frac{1}{c_n}\big(-c_n\delta(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})\big)+\Delta_{\boldsymbol{y}}h(\boldsymbol{y}) \;=\; \delta(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})+\Delta_{\boldsymbol{y}}h(\boldsymbol{y}),$$

a pro $\boldsymbol{y}\in\partial\Omega$ je

$$\alpha\frac{\partial G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\partial\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{y})}+\beta G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \;=\; -\frac{\alpha}{c_n}\frac{\partial v(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\partial\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{y})}+\alpha\frac{\partial h(\boldsymbol{y})}{\partial\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{y})}-\frac{\beta}{c_n}v(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+\beta h(\boldsymbol{y}).$$

K tomu, aby funkce G splnila podmínky (i) a (ii) z definice, je nutné a stačí, aby funkce $h=h(\boldsymbol{y})$ byla řešením úlohy

$$\Delta h(\boldsymbol{y}) \;=\; 0\,, \qquad \boldsymbol{y}\in\Omega\,, \tag{4.22}$$

$$\alpha\frac{\partial h(\boldsymbol{y})}{\partial\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{y})}+\beta h(\boldsymbol{y}) \;=\; \frac{\alpha}{c_n}\frac{\partial v(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\partial\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{y})}+\frac{\beta}{c_n}v(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,, \qquad \boldsymbol{y}\in\partial\Omega\,. \tag{4.23}$$

Greenova funkce pro Dirichletovu úlohu

Úlohu (4.22), (4.23) můžeme vyřešit ve speciálním případě, kdy $\alpha=0$, $\beta=1$ (tedy v případě Dirichletovy okrajové podmínky), pokud oblast Ω a její komplement jsou „nějak symetrické“. Přesněji, nechť oblast Ω má vlastnost: Ke každému $\boldsymbol{x}\in\Omega$ existuje $\boldsymbol{x}'\in\mathbb{R}^n\setminus\overline{\Omega}$ takové, že pro všechna $\boldsymbol{y}\in\partial\Omega$ podíl vzdáleností

$$\frac{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}{|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{y}|} \;=\; \gamma(\boldsymbol{x})$$

nezávisí na $\boldsymbol{y}$. V takovém případě je funkce

$$h(\boldsymbol{y}) \;=\; \begin{cases} \dfrac{1}{c_n}\left(\dfrac{1}{\gamma(\boldsymbol{x})|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{y}|}\right)^{n-2}, & n\geq 3,\\[2ex] \dfrac{1}{2\pi}\ln\dfrac{1}{\gamma(\boldsymbol{x})|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{y}|}, & n=2 \end{cases} \tag{4.24}$$

řešením úlohy (4.22), (4.23) pro libovolné $\boldsymbol{x}\in\Omega$.

D.: Pro $\boldsymbol{y}\in\partial\Omega$ platí

$$h(\boldsymbol{y}) \;=\; \begin{cases} \dfrac{1}{c_n}\dfrac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^{n-2}}, & n\geq 3,\\[2ex] \dfrac{1}{2\pi}\ln\dfrac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}, & n=2 \end{cases} \;=\; \frac{1}{c_n}v(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,,$$

takže Dirichletova okrajová podmínka je splněna.

Pro $n\geq 3$ je

$$h(\boldsymbol{y})=\frac{1}{c_n}\frac{1}{\gamma(\boldsymbol{x})^{n-2}}\frac{1}{|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{y}|^{n-2}}=\frac{1}{c_n}\frac{1}{\gamma(\boldsymbol{x})^{n-2}}v(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{y})\,;$$

poněvadž $\boldsymbol{x}'\notin\overline{\Omega}$, platí pro $\boldsymbol{y}\in\Omega$

$$\Delta_{\boldsymbol{y}}h(\boldsymbol{y})=\frac{1}{c_n}\frac{1}{\gamma(\boldsymbol{x})^{n-2}}\Delta_{\boldsymbol{y}}v(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{y})=0.$$

Pro $n = 2$ je

$$h(\boldsymbol{y}) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{y}|} - \frac{1}{2\pi}\ln\gamma(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2\pi}v(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}) - \frac{1}{2\pi}\ln\gamma(\boldsymbol{x})$$

a tedy pro $\boldsymbol{y} \in \Omega$ platí

$$\Delta_{\boldsymbol{y}} h(\boldsymbol{y}) = \frac{1}{2\pi}\Delta_{\boldsymbol{y}} v(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}) - \frac{1}{2\pi}\Delta_{\boldsymbol{y}}\ln\gamma(\boldsymbol{x}) = 0.$$

□

4.5.3 Dirichletova úloha pro Poissonovu rovnici na poloprostoru

Nechť $\Omega = \{(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$ je poloprostor.

Pro $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) \in \Omega$ položme $\boldsymbol{x}' = (x_1, \ldots, x_{n-1}, -x_n)$ – symetrie podle nadroviny $x_n = 0$.

Pak $\boldsymbol{x}' \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$. Buď $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_{n-1}, 0) \in \partial\Omega$. Platí

$$\frac{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|}{|\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{y}|} \;=\; \frac{\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_{n-1} - y_{n-1})^2 + x_n^2}}{\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_{n-1} - y_{n-1})^2 + (-x_n)^2}} \;=\; 1.$$

Tedy $\gamma \equiv 1$ a pro funkci h definovanou rovností (4.24) platí $h(\boldsymbol{y}) = \dfrac{1}{c_n}v(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y})$. Greenova funkce Laplaceova operátoru s okrajovou podmínkou

$$u(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) \;=\; 0$$

tedy je

$$G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \;=\; \frac{1}{c_n}\big(v(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}) - v(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\big)\,.$$

Jednotkový vektor vnější normály k $\partial\Omega$ je $\boldsymbol{\nu} = (0, \ldots, 0, -1)$, takže

$$\frac{\partial G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{\partial \boldsymbol{\nu}} \;=\; -\frac{\partial G(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)}{\partial y_n}\,.$$

- Řešení úlohy

$$\begin{aligned} \Delta u(x, y) \;&=\; f(x, y)\,, \qquad x \in \mathbb{R},\; y > 0\,, \\ u(x, 0) \;&=\; g(x)\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

Máme

$$\begin{aligned}
(x, y)' \;&=\; (x, -y)\,, \\
c_n \;&=\; 2\pi\,, \\
v(x, y, \xi, \eta) \;&=\; -\frac{1}{2}\ln((x - \xi)^2 + (y - \eta)^2)\,, \\
G(x, y, \xi, \eta) \;&=\; \frac{1}{2\pi}\left(-\frac{1}{2}\ln((x - \xi)^2 + (-y - \eta)^2) + \frac{1}{2}\ln((x - \xi)^2 + (y - \eta)^2)\right) \;= \\
&=\; \frac{1}{4\pi}\ln\frac{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}{(x - \xi)^2 + (y + \eta)^2}\,, \\
\frac{\partial G(x, y, \xi, \eta)}{\partial \eta} \;&=\; \frac{1}{4\pi}\frac{(x - \xi)^2 + (y + \eta)^2}{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}\frac{-2(y - \eta)((x - \xi)^2 + (y + \eta)^2) - 2(y + \eta)((x - \xi)^2 + (y - \eta)^2)}{((x - \xi)^2 + (y + \eta)^2)^2} \;= \\
&=\; -\frac{1}{2\pi}\frac{2y(x - \xi)^2 + 2y(y^2 - \eta^2)}{((x - \xi)^2 + (y - \eta)^2)((x - \xi)^2 + (y + \eta)^2)} \;= \\
&=\; -\frac{y}{\pi}\frac{(x - \xi)^2 + (y^2 - \eta^2)}{((x - \xi)^2 + (y - \eta)^2)((x - \xi)^2 + (y + \eta)^2)}\,, \\
\frac{\partial G(x, y, \xi, 0)}{\partial \eta} \;&=\; -\frac{y}{\pi}\frac{(x - \xi)^2 + y^2}{((x - \xi)^2 + y^2)^2} \;=\; -\frac{y}{\pi}\frac{1}{(x - \xi)^2 + y^2}\,,
\end{aligned}$$

takže řešení dané úlohy je

$$u(x,y) \;=\; \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\xi\in\mathbb{R},\,\eta>0} f(\xi,\eta)\ln\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{(x-\xi)^2+(y+\eta)^2}\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \;+\; \frac{y}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(\xi)\frac{\mathrm{d}\xi}{(x-\xi)^2+y^2}\,;$$

zvláštním případem je řešení (4.18) úlohy (4.16), (4.17).

• Řešení úlohy

$$\begin{aligned}\Delta u(x,y,z) &= f(x,y,z)\,, && x\in\mathbb{R},\ y\in\mathbb{R},\ z>0\,,\\ u(x,y,0) &= g(x,y)\,, && x\in\mathbb{R},\ y\in\mathbb{R}\,.\end{aligned}$$

Máme

$$\begin{aligned}
(x,y,z) &= (x,y,-z)\,,\\
c_n &= 4\pi\,,\\
v(x,y,z,\xi,\eta,\zeta) &= \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}}\,,\\
G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta) &= \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(-z-\zeta)^2}}-\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}}\right),\\
\frac{\partial G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta)}{\partial\zeta} &= \frac{1}{8\pi}\left(\frac{-2(z-\zeta)}{((x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2)^{3/2}}-\frac{2(z+\zeta)}{((x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z+\zeta)^2)^{3/2}}\right) =\\
&= -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{z-\zeta}{((x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2)^{3/2}}+\frac{z+\zeta}{((x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z+\zeta)^2)^{3/2}}\right),\\
\frac{\partial G(x,y,z,\xi,\eta,0)}{\partial\zeta} &= -\frac{1}{2\pi}\frac{z}{((x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2)^{3/2}}\,,
\end{aligned}$$

takže řešení dané úlohy je

$$\begin{aligned}
&u(x,y,z) =\\
&= \frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{\xi\in\mathbb{R},\,\eta\in\mathbb{R},\,\zeta>0} f(\xi,\eta,\zeta)\left(\frac{1}{((x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z+\zeta)^2)^{1/2}}-\frac{1}{((x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2)^{1/2}}\right)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta\,+\\
&\qquad + \frac{z}{2\pi}\iint\limits_{\mathbb{R}^2} g(\xi,\eta)\frac{\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta}{((x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2)^{3/2}}\,.
\end{aligned}$$

4.5.4 Dirichletova úloha pro Poissonovu rovnici na kouli

Nechť $\Omega = K_0^R = \{(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n : x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2<R\}$ je otevřená koule.

Pro $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in K_0^R$ položme $\boldsymbol{x}'=\dfrac{R^2}{|\boldsymbol{x}|^2}\boldsymbol{x}$ — kulová inverse.

Buď $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\ldots,y_n)\in S_0^R=\partial K_0^R$, tedy $\sum\limits_{i=1}^n y_i^2=R^2$. Pak je

$$\begin{aligned}
\left|\frac{R}{|\boldsymbol{x}|}\boldsymbol{x}-\frac{|\boldsymbol{x}|}{R}\boldsymbol{y}\right|^2 &= \sum_{i=1}^n\left(\frac{R}{|\boldsymbol{x}|}x_i-\frac{|\boldsymbol{x}|}{R}y_i\right)^2 = \left(\frac{R}{|\boldsymbol{x}|}\right)^2\sum_{i=1}^n x_i^2-2\sum_{i=1}^n x_iy_i+\left(\frac{|\boldsymbol{x}|}{R}\right)^2\sum_{i=1}^n y_i^2 =\\
&= R^2-2\sum_{i=1}^n x_iy_i+|\boldsymbol{x}|^2 = \sum_{i=1}^n y_i^2-2\sum_{i=1}^n x_iy_i+\sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n(y_i-x_i)^2 = |\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|^2\,,
\end{aligned}$$

tedy

$$\left|\frac{R}{|\boldsymbol{x}|}\boldsymbol{x}-\frac{|\boldsymbol{x}|}{R}\boldsymbol{y}\right| = |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}| \tag{4.25}$$

a

$$\frac{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}{|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{y}|} \;=\; \frac{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}{\left|\dfrac{R^2}{|\boldsymbol{x}|^2}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right|} \;=\; \frac{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}{\dfrac{R}{|\boldsymbol{x}|}\left|\dfrac{R}{|\boldsymbol{x}|}\boldsymbol{x}-\dfrac{|\boldsymbol{x}|}{R}\boldsymbol{y}\right|} \;=\; \frac{|\boldsymbol{x}|}{R}.$$

Dostáváme tak $\gamma(\boldsymbol{x}) = \dfrac{|\boldsymbol{x}|}{R}$ a můžeme vyjádřit funkci h z rovnosti (4.24).
Pro $n \geq 3$ je

$$h(\boldsymbol{y}) \;=\; \frac{1}{c_n}\left(\frac{R}{|\boldsymbol{x}|\,|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{y}|}\right)^{n-2} \;=\; \frac{1}{c_n}\left(\frac{R}{|\boldsymbol{x}|\,\left|\dfrac{R^2}{|\boldsymbol{x}|^2}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right|}\right)^{n-2} \;=\; \frac{1}{c_n}\left(\frac{R|\boldsymbol{x}|}{|R^2\boldsymbol{x}-|\boldsymbol{x}|^2\boldsymbol{y}|}\right)^{n-2},$$

a pro $n = 2$ je

$$h(\boldsymbol{y}) \;=\; \frac{1}{2\pi}\ln\frac{R}{|\boldsymbol{x}|\,|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{y}|} \;=\; \frac{1}{2\pi}\ln\frac{R|\boldsymbol{x}|}{|R^2\boldsymbol{x}-|\boldsymbol{x}|^2\boldsymbol{y}|}.$$

Celkem dostáváme, že funkce definovaná vztahem

$$G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \;=\; \begin{cases} \dfrac{1}{c_n}\left[\left(\dfrac{R|\boldsymbol{x}|}{|R^2\boldsymbol{x}-|\boldsymbol{x}|^2\boldsymbol{y}|}\right)^{n-2} - \dfrac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^{n-2}}\right], & n \geq 3, \\[2ex] \dfrac{1}{2\pi}\ln\dfrac{R|\boldsymbol{x}|\,|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}{|R^2\boldsymbol{x}-|\boldsymbol{x}|^2\boldsymbol{y}|}, & n = 2 \end{cases} \tag{4.26}$$

je Greenovou funkcí Laplaceova operátoru s okrajovou podmínkou

$$u\left(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, \pm\sqrt{R^2 - x_1^2 - x_2^2 - \cdots - x_{n-1}^2}\right) \;=\; 0\,.$$

Jednotkový vektor vnější normály k S_0^R v bodě $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ je $\dfrac{1}{R}(y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Dále pro libovolné kladné konstanty A, B platí

$$\frac{\partial}{\partial y_i}\frac{1}{|A\boldsymbol{x}-B\boldsymbol{y}|} \;=\; \frac{\partial}{\partial y_i}\frac{1}{\sqrt{\sum\limits_{j=1}^{n}(Ax_j - Bx_j)^2}} \;=\; -\frac{1}{2}\,\frac{-2B(Ax_i - By_i)}{\left(\sum\limits_{j=1}^{n}(Ax_j - Bx_j)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \;=\; B\frac{Ax_i - By_i}{|A\boldsymbol{x}-B\boldsymbol{y}|^3}.$$

Proto

$$\frac{\partial}{\partial y_i}\frac{1}{c_n}\left[\left(\frac{R|\boldsymbol{x}|}{|R^2\boldsymbol{x}-|\boldsymbol{x}|^2\boldsymbol{y}|}\right)^{n-2} - \frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^{n-2}}\right] \;=\; \frac{1}{c_n}\frac{\partial}{\partial y_i}\left[\left(\frac{1}{\left|\dfrac{R}{|\boldsymbol{x}|}\boldsymbol{x}-\dfrac{|\boldsymbol{x}|}{R}\boldsymbol{x}\right|}\right)^{n-2} - \left(\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}\right)^{n-2}\right] =$$

$$= \frac{n-2}{c_n}\left[\left(\frac{1}{\left|\dfrac{R}{|\boldsymbol{x}|}\boldsymbol{x}-\dfrac{|\boldsymbol{x}|}{R}\boldsymbol{x}\right|}\right)^{n-3}\frac{\dfrac{|\boldsymbol{x}|}{R}\left(\dfrac{R}{|\boldsymbol{x}|}x_i - \dfrac{|\boldsymbol{x}|}{R}y_i\right)}{\left|\dfrac{R}{|\boldsymbol{x}|}\boldsymbol{x}-\dfrac{|\boldsymbol{x}|}{R}\boldsymbol{x}\right|^3} - \left(\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}\right)^{n-3}\frac{x_i - y_i}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^3}\right] =$$

$$= \frac{n-2}{c_n}\left[\frac{1}{\left|\dfrac{R}{|\boldsymbol{x}|}\boldsymbol{x}-\dfrac{|\boldsymbol{x}|}{R}\boldsymbol{y}\right|^n}\left(x_i - \frac{|\boldsymbol{x}|^2}{R^2}y_i\right) - \frac{x_i - y_i}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^n}\right],$$

$$\frac{\partial}{\partial y_i}\frac{1}{2\pi}\ln\frac{R|\boldsymbol{x}|\,|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}{|R^2\boldsymbol{x}-|\boldsymbol{x}|^2\boldsymbol{y}|} = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y_i}\left(\ln\frac{1}{\left|\frac{R}{|\boldsymbol{x}|}\boldsymbol{x}-\frac{|\boldsymbol{x}|}{R}\boldsymbol{y}\right|}-\ln\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\frac{|\boldsymbol{x}|}{R}\left(\frac{R}{|\boldsymbol{x}|}x_i-\frac{|\boldsymbol{x}|}{R}y_i\right)}{\left|\frac{R}{|\boldsymbol{x}|}\boldsymbol{x}-\frac{|\boldsymbol{x}|}{R}\boldsymbol{y}\right|^2}-\frac{x_i-y_i}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^2}\right) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{x_i-\frac{|\boldsymbol{x}|^2}{R^2}y_i}{\left|\frac{R}{|\boldsymbol{x}|}\boldsymbol{x}-\frac{|\boldsymbol{x}|}{R}\boldsymbol{y}\right|^2}-\frac{x_i-y_i}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^2}\right).$$

Připomeňme, že $c_n = (n-2)\sigma_n$, kde σ_n je $(n-1)$-rozměrná míra jednotkové sféry v $\mathbb{R}^n$; zejména $\sigma_2 = 2\pi$, $\sigma_3 = 4\pi$. Vzhledem k rovnosti (4.25) tak dostáváme, že pro Greenovu funkci (4.26) a $\boldsymbol{y} \in \partial\Omega$ platí

$$\frac{\partial G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\partial y_i} = \frac{1}{\sigma_n}\frac{y_i-\frac{|\boldsymbol{x}|^2}{R^2}y_i}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^n} = \frac{1}{\sigma_n}\frac{R^2-|\boldsymbol{x}|^2}{R^2|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^n}y_i\,.$$

Pro $\boldsymbol{y} \in \partial\Omega$ tak dostáváme

$$\frac{\partial G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\partial\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{y})} = \frac{1}{\sigma_n}\frac{R^2-|\boldsymbol{x}|^2}{R^2|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^n}\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i^2}{R} = \frac{1}{\sigma_n R}\frac{R^2-|\boldsymbol{x}|^2}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^n}\,.$$

Ještě označíme $|S^R|$ míru sféry o poloměru R, tj. $|S^R| = \sigma_n R^{n-1}$. Pak můžeme psát

$$\frac{\partial G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\partial\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{y})} = \frac{R^{n-2}}{|S^R|}\frac{R^2-|\boldsymbol{x}|^2}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^n}\,.$$

Řešení úlohy

$$\begin{aligned}
\Delta u(x_1,x_2,\dots,x_n) &= f(x_1,x_2,\dots,x_n)\,, \qquad x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2 < R^2\,,\\
u(x_1,x_2,\dots,x_n) &= g(x_1,x_2,\dots,x_n)\,, \qquad x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2 = R^2
\end{aligned}$$

lze tedy zapsat ve tvaru

$$u(\boldsymbol{x}) = \int\limits_{K_0^R} fG(\boldsymbol{x},\cdot)\,\mathrm{d}V + R^{n-2}\frac{R^2-|\boldsymbol{x}|^2}{|S^R|}\int\limits_{S_0^R} g(\boldsymbol{y})\frac{\mathrm{d}S_{\boldsymbol{y}}}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^n}\,,$$

kde funkce G je dána vztahem (4.26). Pro $f \equiv 0$ dostaneme *Poissonův vzorec*

$$u(\boldsymbol{x}) = R^{n-2}\frac{R^2-|\boldsymbol{x}|^2}{|S^R|}\int\limits_{S_0^R} g(\boldsymbol{y})\frac{\mathrm{d}S_{\boldsymbol{y}}}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^n}\,.$$

Zejména pro $n = 3$ je

$$u(\boldsymbol{x}) = \frac{R^2-|\boldsymbol{x}|^2}{4\pi R}\int\limits_{S_{(0,0,0)}^R} g(\boldsymbol{y})\frac{\mathrm{d}S_{\boldsymbol{y}}}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^3}$$

a pro $n = 2$

$$u(x,y) = \frac{R^2-x^2-y^2}{2\pi R}\int\limits_{S_{(0,0)}^R} g(\xi,\eta)\frac{\mathrm{d}S_{\xi,\eta}}{|(x,y)-(\xi,\eta)|^2} = \frac{R^2-x^2-y^2}{2\pi R}\int\limits_0^{2\pi}\frac{g(R\cos\sigma,R\sin\sigma)}{(x-R\cos\sigma)^2+(y-R\sin\sigma)^2}R\mathrm{d}\sigma\,,$$

což je Poissonův vzorec (3.54).

4.6 Vlastní čísla a vlastní funkce Laplaceova operátoru

Buď $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ oblast s dostatečně hladkou hranicí $\partial\Omega$. Číslo $\lambda \in \mathbb{R}$ nazveme *vlastním číslem* a funkci v definovanou na $\overline{\Omega}$ nazveme *vlastní funkcí Dirichletovy úlohy pro Laplaceův operátor*, je-li $v \not\equiv 0$ a platí

$$\begin{aligned} -\Delta v(\boldsymbol{x}) &= \lambda v(\boldsymbol{x})\,, \qquad && \boldsymbol{x} \in \Omega\,, \\ v(\boldsymbol{x}) &= 0\,, && \boldsymbol{x} \in \partial\Omega\,. \end{aligned} \tag{4.27}$$

Platí:

- Všechna vlastní čísla Laplaceova operátoru jsou kladná a všechny vlastní funkce jsou nekonstantní.

  D.: Úloha

  $$\begin{aligned} \Delta v(\boldsymbol{x}) &= 0\,, \quad \boldsymbol{x} \in \Omega\,, \\ v(\boldsymbol{x}) &= 0\,, \quad \boldsymbol{x} \in \partial\Omega \end{aligned}$$

  má podle 4.2 jediné řešení a toto řešení je $v \equiv 0$. Proto 0 není vlastním číslem Laplaceova operátoru. Proto také pro libovolné vlastní číslo λ a libovolnou vlastní funkci v můžeme s využitím prvního Greenova vzorce psát

  $$\begin{aligned} 0 \;>\; \int_\Omega v^2 \mathrm{d}V \;&=\; \frac{1}{\lambda}\int_\Omega v\lambda v\,\mathrm{d}V \;=\; -\frac{1}{\lambda}\int_\Omega v\Delta v\,\mathrm{d}V \;= \\ &= -\frac{1}{\lambda}\left(\int_{\partial\Omega} v\frac{\partial v}{\boldsymbol{\nu}}\mathrm{d}S - \int_\Omega \nabla v\cdot\nabla v\,\mathrm{d}V\right) \;=\; \frac{1}{\lambda}\int_\Omega \nabla v\cdot\nabla v\,\mathrm{d}V \;=\; \frac{1}{\lambda}\left\|\nabla v\right\|^2 \end{aligned}$$

  Poněvadž $\left\|\nabla v\right\|^2$ nemůže být záporné, dostaneme odtud, že $\lambda > 0$ a $\|\nabla v\| > 0$. Vlastní číslo je kladné a gradient vlastní funkce je nenulový, takže vlastní funkce nemůže být konstantní. □

- Jsou-li $\lambda_1 \neq \lambda_2$ vlastní čísla a $v_1,\ v_2$ příslušné vlastní funkce Laplaceova operátoru, pak jsou funkce $v_1,\ v_2$ ortogonální na Ω, tj. platí

  $$\int_\Omega v_1 v_2 \mathrm{d}V \;=\; 0\,.$$

  D.: Poněvadž pro $\boldsymbol{x} \in \partial\Omega$ je $v_1(\boldsymbol{x}) = 0 = v_2(\boldsymbol{x})$, dostaneme s využitím druhého Greenova vzorce

  $$\begin{aligned} \int_\Omega v_1 v_2 \mathrm{d}V \;&=\; \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\int_\Omega (\lambda_1-\lambda_2)v_1v_2\mathrm{d}V \;=\; \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\int_\Omega (\lambda_1 v_1 v_2 - v_1\lambda_2 v_2)\mathrm{d}V \;= \\ &= \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\int_\Omega (-v_2\Delta v_1 + v_1\Delta v_2)\mathrm{d}V \;=\; \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\int_{\partial\Omega}\left(v_1\frac{\partial v_2}{\partial\boldsymbol{\nu}} - v_2\frac{\partial v_1}{\partial\boldsymbol{\nu}}\right)\mathrm{d}S \;=\; 0\,. \;\square \end{aligned}$$

- Dirichletova úloha pro Laplaceův operátor má spočetnou množinu vlastních čísel. Množina příslušných vlastních funkcí tvoří úplnou ortogonální množinu v prostoru funkcí spojitých na $\overline{\Omega}$.

Řešení úlohy

$$\begin{aligned} \Delta u(\boldsymbol{x}) &= f(\boldsymbol{x}), \qquad && \boldsymbol{x} \in \Omega, \\ u(\boldsymbol{x}) &= 0, && \boldsymbol{x} \in \partial\Omega \end{aligned} \tag{4.28}$$

hledáme ve tvaru

$$u(\boldsymbol{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n v_n(\boldsymbol{x}),$$

kde v_n jsou vlastní funkce Dirichletovy úlohy pro Laplaceův operátor a C_n jsou reálné konstanty, $n = 1, 2, \ldots$. Je-li funkce f integrovatelná ve druhé mocnině ($f \in \mathcal{L}^2(\Omega)$), pak

$$f(\boldsymbol{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n v_n(\boldsymbol{x}), \quad \text{kde } F_n = \frac{1}{\left\|v_n\right\|^2}\int_\Omega f v_n \mathrm{d}V \text{ a } \left\|v_n\right\|^2 = \int_\Omega v_n^2 \mathrm{d}V.$$

Buďte $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ vlastní čísla příslušná k vlastním funkcím $v_1, v_2, \ldots$. Pak je

$$\begin{aligned}
\Delta \sum_{n=1}^{\infty} C_n v_n(\boldsymbol{x}) &= \sum_{n=1}^{\infty} F_n v_n(\boldsymbol{x}), \\
\sum_{n=1}^{\infty} C_n \Delta v_n(\boldsymbol{x}) &= \sum_{n=1}^{\infty} F_n v_n(\boldsymbol{x}), \\
-\sum_{n=1}^{\infty} C_n \lambda_n v_n(\boldsymbol{x}) &= \sum_{n=1}^{\infty} F_n v_n(\boldsymbol{x}).
\end{aligned}$$

Odtud

$$C_n = -\frac{F_n}{\lambda_n} = -\frac{1}{\lambda_n \|v_n\|^2} \int_{\Omega} f v_n \mathrm{d}V.$$

Řešení úlohy (4.28) tedy je

$$u(\boldsymbol{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{\lambda_n \|v_n\|^2} \int_{\Omega} f v_n \mathrm{d}V \right) v_n(\boldsymbol{x}) = \int_{\Omega} f \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{v_n(\boldsymbol{x}) v_n}{\lambda_n \|v_n\|^2} \right) \mathrm{d}V.$$

To znamená, že Greenova funkce Laplaceova operátoru s okrajovou podmínkou

$$u(\boldsymbol{x}) = 0, \quad \boldsymbol{x} \in \partial\Omega$$

je

$$G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n(\boldsymbol{x}) v_n(\boldsymbol{y})}{\lambda_n \|v_n\|^2},$$

kde $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ jsou vlastní čísla a $v_1, v_2, \ldots$ jsou vlastní funkce úlohy (4.27).

4.6.1 Vlastní čísla a vlastní funkce Laplaceova operátoru pro Dirichletovu úlohu na obdélníku

Úlohu

$$\begin{aligned}
-\Delta v(x,y) &= \lambda v(x,y)\,, && 0 < x < a,\ 0 < y < b\,, \\
v(x,0) &= 0 = v(x,b)\,, && 0 < x < a\,, \\
v(0,y) &= 0 = v(a,y), && 0 < y < b
\end{aligned} \tag{4.29}$$

budeme řešit separací proměnných. Funkci $v = v(x,y)$ hledáme ve tvaru $v(x,y) = X(x)Y(y)$.

Po dosazení do rovnice a jednoduché úpravě dostaneme

$$-\frac{Y''}{Y} = \lambda + \frac{X''}{X}.$$

Levá strana této rovnosti závisí pouze na proměnné y, pravá pouze na proměnné x; nemohou tedy záviset na žádné z nezávisle proměnných a jsou rovny nějaké konstantě, řekněme κ.

Z levé strany tak dostaneme okrajovou úlohu

$$\begin{aligned}
Y'' + \kappa Y &= 0, \qquad 0 < y < b, \\
Y(0) = 0 &= Y(b),
\end{aligned}$$

která má nenulové řešení pouze pro

$$\kappa = \kappa_m = \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2, \quad m = 1, 2, \ldots,$$

které je dáno předpisem $Y = Y_m(y) = \sin \dfrac{m\pi}{b} y$.

Toto vypočítané κ_m dosadíme do druhé části rovnosti, tj. do rovnosti $\lambda + \dfrac{X''}{X} = \kappa$ a dostaneme okrajovou úlohu

$$\begin{aligned} X'' + (\lambda - \kappa_m)\, X &= 0, \qquad 0 < x < a, \\ X(0) &= 0 = X(a), \end{aligned}$$

která má nenulové řešení pouze pro $\lambda = \lambda_{nm}$ takové, že $\lambda_{nm} - \kappa_m = \left(\dfrac{n\pi}{a}\right)^2$, tj. pro

$$\lambda_{nm} = \left[\left(\frac{n}{a}\right)^2 + \left(\frac{m}{b}\right)^2\right]\pi^2, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Toto řešení je dáno předpisem $X_{nm}(x) = \sin \dfrac{n\pi}{a} x$.

Celkem tak dostáváme vlastní čísla úlohy (4.29) ve tvaru

$$\lambda_{nm} = \left[\left(\frac{n}{a}\right)^2 + \left(\frac{m}{b}\right)^2\right]\pi^2, \quad n = 1, 2, \ldots,\ m = 1, 2, \ldots .$$

Příslušné vlastní funkce jsou

$$v_{nm}(x, y) = \sin \frac{n\pi}{a} x \sin \frac{m\pi}{b} y.$$

Norma vlastních funkcí je

$$\|v_{nm}\|^2 = \iint\limits_{[0,a]\times[0,b]} \left(\sin \frac{n\pi}{a}\xi \sin \frac{m\pi}{b}\eta\right)^2 \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta = \int\limits_0^a \sin^2 \frac{n\pi}{a}\xi \,\mathrm{d}\xi \int\limits_0^b \sin^2 \frac{m\pi}{b}\eta \,\mathrm{d}\eta = \frac{a}{2}\frac{b}{2} = \frac{ab}{2}.$$

Ještě vypočítáme

$$\lambda_{nm} \|v_{nm}\|^2 = \left[\left(\frac{n}{a}\right)^2 + \left(\frac{m}{b}\right)^2\right]\pi^2 \frac{ab}{4} = \frac{\pi^2}{4}\frac{(ma)^2 + (nb)^2}{ab}$$

a dostaneme Greenovu funkci Laplaceova operátoru pro Dirichletovu úlohu na obdélníku

$$G(x, y, \xi, \eta) = -\frac{4ab}{\pi^2} \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{a}\xi \sin \frac{m\pi}{b} y \sin \frac{m\pi}{b}\eta}{m^2 a^2 + n^2 b^2}.$$

Cvičení

Řešte úlohu

1) $u_{xx} + u_{yy} = 0,\ 0 < x < a,\ 0 < y < b$
$u(0, y) = Ay(b - y),\ u(a, y) = 0,\ 0 \le y \le b;\ u(x, 0) = B \sin \frac{\pi x}{a},\ u(x, b) = 0,\ 0 \le x \le a$

2) $u_{xx} + u_{yy} = 0,\ x^2 + y^2 > a$
$u(a\cos\varphi, a\sin\varphi) = 2\sin^2\varphi + 3\cos^2\varphi,\quad u$ je ohraničená

3) $u_{xx} + u_{yy} = c,\ \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} < 1;\quad u(x, y) = 0,\ \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$

4) $u_{xx} + u_{yy} = 0,\ x \in \mathbb{R},\ y > 0$

$$u(x, 0) = \begin{cases} 1, & a < x < b, \\ 0, & \text{jinak}, \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}$$

Výsledky: 1) $u(x, y) = \dfrac{B \operatorname{sh}\left(\frac{\pi(b-y)}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{\pi b}{a}\right)} + \frac{8Ab^2}{\pi^3} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{\operatorname{sh}\left(\frac{(2n+1)\pi(a-x)}{b}\right) \sin\left(\frac{(2n+1)\pi y}{b}\right)}{(2n+1)^3 \operatorname{sh}\left(\frac{(2n+1)\pi a}{b}\right)}$

2) $u(x, y) = \frac{5}{2} + \frac{a^2(x^2 - y^2)}{2(x^2+y^2)^2}$ **3)** $u(x, y) = \frac{c}{2}\frac{\alpha^2\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}\left(\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} - 1\right)$

4) $u(x, y) = \frac{1}{\pi}\omega(x, y)$, kde $\omega(x, y)$ je zorný úhel, pod kterým je z bodu (x, y) vidět interval (a, b).

Kapitola 5

Schrödingerova rovnice

Stav částice je popsán rovnicí

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\Delta\Psi + V\Psi = -\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}, \tag{5.1}$$

kde $\Psi = \Psi(t)$ ... vlnová funkce,
$V = V(\boldsymbol{x})$ ... potenciální energie částice,
$\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$ ... Planckova konstanta,
μ ... hmotnost částice.

Vlnová funkce je interpretována jako pravděpodobnost výskytu částice v bodě $\boldsymbol{x}$ v čase t tak, že funkce $|\Psi(t,\boldsymbol{x})|^2$ je hustotou rozložení pravděpodobnosti výskytu částice v čase t. To znamená, že

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\Psi(t,\boldsymbol{x})|^2 \mathrm{d}\boldsymbol{x} = 1 \tag{5.2}$$

pro $t \geq 0$. Zejména tedy platí, že funkce Ψ je ohraničená.

Budeme separovat proměnné, tj. řešení rovnice (5.1) budeme hledat ve tvaru $\Psi(t,\boldsymbol{x}) = T(t)\psi(\boldsymbol{x})$, sr. kap. 3. V takovém případě platí

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}T\Delta\psi + VT\psi = -\mathrm{i}\hbar T'\psi.$$

Tuto rovnost vydělíme součinem $T\psi$ a dostaneme

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{\Delta\psi}{\psi} + V = -\mathrm{i}\hbar\frac{T'}{T}.$$

Výraz na levé straně závisí pouze na prostorové proměnné $\boldsymbol{x}$, výraz na pravé straně pouze na čase t. Musí tedy být oba výrazy rovny nějaké konstantě. Poněvadž výraz na levé straně má rozměr energie, označíme tuto konstantu E. Dostaneme tak rovnici pro vývoj vlnové funkce v závislosti na energii částice

$$T' = \frac{\mathrm{i}E}{\hbar}T \tag{5.3}$$

a *stacionární Schrödingerovu rovnici*

$$\Delta\psi + \frac{2\mu}{\hbar^2}(E - V)\psi = 0, \tag{5.4}$$

kterou lze přepsat do tvaru úlohy na vlastní hodnoty a vlastní funkce

$$\left(\Delta - \frac{2\mu}{\hbar^2}V\right)\psi = -\left(\frac{2\mu}{\hbar^2}E\right)\psi.$$

Základní postulát kvantové mechaniky požaduje, aby naměřené hodnoty energie E byly takové, že hodnota $\dfrac{2\mu}{\hbar^2}E$ je vlastní hodnotou operátoru $-\left(\Delta - \dfrac{2\mu}{\hbar^2}V\right)$.

Nechť E_n je taková naměřená hodnota energie a ψ_n odpovídající vlastní funkce. Příslušné řešení obyčejné lineární rovnice (5.3) je tvaru $T_n(t) = const \cdot \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}E_n}{\hbar}t}$. Za integrační konstantu volíme hodnotu 1 a řešení rovnice (5.3) „odpovídající kvantovému číslu n“ vyjádříme jako

$$T_n(t) = \cos\frac{E_n}{\hbar}t + \mathrm{i}\sin\frac{E_n}{\hbar}t.$$

Pro tuto funkci platí $|T_n(t)| = 1$ pro všechna $t > 0$. V okamžiku pozorování energie E_n celé řešení rovnice (5.1) „zkolabuje“ do funkce $\Psi = \psi_n T_n$. Z normovací podmínky (5.2) tedy dostaneme podmínku pro řešení stacionární Schrödingerovy rovnice v okamžiku pozorování hodnoty energie E_n

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} |\psi_n(\boldsymbol{x})|^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = 1. \tag{5.5}$$

5.1 Řešení za zjednodušujících předpokladů

5.1.1 Kvantová částice v krabičce

Představme si částici o hmotnosti μ, která se jistě nachází uvnitř oblasti prostoru tvaru hranolu o hranách a, b, c a na kterou nepůsobí žádná síla (částice se nachází v nekonečně hluboké pravoúhlé potenciálové jámě). V takovém případě je potenciál identicky nulový a stacionární Schrödingerova rovnice (5.4) je tvaru

$$\Delta\psi + \frac{2\mu E}{\hbar^2}\psi = 0. \tag{5.6}$$

Vlnová funkce má být nulová vně uvažovaného hranolu a z její spojitosti plyne, že také na jeho hranici. Souřadnou soustavu zvolíme tak, aby osy hranolu byly rovnoběžné se souřadnými osami a jeden jeho vrchol byl v počátku. Pak jsou splněny okrajové podmínky

$$\psi(0,y,z) = \psi(a,y,z) = \psi(x,0,z) = \psi(x,b,z) = \psi(x,y,0) = \psi(x,y,c) = 0 \tag{5.7}$$

pro všechna $(x,y,z) \in (0,a) \times (0,b) \times (0,c)$.

V rovnici (5.6) budeme separovat proměnné, tj. řešení hledáme ve tvaru $\psi(x,y,z) = X(x)Y(y)Z(z)$. Funkce X, Y, Z musí splňovat rovnost

$$X''YZ + XY''Z + XYZ'' + \frac{2\mu E}{\hbar^2}XYZ = 0,$$

kde $'$ označuje obyčejnou derivaci podle jediné nezávisle proměnné příslušné funkce. Odtud plyne

$$\frac{X''}{X} + \frac{2\mu E}{\hbar^2} = -\frac{Y''}{Y} - \frac{Z''}{Z}.$$

Výraz na levé straně závisí pouze na x, výraz na pravé straně na x nezávisí. Obě strany rovnosti se tedy musí rovnat nějaké konstantě λ,

$$\frac{X''}{X} + \frac{2\mu E}{\hbar^2} = -\frac{Y''}{Y} - \frac{Z''}{Z} = \lambda.$$

Odtud podobnou úvahou dostaneme

$$\frac{Y''}{Y} + \lambda = -\frac{Z''}{Z} = \sigma,$$

takže funkce X, Y a Z jsou vzhledem k podmínkám (5.7) řešením okrajových úloh

$$\begin{aligned} Z'' + \sigma Z &= 0, \qquad Z(0) = 0 = Z(c),\\ Y'' + (\lambda - \sigma)Y &= 0, \qquad Y(0) = 0 = Y(b),\\ X'' + \left(\frac{2\mu E}{\hbar^2} - \lambda\right)X &= 0, \qquad X(0) = 0 = X(a). \end{aligned}$$

Z první úlohy dostaneme vlastní hodnoty a vlastní funkce

$$\sigma_k = \left(\frac{k\pi}{c}\right)^2, \qquad Z_k = \sin\frac{k\pi}{c}z, \quad k = 1, 2, 3, \ldots.$$

Získané vlastní hodnoty σ_k dosadíme do druhé úlohy,

$$Y'' + (\lambda - \sigma_k)Y = 0, \qquad Y(0) = 0 = Y(b)$$

a odtud dostaneme vlastní hodnoty a příslušné vlastní funkce

$$\lambda_{mk} - \sigma_k = \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2, \qquad Y_{mk}(y) = \sin\frac{m\pi}{b}y, \quad m = 1, 2, 3, \ldots,$$

tedy

$$\lambda_{mk} = \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{k\pi}{c}\right)^2.$$

Hodnoty λ_{mk} dosadíme do třetí úlohy

$$X'' + \left(\frac{2\mu E}{\hbar^2} - \lambda_{mk}\right)X = 0, \qquad X(0) = 0 = X(a)$$

a dostaneme vlastní hodnoty a vlastní funkce

$$\frac{2\mu}{\hbar^2}E_{nmk} - \lambda_{mk} = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2, \qquad X_{nmk}(x) = \sin\frac{n\pi}{a}x, \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

tedy

$$\frac{2\mu}{\hbar^2}E_{nmk} = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 = \lambda_{mk} = \left(\left(\frac{n}{a}\right)^2 + \left(\frac{m}{b}\right)^2 + \left(\frac{k}{c}\right)^2\right)\pi^2.$$

Možné pozorované hodnoty energie uvažované částice tedy jsou

$$E_{nmk} = \frac{\hbar^2\pi^2}{2\mu}\left[\left(\frac{n}{a}\right)^2 + \left(\frac{m}{b}\right)^2 + \left(\frac{k}{c}\right)^2\right].$$

Každá trojice kladných celých čísel (n, m, k) tedy reprezentuje kvantový stav částice.

Nechť nyní je krabička krychlová, tj. $a = b = c = L$. Pak možné energetické stavy jsou

$$E_{nmk} = \frac{\hbar^2\pi^2}{2\mu L^2}\left(n^2 + m^2 + l^2\right). \tag{5.8}$$

Základní stav je

$$E_{111} = \frac{3\hbar^2\pi^2}{2\mu L^2};$$

je to jediná nedegenerovaná energetická hladina, tj. energie, jíž odpovídá jediný kvantový stav. Ostatní energetické hladiny jsou degenerované, jedné energii odpovídá více stavů. Např. energie

$$\frac{3\hbar^2\pi^2}{\mu L^2}$$

je stejná pro stavy $(2, 1, 1)$, $(1, 2, 1)$ a $(1, 1, 2)$, jedná se o hladinu s degenerací stupně 3. Stupeň degenerace roste s rostoucími hodnotami n, m, k.

Označme $E_f = E_{nmk}$ možné energetické hladiny částice v uvažované krabičce a položme

$$R^2 = n^2 + m^2 + k^2.$$

Pak je

$$E_f = \frac{\hbar^2\pi^2}{2\mu L^2}R^2, \quad \text{tj.} \quad R^2 = \frac{2\mu L^2}{\hbar^2\pi^2}E_f.$$

Počet kvantových vztahů, jejichž energie nepřevýší hodnotu E_f, je počtem trojic přirozených čísel (n, m, k), pro něž platí $n^2+m^2+k^2 \leq R^2$. Tyto stavy tedy můžeme považovat za body s celočíselnými kladnými souřadnicemi v prvním oktantu koule o poloměru R. Počet stavů N je proto úměrný objemu tohoto oktantu,

$$N \sim \frac{1}{8} \cdot \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{\pi}{6} \left(\frac{2\mu L^2}{\hbar^2 \pi^2} E_f \right)^{3/2} = \frac{1}{6\pi^2} \left(\frac{\sqrt{2\mu}}{\hbar} \right)^3 L^3 E_f^{3/2}.$$

Hodnota L^2 vyjadřuje objem uvažované krychlové krabičky, takže pro *hustotu stavů* ν (počet stavů na jednotku objemu) a pro energii E_f platí

$$\nu = \frac{N}{L^3} \approx \frac{1}{6\pi^2} \left(\frac{\sqrt{2\mu}}{\hbar} \right)^3 E_f^{3/2}, \qquad E_f = \alpha \nu^{2/3},$$

kde α je nějaká konstanta; hodnota E_f je (až na malou modifikaci vynucenou spinem částice) *Fermiho energie.*

5.1.2 Rotátor s volnou osou

Uvažujme částici o hmotnosti μ, která se pohybuje stále v téže vzdálenosti r od pevného středu, takže její potenciální energii můžeme považovat za nulovou. Budeme hledat charakteristické hodnoty její celkové energie.

Stacionární Schrödingerova rovnice pro rotátor je

$$\Delta\psi + \frac{2\mu}{\hbar^2} E\psi = 0.$$

Tuto rovnici transformujeme do sférických souřadnic a využijeme toho, že $\dfrac{\partial\psi}{\partial r} = 0$. Dostaneme (sr. D)

$$\frac{1}{r^2 \cos^2\vartheta} \frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{r^2 \cos\vartheta} \frac{\partial}{\partial\vartheta} \left(\cos\vartheta \frac{\partial\psi}{\partial\vartheta} \right) + \frac{2\mu}{\hbar^2} E\psi = 0. \tag{5.9}$$

Řešení této rovnice má být vzhledem k normovací podmínce (5.5) ohraničené a v proměnné φ má být 2π-periodické. Dostáváme tedy okrajové podmínky

$$\psi(\varphi + 2\pi, \vartheta) = \psi(\varphi, \vartheta), \qquad \varphi \in \mathbb{R},\ \vartheta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right), \tag{5.10}$$

$$\limsup_{\vartheta \to -\frac{\pi}{2}+} |\psi(\varphi, \vartheta)| < \infty,\ \limsup_{\vartheta \to \frac{\pi}{2}-} |\psi(\varphi, \vartheta)| < \infty, \qquad \varphi \in \mathbb{R}. \tag{5.11}$$

Poznamenejme, že nenulová řešení úlohy (5.9), (5.10), (5.11) se nazývají *sférické funkce.* Tato řešení budeme hledat separací proměnných, tj. ve tvaru $\psi(\varphi, \vartheta) = \Phi(\varphi)\Theta(\vartheta)$. Dosazením do rovnice (5.9) dostaneme

$$\frac{1}{r^2 \cos^2\vartheta} \Phi''\Theta + \frac{1}{r^2 \cos\vartheta} \left(\Theta' \cos\vartheta \right)' \Phi + \frac{2\mu}{\hbar^2} E\Phi\Theta = 0$$

a po úpravě

$$-\frac{\Phi''}{\Phi} = \frac{\cos\vartheta}{\Theta} \left(\Theta' \cos\vartheta \right)' + \frac{2\mu E r^2 \cos^2\vartheta}{\hbar^2}. \tag{5.12}$$

Levá strana závisí pouze na proměnné φ, pravá pouze na proměnné ϑ, proto se musí obě strany rovnat nějaké konstantě σ. Funkce Φ je tedy řešením okrajové úlohy

$$\Phi'' + \sigma\Phi = 0, \qquad \Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi).$$

Tato úloha má nenulové řešení pouze pro $\sigma = m^2$, $m = 0, 1, 2, \ldots$ (sr. řešení úlohy (3.50), (3.52)). Tuto hodnotu dosadíme do rovnice (5.12). Dostaneme

$$\frac{\cos\vartheta}{\Theta} \left(\Theta' \cos\vartheta \right)' + \frac{2\mu E r^2 \cos^2\vartheta}{\hbar^2} = m^2. \tag{5.13}$$

Zavedeme novou nezávisle proměnnou s vztahem $s = \sin\vartheta$. Pak $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\vartheta} = \cos\vartheta = \sqrt{1-s^2}$ a tedy

$$(\Theta'\cos\vartheta)' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\cos\vartheta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\sqrt{1-s^2}\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\vartheta}\right)\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\vartheta} = \sqrt{1-s^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left((1-s^2)\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}s}\right) =$$
$$= \sqrt{1-s^2}\left((1-s^2)\frac{\mathrm{d}^2\Theta}{\mathrm{d}s^2} - 2s\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}s}\right).$$

To znamená, že rovnice (5.13) se transformuje na tvar

$$\frac{1-s^2}{\Theta}\left((1-s)^2\frac{\mathrm{d}^2\Theta}{\mathrm{d}s^2} - 2s\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}s}\right) + \frac{2\mu Er^2(1-s^2)}{\hbar^2} = m^2.$$

Označíme

$$\lambda = \frac{2\mu Er^2}{\hbar^2} \tag{5.14}$$

a předchozí rovnici upravíme na tvar

$$(1-s^2)\frac{\mathrm{d}^2\Theta}{\mathrm{d}s^2} - 2s\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}s} + \left(\lambda - \frac{m^2}{1-s^2}\right)\Theta = 0.$$

To je rovnice pro přidružené funkce k Legendreovým polynomům, sr. C.1.6. Tato rovnice má ohraničené řešení pouze pro $\lambda = l(l+1)$, kde $l = 0, 1, 2, \dots$. Vlastní funkce jakožto m-té derivace Legendreových polynomů stupně l jsou nenulové pouze pro $m \le l$. Charakteristické hodnoty energie tedy podle (5.14) jsou

$$E_{ml} = l(l+1)\frac{\hbar^2}{2\mu r^2} = l(l+1)\frac{\hbar^2}{2I}, \qquad l = 0, 1, 2, \dots,\ m = 0, 1, 2, \dots, l;$$

přitom $I = \mu r^2$ je moment setrvačnosti uvažované částice.

5.1.3 Kvantový oscilátor

Uvažujme částici, která se může vyskytovat pouze na přímce. Její potenciální energie má klasický tvar energie harmonického oscilátoru

$$V = V(x) = \frac{1}{2}\mu\omega^2 x^2,$$

kde μ označuje hmotnost částice a ω její frekvenci. Rovnice (5.4) v tomto případě nabývá tvar

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi + \frac{2\mu}{\hbar^2}\left(E - \frac{1}{2}\mu\omega^2x^2\right)\psi = 0. \tag{5.15}$$

V této rovnici nejprve změníme délkové měřítko, tj. zavedeme novou nezávisle proměnnou ξ vztahem

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{\mu\omega}}\,\xi.$$

Pak

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)\frac{\partial\xi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial\xi}\left(\sqrt{\frac{\mu\omega}{\hbar}}\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\right)\sqrt{\frac{\mu\omega}{\hbar}} = \frac{\mu\omega}{\hbar}\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2},$$

a rovnice (5.15) přejde na tvar

$$\frac{\mu\omega}{\hbar}\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2} + \frac{2\mu E}{\hbar^2}\psi - \frac{\mu^2\omega^2}{\hbar^2}\frac{\hbar}{\mu\omega}\xi^2\psi = 0,$$

který lze upravit na

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2} - \xi^2\psi = -\frac{2E}{\hbar\omega}\psi. \tag{5.16}$$

Integrál $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\psi(\xi)|^2 \, \mathrm{d}\xi$ má podle (5.5) konvergovat. Proto budeme řešení rovnice (5.16) hledat ve tvaru

$$\psi(\xi) = H(\xi)\mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{2}},$$

kde H je polynom. Pak

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2} = \frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\xi}H\mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{2}}\right) = \frac{\partial}{\partial\xi}\left((H' - \xi H)\mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{2}}\right) = \big(H'' - H - \xi H' - \xi\,(H' - \xi H)\big)\mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{2}} =$$
$$= \big(H'' - 2\xi H' + (\xi^2 - 1)H\big)\mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{2}}$$

a po dosazení do rovnice (5.16) dostaneme

$$\big(H'' - 2\xi H' + (\xi^2 - 1)H\big)\,\mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{2}} - \xi^2 H\mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{2}} + \frac{2E}{\hbar\omega}H\mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{2}} = 0,$$

po úpravě

$$H'' - 2\xi H' + \left(\frac{2E}{\hbar\omega} - 1\right)H = 0.$$

Při označení $\lambda = \dfrac{2E}{\hbar\omega} - 1$ dostaneme rovnici

$$H'' - 2\xi H' + \lambda H = 0. \tag{5.17}$$

To je diferenciální rovnice pro Čebyševovy-Hermiteovy polynomy, sr. C.3.3. Ta má řešení v oboru polynomů pouze pro $\lambda = \lambda_n = 2n$, $n = 0, 1, 2\ldots.$ Odtud dostaneme, že $\dfrac{2E_n}{\hbar\omega} - 1 = 2n$, neboli že možné hodnoty energie tvoří diskrétní množinu

$$E_n = \frac{2n + 1}{2}\hbar\omega, \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{5.18}$$

Získaný výsledek odůvodňuje Planckův výklad interakce záření s látkou za předpokladu, že látku můžeme považovat za soubor oscilátorů, z nichž každý vysílá nebo pohlcuje záření o frekvenci jemu vlastní. Výměna energie je omezena vlastními hodnotami pro dané oscilátory tak, že může probíhat pouze v jednotkách $\hbar\omega$.

Pro $\lambda = 0$, tedy pro základní stav odpovídají energii $E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$, je řešením rovnice polynom nultého stupně, tj. konstanta. Vlnová funkce ψ_0 odpovídající základnímu energetickému stavu je tedy dána vztahem

$$\psi_0(\xi) = c\mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{2}}. \tag{5.19}$$

Vrátíme-li se k původní délkové jednotce, dostaneme vlnovou funkci částice v základním stavu

$$\psi_0(x) = c\mathrm{e}^{-\frac{\mu\omega}{2\hbar}x^2}.$$

Hodnotu konstanty c určíme z podmínky (5.5) kladené na vlnovou funkci, tedy z podmínky

$$1 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\psi_0(x)|^2\mathrm{d}x = c^2\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|\mathrm{e}^{-\frac{\mu\omega}{2\hbar}x^2}\right|^2\mathrm{d}x = c^2\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\frac{\mu\omega}{\hbar}x^2}\mathrm{d}x = c^2\sqrt{\frac{\hbar}{\mu\omega}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-s^2}\mathrm{d}s = c^2\sqrt{\frac{\hbar\pi}{\mu\omega}};$$

využili jsme rovnost (C.21). Odtud dostaneme $c^2 = \sqrt{\dfrac{\mu\omega}{\hbar\pi}}$. To znamená, že hustota rozložení pravděpodobnosti výskytu částice v základním stavu je

$$|\psi_0(x)|^2 = \sqrt{\frac{\mu\omega}{\hbar\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{\mu\omega}{\hbar}x^2}.$$

Jedná se o hustotu normálního (Gaussova) rozdělení pravděpodobnosti se střední hodnotou 0 a rozptylem $\dfrac{\hbar}{2\mu\omega}$.

Hodnoty energie E_n dosadíme z vyjádření (5.18) do rovnice (5.16) a tu upravíme na operátorový tvar

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} - \xi^2\right)\psi_n = -(2n + 1)\psi_n, \tag{5.20}$$

kde ψ_n označuje vlastní funkci příslušnou k n-té vlastní hodnotě. S využitím rovnosti (5.20) dostaneme

$$\left(\frac{\partial}{\partial\xi}+\xi\right)\left(\frac{\partial}{\partial\xi}-\xi\right)\psi_n=\left(\frac{\partial}{\partial\xi}+\xi\right)\left(\frac{\partial\psi_n}{\partial\xi}-\xi\psi_n\right)=\frac{\partial^2\psi_n}{\partial\xi}+\xi\frac{\partial\psi_n}{\partial\xi}-\psi_n-\xi\frac{\partial\psi_n}{\partial\xi}-\xi^2\psi_n=$$
$$=\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}-\xi^2\right)\psi_n-\psi_n=-(2n+1)\psi_n-\psi_n=-2(n+1)\psi_n, \quad (5.21)$$

jinak řečeno, funkce ψ_n je vlastní funkcí operátoru $-\left(\frac{\partial}{\partial\xi}+\xi\right)\left(\frac{\partial}{\partial\xi}-\xi\right)$ příslušná k vlastní hodnotě $2(n+1)$. Podobně dostaneme

$$\left(\frac{\partial}{\partial\xi}-\xi\right)\left(\frac{\partial}{\partial\xi}+\xi\right)\psi_n=-2n\psi_n, \quad (5.22)$$

takže funkce ψ_n je vlastní funkcí operátoru $-\left(\frac{\partial}{\partial\xi}-\xi\right)\left(\frac{\partial}{\partial\xi}+\xi\right)$ příslušná k vlastní hodnotě $2n$.

Na obě strany rovnosti (5.21) aplikujeme lineární operátor $\left(\frac{\partial}{\partial\xi}-\xi\right)$. Dostaneme

$$\left(\frac{\partial}{\partial\xi}-\xi\right)\left(\frac{\partial}{\partial\xi}+\xi\right)\left(\frac{\partial}{\partial\xi}-\xi\right)\psi_n=-2(n+1)\left(\frac{\partial}{\partial\xi}-\xi\right)\psi_n,$$

neboli

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial\xi}-\xi\right)\left(\frac{\partial}{\partial\xi}+\xi\right)\right]\left(\frac{\partial}{\partial\xi}-\xi\right)\psi_n=-2(n+1)\left(\frac{\partial}{\partial\xi}-\xi\right)\psi_n,$$

což znamená, že funkce $\left(\frac{\partial}{\partial\xi}-\xi\right)\psi_n$ je vlastní funkcí operátoru $-\left(\frac{\partial}{\partial\xi}-\xi\right)\left(\frac{\partial}{\partial\xi}+\xi\right)$ příslušnou k vlastní hodnotě $2(n+1)$, takže vzhledem k (5.22) je

$$\left(\frac{\partial}{\partial\xi}-\xi\right)\psi_n=\psi_{n+1}. \quad (5.23)$$

Analogicky odvodíme vztah

$$\left(\frac{\partial}{\partial\xi}+\xi\right)\psi_n=\psi_{n-1}. \quad (5.24)$$

Vzorec (5.23) lze využít jako rekurentní formuli pro výpočet vlastních funkcí ψ_n, $n=1,2,\dots$ příslušných k jednotlivým energetickým hladinám E_n z vlnové funkce (5.19) pro základní stav.

Relace (5.23) a (5.24) lze také interpretovat jako popis přechodu částice z jedné energetické hladiny na sousední. Poněvadž energie se v procesu musí buď objevit (oscilátor v látce přijme energii) nebo zničit (oscilátor v látce vyzáří energii), nazývají se operátory na levé straně rovností (5.23) a (5.24) *operátory kreace* a *anihilace.*

Dodatek A

Distribuce

A.1 Základní pojmy

Nechť $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je funkce n proměnných definovaná na celém prostoru $\mathbb{R}^n$. *Nosič funkce* φ definujeme jako uzávěr množiny $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \varphi(\boldsymbol{x}) \neq 0\}$ a značíme ho $\operatorname{Supp} \varphi$.

Testovací funkce

Symbolem $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ označíme množinu funkcí definovaných na $\mathbb{R}^n$, které jsou třídy C^∞ (mají spojité všechny parciální derivace libovolného řádu) a jejichž nosič je množina A kompaktní v prostoru $\mathbb{R}^n$. Množina funkcí $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ s obvykle definovaným sčítáním funkcí a násobením číslem, tj. $(\varphi+\psi)(x) = \varphi(x)+\psi(x)$ a $(c\varphi)(x) = c\varphi(x)$, je vektorovým prostorem. Pokud nebude hrozit nedorozumění, budeme prostor $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ značit stručně $\mathcal{D}$.

Na množině $\mathcal{D}$ definujeme metriku ρ vztahem

$$\rho(\varphi, \psi) \;=\; \sup \left\{ \left| \frac{\partial^{i_1+i_2+\cdots+i_n}}{\partial x_1^{i_1} \partial x_2^{i_2} \cdots \partial x_n^{i_n}} (\varphi(\boldsymbol{x}) - \psi(\boldsymbol{x})) \right| : \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n,\, (i_1, i_2, \ldots, i_n) \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n \right\}.$$

Množinu $\mathcal{D}$ s touto metrikou nazýváme *prostor testovacích funkcí*, jeho prvky nazýváme *testovací funkce*.

Příklady testovacích funkcí.

Položme

$$\lambda(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-1/x^2}, & x > 0, \\ 0, & x \le 0. \end{cases}$$

Funkce λ má spojité derivace všech řádů, neboť

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} \mathrm{e}^{-1/x^2} = \frac{\text{polynom v } x}{\text{polynom v } x}\, \mathrm{e}^{-1/x^2} \quad \text{a z toho plyne } \lim_{x \to 0+} \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} \mathrm{e}^{-1/x^2} = 0.$$

Funkce φ definovaná vztahem $\varphi(x) = \lambda(x)\lambda(1-x)$ má kompaktní nosič $[0,1]$ a má derivace všech řádů.

Pro libovolné reálné $c > 0$ položme

$$\kappa_c(x) = \frac{\lambda(x)}{\lambda(x) + \lambda(c-x)}. \tag{A.1}$$

Pak κ_c je neklesající nezáporná funkce, která má derivace všech řádů a platí pro ni

$$\kappa_c(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 1, & x > c. \end{cases}$$

Funkce κ_c tedy na intervalu délky c vyhlazuje skok funkčních hodnot.

Funkce ψ definovaná vztahem

$$\psi(x) = 1 - \kappa_c\left(|x| - \tfrac{1}{2}\right)$$

je nezáporná funkce, která má derivace všech řádů a

$$\psi(x) = \begin{cases} 0, & |x| \geq \frac{1}{2} + c, \\ 1, & |x| \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

a tedy má kompaktní nosič $[-\frac{1}{2} - c, \frac{1}{2} + c]$.

Funkce φ, ψ jsou typické testovací funkce z prostoru $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Testovací funkce z prostoru $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ můžeme získat jako součin funkcí „jednorozměrných", např.

$$\varphi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \varphi(x_1)\varphi(x_2)\cdots\varphi(x_n), \quad \psi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \psi(x_1)\psi(x_2)\cdots\psi(x_n).$$

Operace v prostoru testovacích funkcí

Kromě standardních operací součtu a součinu funkcí a násobení funkce číslem zavádíme operace:

- *Posunutí (translace)* testovací funkce o vektor $\boldsymbol{y}$ je definována vztahem $\varphi_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x}) = \varphi(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y})$.
- *Změna měřítka (přeškálování)* nezávisle proměnné faktorem $\alpha > 0$ je definováno vztahem $\varphi_\alpha(\boldsymbol{x}) = \varphi(\alpha\boldsymbol{x})$.

Pomocí těchto operací můžeme snadno vytvářet další testovací funkce ze známých.

Lineární funkcionál

Zobrazení $T : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, pro které platí

$$T(\varphi + \psi) = T(\varphi) + T(\psi), \quad T(c\varphi) = cT(\varphi),\ c \in \mathbb{R}$$

nazýváme *lineární funkcionál na prostoru testovacích funkcí.* Obraz funkce φ při zobrazení T, tj. číslo $T(\varphi)$, budeme stručně značit $T\varphi$.

Množinu všech lineárních funkcionálů $\mathcal{D} \to \mathbb{R}$, která je zase vektorovým prostorem, nazýváme *(algebraický) duální prostor k* $\mathcal{D}$ a značíme ji $\mathcal{D}'$.

Definice distribuce

Spojitý lineární funkcionál na prostoru testovacích funkcí se nazývá *distribuce.*

Podrobněji: Zobrazení $T : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ nazveme distribuce, jestliže

$$\begin{aligned}
&(\forall \varphi, \psi \in \mathcal{D}) \quad T(\varphi + \psi) = T\varphi + T\psi\,, \\
&(\forall \varphi \in \mathcal{D})\,(\forall c \in \mathbb{R}) \quad T(c\varphi) = cT\varphi\,, \\
&(\forall \{\varphi_n\} \subseteq \mathcal{D})\,(\forall \varphi \in \mathcal{D}) \quad \varphi_n \to \varphi \text{ v prostoru } (\mathcal{D}, \rho) \ \Rightarrow\ T\varphi_n \to T\varphi \text{ v } \mathbb{R} \text{ s přirozenou metrikou.}
\end{aligned}$$

Množinu všech lineárních funkcionálů $\mathcal{D} \to \mathbb{R}$ nazýváme *topologický duální prostor k* $\mathcal{D}$ a značíme ji $\mathcal{D}^*$.

Příklady distribucí

1. Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je funkce taková, že pro každou kompaktní množinu $K \subseteq \mathbb{R}^n$ existuje konečný integrál $\int_K f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ (tzv. *lokálně integrabilní funkce na* $\mathbb{R}^n$). Definujme distribuci $T_f \in \mathcal{D}^*$ vztahem

$$T_f\varphi \;=\; \int_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{x})\varphi(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,. \tag{A.2}$$

   Distribuce $T \in \mathcal{D}^*$ taková, že existuje lokálně integrabilní funkce f pro niž $T\varphi = \left\langle f \;\middle|\; \varphi \right\rangle$ pro všechny $\varphi \in \mathcal{D}$, se nazývá *regulární distribuce.* Distribuce, která není regulární, se někdy nazývá *singulární.* Každá lokálně integrabilní funkce určuje distribuci, můžeme tedy lokálně integrabilní funkce považovat za distribuce[1]. Z tohoto důvodu se distribuce někdy nazývají *zobecněné funkce.*

[1] Povšimněme si, že dvě různé funkce mohou určovat tutéž distribuci; konkrétně jde o funkce, které se od sebe liší na množině nulové míry. Funkce f a g takové, že $\int_K f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x = \int_K g(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x$ pro každou kompaktní $K \subseteq \mathbb{R}^n$ jsou pro určení regulární distribuce ekvivalentní. Přesněji bychom tedy měli říkat, že ztotožňujeme distribuce a třídy ekvivalentních funkcí.

2. Funkce $f(x) = \dfrac{1}{x}$ je lokálně integrabilní na otevřeném intervalu $(0, \infty)$, ale není lokálně integrabilní na celém $\mathbb{R}$. Avšak pro všechna a, b, $a < 0 < b$ je

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \left(\int_a^{-\varepsilon} \frac{\mathrm{d}x}{x} + \int_\varepsilon^b \frac{\mathrm{d}x}{x} \right) = \lim_{\varepsilon \to 0+} \left(\ln \frac{\varepsilon}{|a|} + \ln \frac{b}{\varepsilon} \right) = \lim_{\varepsilon \to 0+} \ln \frac{b}{|a|} = \ln \frac{b}{|a|}.$$

Tuto limitu označíme $\mathrm{vp} \int_a^b \dfrac{\mathrm{d}x}{x}$ a nazveme *integrál ve smyslu Cauchyovy hlavní hodnoty.*
Tuto úvahu zobecníme. Nechť funkce f je lokálně integrabilní na $\mathbb{R}^n \setminus \{\boldsymbol{x}_0\}$. Položme

$$B^r_{\boldsymbol{x}_0} = \{\boldsymbol{x} : |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0| < r\}$$

(otevřená koule se středem $\boldsymbol{x}_0$ a poloměrem r). Integrál z funkce f ve smyslu hlavní hodnoty definujeme jako

$$\mathrm{vp} \int_K f(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{K \setminus B^\varepsilon_{\boldsymbol{x}}} f(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\boldsymbol{x},$$

pokud limita na pravé straně existuje.
Má-li funkce f pro každou kompaktní množinu $K \subseteq \mathbb{R}^n$ integrál ve smyslu hlavní hodnoty, pak zobrazení $T_f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ definované vztahem

$$T_f \varphi = \mathrm{vp} \int_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{x}) \varphi(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\boldsymbol{x} \tag{A.3}$$

je distribucí.

3. *Diracova distribuce* δ přiřadí každé testovací funkci $\varphi \in \mathcal{D}$ hodnotu $\varphi(0)$.
Diracova distribuce není regulární.

Výrazy na pravých stranách rovností (A.2) a (A.3) formálně připomínají skalární součin. Proto hodnoty těchto distribucí zapisujeme ve tvaru

$$\left\langle\, f(\boldsymbol{x}) \,\middle|\, \varphi(\boldsymbol{x}) \,\right\rangle, \text{ nebo stručně } \left\langle\, f \,\middle|\, \varphi \,\right\rangle$$

Přestože Diracova distribuce není regulární ani není definována pomocí nějaké (klasické) funkce, používáme pro ni zápis

$$\left\langle\, \delta \,\middle|\, \varphi \,\right\rangle \;=\; \left\langle\, \delta(\boldsymbol{x}) \,\middle|\, \varphi(\boldsymbol{x}) \,\right\rangle \;=\; \int_{\mathbb{R}^n} \delta(\boldsymbol{x}) \varphi(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\boldsymbol{x} \;=\; \varphi(0)\,.$$

Podobným způsobem budeme zapisovat jakékoliv distribuce. V Diracově terminologii je tedy distribuce bravektorem a testovací funkce ketvektorem. Diracovu distribuci $\langle \delta$ budeme jednoduše psát jako δ, případně $\delta(\boldsymbol{x})$ pro zdůraznění nezávisle proměnné testovacích funkcí.

Symbolem $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ označme množinu lokálně integrovatelných funkcí na $\mathbb{R}^n$ (přesněji, množinu tříd ekvivalentních lokálně integrabilních funkcí). Testovací funkce jakožto spojité funkce jsou lokálně integrabilní. Určují tedy regulární distribuce. Platí tedy

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{D}^*(\mathbb{R}^n).$$

Nosič distribuce

Řekneme, že distribuce $T \in \mathcal{D}^*$ je na množině $A \subseteq \mathbb{R}^n$ *nulová*, jestliže $T\varphi = 0$ pro každou testovací funkci $\varphi \in \mathcal{D}^*$ takovou, že $\mathrm{Supp}\, \varphi \subseteq A$.

Nosič distribuce T je nejmenší (vzhledem k množinové inklusi) uzavřená množina taková, že na jejím komplementu je T nulová. Nosič distribuce T označíme $\mathrm{Supp}\, T$.

Nosič Diracovy distribuce je jednoprvková množina $\{0\}$.

Základní operace v prostoru distribucí

- *Součet distribucí* $T, S \in \mathcal{D}^*$:
  $T + S \in \mathcal{D}^*$ je distribuce, která splňuje rovnost
  $$(T+S)\varphi = T\varphi + S\varphi$$
  pro každou testovací funkci $\varphi \in \mathcal{D}$.

- *Násobení distribuce* $T \in \mathcal{D}^*$ *funkcí* $a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *třídy* C^∞:
  Je-li $\varphi \in \mathcal{D}$ testovací funkce, pak φ má kompaktní nosič. To znamená, že také funkce $a\varphi$ má kompaktní nosič, tedy $a\varphi \in \mathcal{D}$.
  $aT \in \mathcal{D}'$ je distribuce, která splňuje rovnost
  $$(aT)\varphi = T(a\varphi)$$
  pro každou testovací funkci $\varphi \in \mathcal{D}$.

- *Posunutí (translace) distribuce* $T \in \mathcal{D}$ o vektor $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$:
  ${}^{\boldsymbol{y}}T \in \mathcal{D}^*$ je distribuce, která splňuje rovnost
  $${}^{\boldsymbol{y}}T\varphi = T\varphi_{\boldsymbol{y}}$$
  pro každou testovací funkci $\varphi \in \mathcal{D}$.
  Pro regulární distribuci určenou funkcí f platí
  $$\left({}^{\boldsymbol{y}}T_f\right)\varphi = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{x})\varphi(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{y})\varphi(\boldsymbol{z})\mathrm{d}\boldsymbol{z};$$
  v integrálu jsme použili substituci $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$.

S pomocí Diracovy symboliky můžeme definice operací s distribucemi zapsat ve tvaru:

- Součet: $\left\langle\, f+g \,\middle|\, \varphi \,\right\rangle = \left\langle\, f \,\middle|\, \varphi \,\right\rangle = \left\langle\, f \,\middle|\, \varphi \,\right\rangle + \left\langle\, g \,\middle|\, \varphi \,\right\rangle$
- Násobek funkcí: $\left\langle\, af \,\middle|\, \varphi \,\right\rangle = \left\langle\, f \,\middle|\, a\varphi \,\right\rangle$
- Translace: $\left\langle\, f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \,\middle|\, \varphi(\boldsymbol{x}) \,\right\rangle = \left\langle\, f(\boldsymbol{x}) \,\middle|\, \varphi(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) \,\right\rangle$

Zejména pro Diracovu distribuci platí

$$\left\langle\, \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \,\middle|\, \varphi(\boldsymbol{x}) \,\right\rangle = \left\langle\, \delta(\boldsymbol{x}) \,\middle|\, \varphi(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) \,\right\rangle = \varphi(\boldsymbol{y}), \qquad \int\limits_{\mathbb{R}^n} \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\varphi(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \varphi(\boldsymbol{y});$$

$$\left\langle\, \delta(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}) \,\middle|\, \varphi(\boldsymbol{x}) \,\right\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \delta(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})\varphi(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \delta(\boldsymbol{z})\varphi(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z})\mathrm{d}\boldsymbol{z} = \varphi(\boldsymbol{y}).$$

Translace Diracovy distribuce o vektor $\boldsymbol{y}$, tedy distribuce zapisovaná jako $\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$ se nazývá *Diracova distribuce soustředěná v bodě* $\boldsymbol{y}$. Přitom platí

$$\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) = \delta(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}). \tag{A.4}$$

A.2 Konvergence v prostoru distribucí

Řekneme, že posloupnost distribucí $\{T_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{D}^*$ *konverguje pro* $k \to \infty$ *k distribuci* $T \in \mathcal{D}^*$ a píšeme

$$\lim_{k\to\infty} T_k = T\,,$$

jestliže pro každou testovací funkci $\varphi \in \mathcal{D}^*$ je $\lim\limits_{k\to\infty} T_k\varphi = T\varphi$ (v tomto případě jde o konvergenci číselných posloupností).

Definici lze zapsat také v Diracově symbolice: Řekneme, že posloupnost distribucí $\{\langle f_k\}_{k=1}^{\infty}$ konverguje pro $k \to \infty$ k distribuci $\langle f$ a píšeme $\lim\limits_{k\to\infty} \langle f_k = \langle f$, jestliže pro každou testovací funkci $\varphi \in \mathcal{D}^*$ je $\lim\limits_{k\to\infty} \big\langle\, f_k \,\big|\, \varphi \,\big\rangle = \big\langle\, f \,\big|\, \varphi \,\big\rangle$.

Pro konvergenci v prostoru distribucí platí následující věty:

Věta 1: Nechť $\{T_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{D}^*$ je posloupnost distribucí taková, že pro každou testovací funkci $\varphi \in \mathcal{D}$ existuje limita posloupnosti čísel $\{T_k\varphi\}_{k=1}^{\infty}$. Definujme zobrazení $T : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ předpisem

$$T(\varphi) \;=\; \lim_{k\to\infty} T_k\varphi\,.$$

Pak T je distribuce, $T \in \mathcal{D}^*$.

Linearita plyne z linearity každé z distribucí T_k a z linearity operátoru limity posloupností), spojitost je dokázána např. v knize: Laurent Schwartz. *Théorie des distributions,* Paris 1973.

Věta 2: Ke každé distribuci $T \in \mathcal{D}^*$ existuje posloupnost testovacích funkcí $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{D}$, že

$$\lim_{k\to\infty} \langle \varphi_k = T, \quad \text{neboli } \big(\forall\varepsilon \in \mathcal{D}\big) \lim_{k\to\infty} \big\langle\, \varphi_k \,\big|\, \varphi \,\big\rangle = T\varphi.$$

tj. že tato posloupnost testovacích funkcí konverguje k T ve smyslu distribucí.

Každou distribuci lze aproximovat pomocí posloupnosti testovacích funkcí.

A.2.1 δ-vytvořující posloupnosti

Nechť $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ je posloupnost lokálně integrabilních funkcí na $\mathbb{R}^n$ takových, že posloupnost regulárních distribucí $\{T_{f_k}\}_{k=1}^{\infty}$ konverguje k Diracově distribuci, tj.

$$\lim_{k\to\infty} \big\langle\, f_k \,\big|\, \varphi \,\big\rangle = \varphi(0)$$

pro každou testovací funkci $\varphi \in \mathcal{D}$. Pak posloupnost $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ se nazývá *δ-vytvořující posloupnost*, funkce f_k se nazývají *impulsní funkce.*

Příklady δ-vytvořujících posloupností:

Následující posloupnosti funkcí konvergují k Diracově distribuci na prostoru $\mathcal{D}^*(\mathbb{R})$.

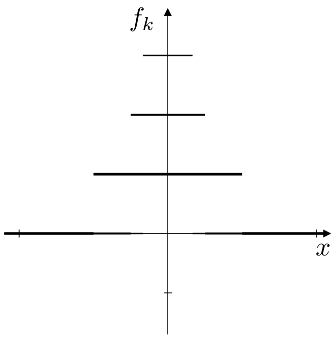
$$f_k(x) \;=\; \begin{cases} k, & |x| \le \dfrac{1}{2k} \\ 0, & |x| > \dfrac{1}{2k} \end{cases}, \qquad\qquad f_k(x) \;=\; \begin{cases} k - k^2|x|, & |x| \le \dfrac{1}{k} \\ 0, & |x| > \dfrac{1}{k} \end{cases},$$

$$f_k(x) \;=\; \sqrt{\frac{k}{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-kx^2/2}\,, \qquad\qquad f_k(x) \;=\; \frac{\sin kx}{\pi x}\,,$$

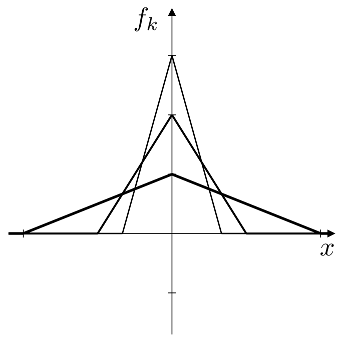
$$f_k(x) \;=\; \frac{1}{\pi}\frac{\alpha_k}{x^2+\alpha_k^2}, \text{ kde } \{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty} \text{ je libovolná posloupnost kladných čísel taková, že } \lim_{k\to\infty}\alpha_k = 0\,,$$

$$f_k(x) \;=\; \begin{cases} \dfrac{1}{\ell} + \dfrac{2}{\ell}\sum\limits_{m=1}^{k} \cos\dfrac{2\pi m}{\ell}x, & |x| \le \frac{1}{2}\ell \\ 0, & |x| > \frac{1}{2}\ell \end{cases}.$$

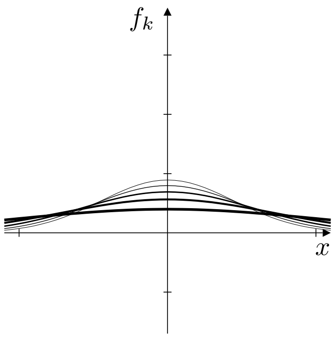
Na obrázcích A.1 je znázorněno několik prvních členů některých δ-vytvořujících posloupností.



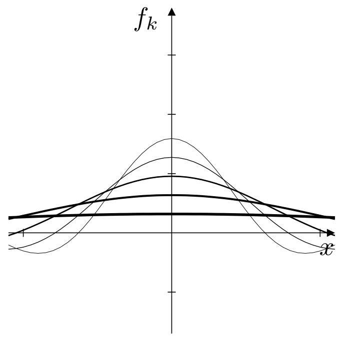
$$f_k(x) = \begin{cases} k, & |x| \leq 1/(2k) \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$$



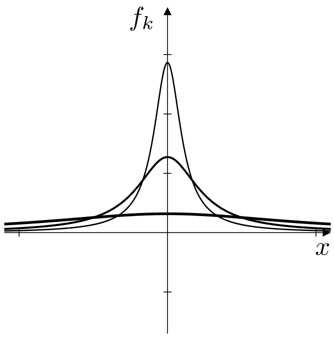
$$f_k(x) = \begin{cases} k - k^2|x|, & |x| \leq 1/k \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$$



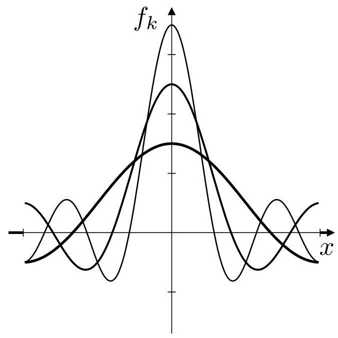
$$f_k(x) = \sqrt{\frac{k}{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}kx^2}$$



$$f_k(x) = \frac{\sin kx}{\pi x}$$



$$f_k(x) = \frac{1}{\pi}\frac{k^2}{k^4x^2+1}$$



$$f_k(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} + \sum\limits_{n=1}^{k} \cos n\pi x, & |x| \leq 1 \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$$

Obrázek A.1: Příklady δ-vytvořujících posloupností na prostoru $\mathcal{D}^*(\mathbb{R})$. S rostoucím k se zmenšuje síla čáry.

A.3 Derivování distribucí

Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je diferencovatelná (a tedy lokálně integrabilní) funkce, $\varphi \in \mathcal{D}$ je testovací funkce. Pak platí

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{x})\varphi(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} &= \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\cdots\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{x})\varphi(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x_1\right)\mathrm{d}x_2\ldots\mathrm{d}x_{n-1}\mathrm{d}x_n = \\
&= \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\cdots\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left([f(\boldsymbol{x})\varphi(\boldsymbol{x})]_{x_1=-\infty}^{\infty} - \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\boldsymbol{x})\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x_1\right)\mathrm{d}x_2\ldots\mathrm{d}x_{n-1}\mathrm{d}x_n = \\
&= -\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\cdots\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\boldsymbol{x})\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\ldots\mathrm{d}x_{n-1}\mathrm{d}x_n = -\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{x})\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,,
\end{aligned}$$

poněvadž $\operatorname{Supp} f\varphi$ je kompaktní.

Provedený výpočet motivuje následující definici.

Definice derivace distribuce

Parciální derivace distribuce $T \in \mathcal{D}^*$ podle první proměnné je distribuce $\dfrac{\partial}{\partial x_1}T$, pro niž platí

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}T\right)\varphi = -T\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right)$$

pro každou testovací funkci $\varphi \in \mathcal{D}$.

Obecně definujeme parciální derivace distribuce podle libovolných proměnných libovolného řádu rovností

$$\left(\frac{\partial^{i_1+i_2+\cdots i_n}}{\partial x_1^{i_1}\partial x_2^{i_2}\cdots\partial x_n^{i_n}}T\right)\varphi = (-1)^{i_1+i_2+\cdots i_n}T\left(\frac{\partial^{i_1+i_2+\cdots i_n}}{\partial x_1^{i_1}\partial x_2^{i_2}\cdots\partial x_n^{i_n}}\varphi\right)$$

pro každou testovací funkci φ a každý multiindex $(i_1, i_j, \ldots, i_n) \in (\mathbb{N}\cup\{0\})^n$.

Každá distribuce má derivace libovolného řádu.

Každá lokálně integrabilní funkce f určuje regulární distribuci. Tato distribuce má derivaci libovolného řádu definovanou rovností

$$\left\langle \frac{\partial^{i_1+i_2+\cdots i_n} f}{\partial x_1^{i_1}\partial x_2^{i_2}\cdots\partial x_n^{i_n}} \,\middle|\, \varphi \right\rangle = (-1)^{i_1+i_2+\cdots i_n}\left\langle f \,\middle|\, \frac{\partial^{i_1+i_2+\cdots i_n}}{\partial x_1^{i_1}\partial x_2^{i_2}\cdots\partial x_n^{i_n}}\varphi \right\rangle$$

V tomto smyslu lze říci, že každá lokálně integrabilní funkce f má derivaci libovolného řádu. Tato distribuce však obecně není funkcí ale distribucí. Nazýváme ji *distributivní derivací funkce f*.

Příklady distributivních derivací funkcí

- **Derivace absolutní hodnoty:**
  Pro každou testovací funkci $\varphi \in \mathcal{D}$ platí

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{\partial}{\partial x}|x| \,\middle|\, \varphi(x) \right\rangle &= -\left\langle |x| \,\middle|\, \varphi'(x) \right\rangle = -\int\limits_{-\infty}^{\infty}|x|\varphi'(x)\mathrm{d}x = \\
&= \int\limits_{-\infty}^{0} x\varphi'(x)\mathrm{d}x - \int\limits_{0}^{\infty}\varphi'(x)\mathrm{d}x = \left[x\varphi(x)\right]_{-\infty}^{0} - \int\limits_{-\infty}^{0}\varphi(x)\mathrm{d}x - \left[x\varphi(x)\right]_{0}^{\infty} + \int\limits_{0}^{\infty}\varphi(x)\mathrm{d}x = \\
&= -\int\limits_{-\infty}^{0}\varphi(x)\mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{\infty}\varphi(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{-\infty}^{\infty}(\operatorname{sgn} x)\varphi(x)\mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

  tedy $\dfrac{\partial}{\partial x}|x| = \operatorname{sgn} x$ ve smyslu distribucí.

- **Heavisidova skoková funkce (distribuce):**
  Funkce $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovaná vztahem

$$H(x) \;=\; \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

je lokálně integrabilní. Určuje tedy regulární distribuci, pro niž platí

$$\langle\, H \mid \varphi \,\rangle \;=\; \int\limits_{-\infty}^{\infty} H(x)\varphi(x)\mathrm{d}x \;=\; \int\limits_{0}^{\infty} \varphi(x)\mathrm{d}x\,.$$

Povšimněme si, že Heavisidova funkce je limitou funkcí $\kappa_{1/k}$ definovaných vztahem (A.1); tuto limitu můžeme chápat tak, že $\lim\limits_{k\to\infty} \kappa_{1/k}(x) = H(x)$ pro každé $x \neq 0$, nebo že $\lim\limits_{k\to\infty} \langle \kappa_{1/k} = \langle H$ ve smyslu distribucí. Dále platí

$$\langle\, H' \mid \varphi \,\rangle \;=\; -\langle\, H \mid \varphi' \,\rangle \;=\; -\int\limits_{0}^{\infty} \varphi'(x)\mathrm{d}x \;=\; -\left[\varphi(x)\right]_0^\infty \;=\; \varphi(0) \;=\; \langle\, \delta \mid \varphi \,\rangle\,,$$

tedy distributivní derivací Heavisidovy funkce H je Diracova distribuce (soustředěná v bodě 0).

Obecně: Funkce $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definovaná vztahem

$$H(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{cases} 1, & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots x_n \geq 0 \\ 0, & \text{jinak} \end{cases}$$

určuje regulární distribuci:

$$\begin{aligned} \langle\, H \mid \varphi \,\rangle \;&=\; \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\cdots\int\limits_{-\infty}^{\infty} H(x_1, x_2, \ldots, x_n)\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n \;= \\ &=\; \int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty}\cdots\int\limits_{0}^{\infty} \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n\,. \end{aligned}$$

Z výpočtu $\left\langle \dfrac{\partial^n}{\partial x_1\partial x_2\cdots\partial x_n} H \;\middle|\; \varphi \right\rangle \;=$

$$\begin{aligned} &=\; (-1)^n \left\langle H \;\middle|\; \frac{\partial^n}{\partial x_1\partial x_2\cdots\partial x_n}\varphi \right\rangle \;= \\ &=\; (-1)^n \int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty}\cdots\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\partial^n}{\partial x_1\partial x_2\cdots\partial x_n}\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n \;= \\ &=\; (-1)^n \int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty}\cdots\int\limits_{0}^{\infty} \left[\frac{\partial^{n-1}}{\partial x_2\partial x_3\cdots\partial x_n}\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)\right]_{x_1=0}^{\infty} \mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3\cdots\mathrm{d}x_n \;= \\ &=\; -(-1)^n \int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty}\cdots\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\partial^{n-1}}{\partial x_2\partial x_3\cdots\partial x_n}\varphi(0, x_2, x_3, \ldots, x_n)\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3\cdots\mathrm{d}x_n \;=\; \cdots \;= \\ &=\; (-1)^{2n}\varphi(0, 0, \ldots, 0) \;=\; \varphi(0, 0, \ldots, 0)\,, \end{aligned}$$

nyní plyne, že distributivní derivace $\dfrac{\partial^n}{\partial x_1\partial x_2\cdots\partial x_n} H$ určuje Diracovu distribuci na prostoru $\mathbb{R}^n$.

Distributivní derivace funkcí jedné proměnné

Nechť funkce f je spojitá na každém z intervalů $(-\infty, 0)$, (0∞) a existuje

$$\sigma_0 = \lim_{x\to 0+} f(x) - \lim_{x\to 0-} f(x).$$

Pak je tato funkce lokálně integrabilní na $\mathbb{R}$, určuje tedy regulární distribuci T_f. Pro každou testovací funkci $\varphi \in \mathcal{D}$ platí

$$\begin{aligned}
T_f'\varphi &= -\left\langle f(x) \mid \varphi'(x) \right\rangle = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x)\mathrm{d}x = -\int_{-\infty}^{0} f(x)\varphi'(x)\mathrm{d}x - \int_{0}^{\infty} f(x)\varphi'(x)\mathrm{d}x = \\
&= -\left[f(x)\varphi(x)\right]_{-\infty}^{0} + \int_{-\infty}^{0} f'(x)\varphi(x)\mathrm{d}x - \left[f(x)\varphi(x)\right]_{0}^{\infty} + \int_{0}^{\infty} f'(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = \\
&= \lim_{x\to 0+} f(x)\varphi(x) - \lim_{x\to 0-} f(x)\varphi(x) + \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = \\
&= \varphi(0)\left(\lim_{x\to 0+} f(x) - \lim_{x\to 0-} f(x)\right) + \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = \\
&= \sigma_0\varphi(0) + \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = \sigma_0 \left\langle \delta \mid \varphi \right\rangle + \left\langle f' \mid \varphi \right\rangle = \sigma_0 \left\langle \delta \mid \varphi \right\rangle + T_{f'}\varphi\,,
\end{aligned}$$

tj.

$$(\forall \varphi \in \mathcal{D}) \left\langle \frac{\partial}{\partial x} f \;\middle|\; \varphi \right\rangle = \sigma_0 \left\langle \delta \mid \varphi \right\rangle + \left\langle f' \mid \varphi \right\rangle, \quad \text{symbolicky } T_f' = \sigma_0\delta + T_{f'}\,.$$

Obecně: Nechť funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je třídy C^∞ na každém z intervalů $(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$ a nechť každá její derivace je lokálně integrabilní. Tato funkce určuje regulární distribuci T_f.

Označme

$$\sigma_m = \lim_{x\to 0+} f^{(m)}(x) - \lim_{x\to 0-} f^{(m)}(x) \quad \text{a} \quad T_f' = \frac{\partial}{\partial x} T,\ T_f'' = \frac{\partial^2}{\partial x^2} T\ \ldots,\ T_f^{(k)} = \frac{\partial^k}{\partial x^k} T.$$

Pak pro každou testovací funkci $\varphi \in \mathcal{D}$ platí

$$\left\langle \frac{\partial^k}{\partial x^k} f \;\middle|\; \varphi \right\rangle = \sum_{m=0}^{k-1} (-1)^{k-m-1} \sigma_m \left\langle \delta \mid \varphi^{(k-m-1)} \right\rangle + \left\langle f^{(k)} \mid \varphi \right\rangle,$$

tj.

$$T_f^{(k)}\varphi = \sum_{m=0}^{k-1} (-1)^{k-m-1} \sigma_m \varphi^{(k-m-1)}(0) + \int_{-\infty}^{\infty} f^{(k)}(x)\varphi(x)\mathrm{d}x\,.$$

Symbolicky

$$T_f^{(k)} = \sum_{m=0}^{k-1} \sigma_m \delta^{(k-m-1)} + T_{f^{(k)}}\,.$$

Greenova funkce hyperbolické rovnice v jedné prostorové proměnné

Nechť $a > 0$. Pro všechna $(t, x) \in \mathbb{R}^2$ a libovolný reálný parametr ξ definujme

$$G(x, \xi, t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2a}, & x - at < \xi < x + at, \\ 0, & \text{jinak;} \end{cases}$$

povšimněme si také, že pro $t \leq 0$ je $G(x\xi, t) = 0$. Vypočítáme distributivní derivaci $\dfrac{\partial}{\partial t} G(x, \xi, t)$.

Pro každou testovací funkci $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ platí

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial t} G(x,\xi,t) \;\middle|\; \varphi(t,x) \right\rangle = -\left\langle G(x,\xi,t) \;\middle|\; \frac{\partial}{\partial t}\varphi(t,x) \right\rangle =$$
$$= -\int\limits_{\mathbb{R}^2} G(x,\xi,t)\frac{\partial}{\partial t}\varphi(t,x)\mathrm{d}t\mathrm{d}x = -\frac{1}{2a}\int\limits_{A} \frac{\partial}{\partial t}\varphi(t,x)\mathrm{d}t\mathrm{d}x.$$

Množina $A \subseteq \mathbb{R}^2$ je taková, že na ní je funkce $G(\,\cdot\,, \xi, \,\cdot\,)$ nenulová, tj.

$$A = \big\{(t,x) \in \mathbb{R}^2 : 0 < t,\ \xi - at < x < \xi + at\big\} =$$
$$= \left\{(t,x) \in \mathbb{R}^2 : x < \xi,\ \frac{\xi - x}{a} < t\right\} \cup \left\{(t,x) \in \mathbb{R}^2 : \xi \leq x,\ \frac{x-\xi}{a} < t\right\}.$$

Podle Fubiniovy věty tedy můžeme poslední integrál rozepsat ve tvaru

$$-\frac{1}{2a}\left[\int\limits_{-\infty}^{\xi}\left(\int\limits_{\frac{\xi-x}{a}}^{\infty}\frac{\partial}{\partial t}\varphi(t,x)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x + \int\limits_{\xi}^{\infty}\left(\int\limits_{\frac{x-\xi}{a}}^{\infty}\frac{\partial}{\partial t}\varphi(t,x)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x\right] =$$
$$= -\frac{1}{2a}\left[-\int\limits_{-\infty}^{\xi}\varphi\left(\frac{\xi-x}{a}, x\right)\mathrm{d}x - \int\limits_{\xi}^{\infty}\varphi\left(\frac{x-\xi}{a}, x\right)\mathrm{d}x\right].$$

V prvním z integrálů zavedeme substituci $s = \dfrac{\xi - x}{a}$ a upravíme ho

$$\frac{1}{2a}\int\limits_{-\infty}^{\xi}\varphi\left(\frac{\xi-x}{a}, x\right)\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int\limits_{\infty}^{0}\varphi(s, \xi - as)\mathrm{d}s = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\infty}\varphi(s, \xi - as)\mathrm{d}s =$$
$$= \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}\delta\big(x - (\xi - as)\big)\varphi(s,x)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}s = \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^2} H(t)\delta\big(x - (\xi - at)\big)\varphi(t,x)\mathrm{d}t\mathrm{d}x =$$
$$= \tfrac{1}{2}\left\langle H(t)\delta\big(x - (\xi - at)\big) \;\middle|\; \varphi(t,x)\right\rangle.$$

Ve druhém z integrálů zavedeme substituci $s = \dfrac{x - \xi}{a}$ a upravíme ho analogickým způsobem

$$\frac{1}{2a}\int\limits_{\xi}^{\infty}\varphi\left(\frac{x-\xi}{a}, x\right)\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\left\langle H(t)\delta\big(x - (\xi + at)\big) \;\middle|\; \varphi(t,x)\right\rangle.$$

Celkem tak dostáváme

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial t} G(x,\xi,t) \;\middle|\; \varphi(t,x) \right\rangle = \tfrac{1}{2}\left\langle H(t)\delta\big(x - (\xi - at)\big) \;\middle|\; \varphi(t,x)\right\rangle + \tfrac{1}{2}\left\langle H(t)\delta\big(x - (\xi + at)\big) \;\middle|\; \varphi(t,x)\right\rangle =$$
$$= \left\langle \tfrac{1}{2}\Big(\delta\big(x - (\xi - at)\big) + \delta\big(x - (\xi + at)\big)\Big)H(t) \;\middle|\; \varphi(t,x)\right\rangle,$$

a tedy s využitím vztahu (A.4) můžeme psát, že

$$\frac{\partial}{\partial t} G(x,\xi,t) = \tfrac{1}{2}\big(\delta(x + at - \xi) + \delta(x - at - \xi)\big)H(t) = \tfrac{1}{2}\Big(\delta\big(\xi - (x + at)\big) + \delta\big(\xi - (x - at)\big)\Big)H(t)$$

ve smyslu distribucí.

Cvičení

1) Vypočítejte druhou distributivní derivaci funkce $f(x) = |x|$.
2) Nechť H je Heavisidova funkce a položme $x_+ = xH(x)$, $x_- = -xH(-x)$. Vypočítejte distributivní derivace těchto funkcí.
3) Určete distribuci $x^n \delta^{(n)}(x)$

Výsledky: **1)** $2\delta(x)$ **2)** $x'_+ = H(x)$, $x'_- = -H(-x)$ **3)** $(-1)^n n!\delta(x)$

Dodatek B

Okrajové úlohy pro obyčejné diferenciální rovnice

B.1 Formulace úloh

Nechť pro čísla x_0, x_1 platí $-\infty \le x_0 < x_1 \le \infty$. Symbolem $C^k(x_0, x_1)$ označme množinu funkcí k-krát spojitě diferencovatelných na intervalu (x_0, x_1); zejména $C^0(x_0, x_1)$ označme množinu funkcí spojitých na intervalu (x_0, x_1).

B.1.1 Diferenciální operátor a diferenciální rovnice

Buďte $a, b, c \in C^0(x_0, x_1)$ a nechť $a(x) \neq 0$ pro $x \in (x_0, x_1)$. *Lineární diferenciální operátor druhého řádu* $L = L(a, b, c) : C^2(x_0, x_1) \to C^0(x_0, x_1)$ definujeme předpisem

$$Ly(x) \;=\; a(x)y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x)$$

pro každé $x \in (x_0, x_1)$. Rovnice

$$Ly \;=\; g \in C^0(x_0, x_1)$$

je obyčejná lineární diferenciální rovnice druhého řádu; v případě $g \equiv 0$ homogenní, v opačném nehomogenní.

Buďte $p \in C^1(x_0, x_1)$, $q \in C^0(x_0, x_1)$. Pak operátor $L(-p, -p', q)$ daný vztahem

$$L(-p, -p', q)y(x) \;=\; -p(x)y''(x) - p'(x)y'(x) + q(x)y(x) \;=\; -\big(p(x)y'(x)\big)' + q(x)y(x)$$

nazveme *samoadjungovaný*. Každý lineární diferenciální operátor druhého řádu $L(a, b, c)$, pro jehož koeficienty a, b platí $a \in C^1(x_0, x_1)$ a $b(x) = a'(x)$ pro $x \in (x_0, x_1)$ je samoadjungovaný. Rovnice tvaru

$$-\big(p(x)y'(x)\big)' + q(x)y(x) \;=\; f(x)\,, \quad x \in (x_0, x_1)$$

se nazývá *samoadjungovaná* na intervalu (x_0, x_1) nebo *Sturmova-Liouvilleova* rovnice.

Platí: Každou lineární diferenciální rovnici s koeficientem $a \in C^1(x_0, x_1)$ lze vyjádřit v samoadjungovaném tvaru.

D.: Buď

$$h(x) \;=\; \int \frac{b(x) - a'(x)}{a(x)}\mathrm{d}x\,, \quad \rho(x) \;=\; \mathrm{e}^{h(x)}\,.$$

Pak

$$(\rho(x)a(x))' = \left(\mathrm{e}^{h(x)}a(x)\right)' \;=\; \mathrm{e}^{h(x)}h'(x)a(x) + \mathrm{e}^{h(x)}a'(x) \;=$$

$$=\; \rho(x)\frac{b(x) - a'(x)}{a(x)}a(x) + \rho(x)a'(x) \;= \rho(x)b(x)\,,$$

tedy

$$\rho(x)a(x)y''(x) + \rho(x)b(x)y'(x) + \rho(x)c(x)y(x) \;=\; \rho(x)g(x)$$

je samoadjungovaná rovnice ($p = -\rho a$, $q = \rho c$, $f = \rho g$).$\square$

B.1.2 Okrajové podmínky

Budeme hledat řešení rovnice

$$Ly(x) \;=\; g(x)\,,$$

na intervalu (x_0, x_1), které v krajních bodech splňuje některé z následujících podmínek.

Dirichletova podmínka v levém krajním bodě:

$$y(x_0) = y_0, \quad \text{nebo} \lim_{x\to x_0+} y(x) = y_0;$$

splnění první rovnosti požadujeme v případě, že $x_0 > -\infty$ a řešení má být v bodě x_0 spojité zprava.

Neumannova podmínka v levém krajním bodě:

$$y'(x_0) = y_0, \quad \text{nebo} \lim_{x\to x_0+} y'(x) = y_0.$$

Robinova podmínka v levém krajním bodě:

$$y'(x_0) = \gamma_0 y(x_0) \quad \text{nebo} \lim_{x\to x_0+} y'(x) = \gamma_0 \lim_{x\to x_0+} y(x).$$

Newtonova podmínka v levém krajním bodě:

$$\alpha_0 y(x_0) + \beta_0 y'(x_0) = y_0, \quad \text{nebo} \lim_{x\to x_0+} \big(\alpha_0 y(x) + \beta_0 y'(x)\big) = y_0,$$

přičemž $\alpha_0^2 + \beta_0^2 \neq 0$.

Povšimněme si, že Newtonova podmínka v sobě zahrnuje Dirichletovu (pro $\beta_0 = 0$, $\alpha_0 = 1$), Neumannovu (pro $\alpha_0 = 0$, $\beta_0 = 1$) i Robinovu (pro $\alpha_0 \neq 0 \neq \beta_0$, $y_0 = 0$, $\gamma_0 = -\dfrac{\alpha_0}{\beta_0}$) podmínku.

Analogicky zavádíme Dirichletovu, resp. Neumannovu, resp. Robinovu, resp. Newtonovu podmínku v pravém krajním bodě rovnostmi

$$y(x_1) = y_1, \quad \text{resp. } y'(x_1) = y_1, \quad \text{resp. } y'(x_1) = \gamma_1 y(x_1), \quad \text{resp. } \alpha_1 y(x_1) + \beta_1 y'(x_1) = y_1$$

(pokud $x_1 < \infty$ a v bodě x_1 požadujeme spojitost zleva), nebo obecněji

$$\lim_{x\to x_1-} y(x) = y_1, \quad \text{resp.} \lim_{x\to x_1-} y'(x) = y_1, \quad \text{resp.} \lim_{x\to x_1-} y'(x) = \gamma_1 \lim_{x\to x_1-} y(x),$$

$$\text{resp.} \lim_{x\to x_1-} \big(\alpha_1 y(x) + \beta_1 y'(x)\big) = y_1.$$

Podmínka omezenosti v levém, resp. pravém krajním bodě:

$$\limsup_{x\to x_0+} |y(x)| < \infty, \quad \text{resp.} \limsup_{x\to x_1-} |y(x)| < \infty.$$

Podmínky různého typu lze kombinovat; můžeme například požadovat splnění Neumanovy podmínky v levém krajním bodě a podmínky omezenosti v pravém krajním bodě.

Podmínky periodičnosti:

$$y(x_0) = y(x_1), \quad y'(x_0) = y'(x_1).$$

Jakékoliv okrajové podmínky nazveme *homogenní*, jestliže s libovolnými dvěma funkcemi u, v, které této podmínce vyhovují, vyhovuje téže podmínce i jejich libovolná lineární kombinace $k_1 u + k_2 v$.

Newtonovy podmínky s $y_0 = y_1 = 0$, podmínky omezenosti i podmínky periodičnosti jsou homogenní.

Okrajová úloha, v níž rovnice i okrajové podmínky jsou homogenní se nazývá *homogenní okrajová úloha*, v opačném případě *nehomogenní okrajová úloha*. Množina řešení homogenní úlohy tvoří vektorový prostor; tento vektorový prostor je samozřejmě podprostorem prostoru všech funkcí, splňujících dané homogenní okrajové podmínky.

B.1.3 Symetrický diferenciální operátor

Řekneme, že *operátor L je symetrický na množině $M \subseteq C^2(x_0, x_1)$*, jestliže pro všechny $u, v \in M$ platí

$$\int_{x_0}^{x_1} Lu(x)v(x)\mathrm{d}x \;=\; \int_{x_0}^{x_1} u(x)Lv(x)\mathrm{d}x \;.$$

Buď $L = L(-p, -p', q)$ samoadjungovaný operátor. Pak platí (s využitím integrace „per partes“)

$$\begin{aligned}
&\int_{x_0}^{x_1} Lu(x)v(x)\mathrm{d}x - \int_{x_0}^{x_1} u(x)Lv(x)\mathrm{d}x \;= \\
&\quad= \int_{x_0}^{x_1} \Big[\Big(-\big(p(x)u'(x)\big)' + q(x)u(x)\Big)v(x) - u(x)\Big(-\big(p(x)v'(x)\big)' + q(x)v(x)\Big)\Big]\,\mathrm{d}x \;= \\
&\quad= \int_{x_0}^{x_1} \Big[\big(p(x)v'(x)\big)'u(x) - \big(p(x)u'(x)\big)'v(x)\Big]\,\mathrm{d}x \;= \\
&\quad= \big[p(x)v'(x)u(x)\big]_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} p(x)v'(x)u'(x)\mathrm{d}x - \big[p(x)u'(x)v(x)\big]_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} p(x)u'(x)v'(x)\mathrm{d}x \;= \\
&\quad= p(x_1)v'(x_1)u(x_1) - p(x_0)v'(x_0)u(x_0) - p(x_1)u'(x_1)v(x_1) + p(x_0)u'(x_0)v(x_0)\,.
\end{aligned}$$

Tento výpočet umoňuje dokázat následující tvrzení:

- Samoadjungovaný operátor $L = L(-p, -p', q)$ je symetrický na množině funkcí, které splňují homogenní Newtonovy podmínky v obou krajních bodech.

  D.: V tomto případě je

  $$\begin{aligned}
  &\int_{x_0}^{x_1} Lu(x)v(x)\mathrm{d}x - \int_{x_0}^{x_1} u(x)Lv(x)\mathrm{d}x \;= \\
  &\quad= \; p(x_1)\big(v'(x_1)u(x_1) - u'(x_1)v(x_1)\big) - p(x_0)\big(v'(x_0)u(x_0) - u'(x_0)v(x_0)\big)\,.
  \end{aligned}$$

  Je-li $\beta_0 \neq 0$, pak $u'(x_0) = -\dfrac{\alpha_0}{\beta_0}u(x_0), v'(x_0) = -\dfrac{\alpha_0}{\beta_0}v(x_0)$, takže $v'(x_0)u(x_0) - u'(x_0)v(x_0) = 0$.
  Je-li $\alpha_0 \neq 0$, pak $u(x_0) = -\dfrac{\beta_0}{\alpha_0}u'(x_0), v(x_0) = -\dfrac{\beta_0}{\alpha_0}v'(x_0)$, takže opět $v'(x_0)u(x_0) - u'(x_0)v(x_0) = 0$.
  Analogicky ověříme, že $v'(x_1)u(x_1) - u'(x_1)v(x_1) = 0$. $\square$

- Pokud je interval (x_0, x_1) konečný a funkce p splňuje podmínku $p(x_0) = p(x_1)$, pak samoadjungovaný operátor $L = L(-p, -p', q)$ je symetrický na množině funkcí splňujících podmínky periodičnosti.

  D.: V tomto případě je

  $$\begin{aligned}
  &\int_{x_0}^{x_1} Lu(x)v(x)\mathrm{d}x - \int_{x_0}^{x_1} u(x)Lv(x)\mathrm{d}x \;= \\
  &\quad= \; p(x_0)v'(x_0)u(x_0) - p(x_0)v'(x_0)u(x_0) - p(x_0)u'(x_0)v(x_0) + p(x_0)u'(x_0)v(x_0) \;=\; 0\,.
  \end{aligned}$$

  $\square$

B.2 Vlastní čísla a vlastní funkce homogenní okrajové úlohy

Nechť $\lambda \in \mathbb{R}$. Uvažujme homogenní okrajovou úlohu pro rovnici

$$Lv(x) \;=\; \lambda v(x)\,.$$

Tato úloha má vždy *triviální řešení* $v \equiv 0$. Pokud existuje netriviální řešení $v = v(x)$, nazveme ho *vlastní funkcí okrajové úlohy* a parametr λ nazveme *vlastním číslem operátoru* L na prostoru funkcí splňujících okrajové podmínky.

Je-li λ vlastní číslo operátoru L a $v = v(x)$ je příslušná vlastní funkce uvažované okrajové úlohy, pak také funkce cv je pro libovolnou konstantu $c \in \mathbb{R}$ vlastní funkcí.

Jestliže vlastnímu číslu λ odpovídá k lineárně nezávislých vlastních funkcí, řekneme, že λ je *k-násobné vlastní číslo*; jestliže mu odpovídá jediná (až na multiplikativní konstantu) vlastní funkce, mluvíme o *jednoduchém vlastním čísle.*

Označme M_L množinu funkcí splňujících příslušné homogenní okrajové podmínky. Je-li operátor L symetrický na množině M_L a λ_1, λ_2 jsou jeho dvě různá vlastní čísla, pak odpovídající vlastní funkce jsou ortogonální v prostoru $\mathcal{L}^2(x_0, x_1)$.[1]

D.: Poněvadž $\lambda_1 \neq \lambda_2$, je alespoň jedno z čísel λ_1, λ_2. Nechť pro určitost $\lambda_1 \neq 0$. Pak platí

$$\int\limits_{x_0}^{x_1} v_1(x)v_2(x)\mathrm{d}x \;=\; \frac{1}{\lambda_1}\int\limits_{x_0}^{x_1} \lambda_1 v_1(x)v_2(x)\mathrm{d}x \;=\; \frac{1}{\lambda_1}\int\limits_{x_0}^{x_1} Lv_1(x)v_2(x)\mathrm{d}x \;=$$

$$=\; \frac{1}{\lambda_1}\int\limits_{x_0}^{x_1} v_1(x)Lv_2(x)\mathrm{d}x \;=\; \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\int\limits_{x_0}^{x_1} v_1(x)v_2(x)\mathrm{d}x\,,$$

tedy $\left(1 - \dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)\int_{x_0}^{x_1} v_1(x)v_2(x)\mathrm{d}x = 0$. Poněvadž $\lambda_1 \neq \lambda_2$, je $\int_{x_0}^{x_1} v_1(x)v_2(x)\mathrm{d}x = 0$. □

B.2.1 Příklady:

Uvažujme samoadjungovaný operátor $L = L(-1, 0, 0)$. Rovnici

$$-y''(x) = \lambda y(x) \tag{B.1}$$

můžeme přepsat na tvar

$$y''(x) + \lambda y(x) = 0.$$

Řešení této homogenní lineární rovnice druhého řádu závisí na znaménku parametru λ. Obecné řešení rovnice je dáno vztahem

$$y(x) = \begin{cases} A\exp\left(\sqrt{|\lambda|}\,x\right) + B\exp\left(-\sqrt{|\lambda|}\,x\right), & \lambda < 0,\\ Ax + B, & \lambda = 0,\\ A\cos\sqrt{\lambda}\,x + B\sin\sqrt{\lambda}\,x, & \lambda > 0, \end{cases}$$

kde A, B jsou integrační konstanty.

[1] Prostor $\mathcal{L}^2(x_0, x_1)$: Množina funkcí definovaných na intervalu (x_0, x_1) takových, že $\int_{x_0}^{x_1} \big(f(x)\big)^2 \mathrm{d}x < \infty$, tvoří vektorový prostor. Skalární součin funkcí f, g v tomto prostoru zavádíme jako $\int_{x_0}^{x_1} f(x)g(x)\mathrm{d}x$. Funkce f a g v tomto prostoru považujeme za ekvivalentní, pokud $\int_{x_0}^{x_1} \big(f(x) - g(x)\big)^2 \mathrm{d}x = 0$. Pokud ekvivalentní funkce ztotožníme, dostaneme prostor $\mathcal{L}^2(x_0, x_1)$.

1) Dirichletovy podmínky

Hledáme řešení rovnice (B.1) na intervalu $(0, \ell)$, které splňuje Dirichletovy homogenní okrajové podmínky

$$y(0) = 0 = y(\ell).$$

Je-li $\lambda = 0$, pak v krajních bodech intervalu $(0, \ell)$ má platit

$$y(0) = 0 = B, \quad y(\ell) = 0 = A\ell + B,$$

takže $B = 0$, v důsledku toho také $A = 0$ a rovnice má pouze triviální řešení.

Je-li $\lambda < 0$, pak v levém krajním bodě má platit $y(0) = 0 = A + B$, tj. $B = -A$. Proto v pravém krajním bodě požadujeme

$$y(\ell) = 0 = Ae^{\sqrt{-\lambda}\,\ell} - Ae^{-\sqrt{-\lambda}\,\ell} = 2A\sinh\sqrt{-\lambda}\,\ell;$$

pro $-\lambda > 0$ je však $\sinh\sqrt{-\lambda}\,\ell > 0$ a z toho plyne, že $A = 0$. Rovnice (B.1) má opět pouze triviální řešení.

Je-li $\lambda > 0$, pak má platit

$$y(0) = 0 = A, \qquad \text{takže} \quad y(\ell) = 0 = B\sin\sqrt{\lambda}\,\ell.$$

Odtud plyne, že $\sqrt{\lambda}\,\ell = k\pi$ pro $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$, tedy $\lambda = \left(\dfrac{k\pi a}{\ell}\right)^2$ pro $k = 1, 2, 3, \ldots$, neboť $\lambda > 0$.

Vlastní čísla operátoru $L(-1, 0, 0)$ s homogenními Dirichletovými podmínkami na intervalu $(0, \ell)$ a příslušné vlastní funkce jsou

$$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{\ell}\right)^2, \quad v_k(x) = \sin\frac{k\pi}{\ell}x, \; k = 1, 2, 3, \ldots.$$

2) podmínky periodičnosti

Nyní hledáme řešení rovnice (B.1) na intervalu $(0, \ell)$, které splňuje podmínky periodičnosti

$$y(0) = y(\ell), \quad y'(0) = y'(\ell).$$

Je-li $\lambda < 0$, pak je

$$y(x) = Ae^{\sqrt{|\lambda|}x} + Be^{\sqrt{|\lambda|}x}, \quad y'(x) = \sqrt{|\lambda|}\left(Ae^{\sqrt{|\lambda|}x} - Be^{-\sqrt{|\lambda|}x}\right).$$

Má tedy platit

$$A + B = y(0) = y(l) = Ae^{\sqrt{|\lambda|}\ell} + Be^{\sqrt{|\lambda|}\ell}, \quad \sqrt{|\lambda|}(A - B) = y'(0) = y'(\ell) = \sqrt{|\lambda|}\left[Ae^{\sqrt{|\lambda|}\ell} - Be^{-\sqrt{|\lambda|}\ell}\right],$$

neboli

$$\begin{aligned}\left(e^{\sqrt{|\lambda|}\ell} - 1\right)A + \left(e^{-\sqrt{|\lambda|}\ell} - 1\right)B &= 0,\\ \left(e^{\sqrt{|\lambda|}\ell} - 1\right)A - \left(e^{-\sqrt{|\lambda|}\ell} - 1\right)B &= 0.\end{aligned}$$

Tato homogenní soustava algebraických rovnic má jediné řešení $A = B = 0$. Úloha má v tomto případě pouze triviální řešení.

Pro $\lambda = 0$ má rovnice řešení $y(x) = Ax + B$, takže platí $y'(x) = A$. V tomto případě tedy $y'(0) = y'(\ell)$, takže stačí požadovat $B = y(0) = y(\ell) = A\ell + B$. Z toho plyne $A = 0$. Dostáváme tak, že první vlastní číslo je $\lambda_0 = 0$ a příslušná vlastní funkce v_0 je nenulová konstanta.

Pro $\lambda > 0$ je

$$y(x) = A\cos\sqrt{\lambda}x + B\sin\sqrt{\lambda}x, \qquad y'(x) = \sqrt{\lambda}\left(-A\sin\sqrt{\lambda}x + B\cos\sqrt{\lambda}x\right).$$

Má tedy platit

$$A = y(0) = y(\ell) = A\cos\sqrt{\lambda}\ell + B\sin\sqrt{\lambda}\ell, \quad \sqrt{\lambda}B = y'(0) = y'(\ell) = \sqrt{\lambda}\left(B\cos\sqrt{\lambda}\ell - A\sin\sqrt{\lambda}\ell\right),$$

neboli

$$\begin{aligned}\left(\cos\sqrt{\lambda}\ell - 1\right) A + \left(\sin\sqrt{\lambda}\ell\right) B &= 0,\\ \left(-\sin\sqrt{\lambda}\ell\right) A + \left(\cos\sqrt{\lambda}\ell - 1\right) B &= 0.\end{aligned}$$

Tato homogenní soustava lineárních (algebraických) rovnic má nenulové řešení pouze v případě, že její matice je singulární, tj.

$$0 = \begin{vmatrix}\cos\sqrt{\lambda}\ell - 1 & \sin\sqrt{\lambda}\ell\\ -\sin\sqrt{\lambda}\ell & \cos\sqrt{\lambda}\ell - 1\end{vmatrix} = \left(\cos\sqrt{\lambda}\ell\right)^2 - 2\cos\sqrt{\lambda}\ell + 1 + \left(\sin\sqrt{\lambda}\ell\right)^2 = 2\left(1 - \cos\sqrt{\lambda}\ell\right).$$

Odtud plyne, že $\cos\sqrt{\lambda}\ell = 1$, tedy

$$\lambda = \left(\frac{2k\pi}{\ell}\right)^2, \quad k = 1, 2, 3, \dots.$$

Podmínkám úlohy v takovém případě vyhovují konstanty $A = 1$, $B = 0$ nebo $A = 0$, $B = 1$. Kladným vlastním číslům $\lambda_k = \left(\frac{2k\pi}{\ell}\right)^2$ tedy odpovídají dvě vlastní funkce

$$v_k(x) = \cos\frac{2k\pi}{\ell}x, \quad \tilde{v}_k(x) = \sin\frac{2k\pi}{\ell}x, \quad k = 1, 2, 3, \dots.$$

Kladná vlastní čísla jsou tedy dvojnásobná.

3) podmínky omezenosti

Nakonec najdeme řešení rovnice (B.1) na $(0, \infty)$, které splňuje podmínky omezenosti

$$y(x) \text{ je omezená pro } x \to 0+ \text{ a pro } x \to \infty\,.$$

Je-li $\lambda < 0$, pak

$$\lim_{x\to\infty} |y(x)| = \begin{cases}\infty, & A \neq 0,\\ 0, & A = 0.\end{cases}$$

V tomto případě tedy všechna záporná čísla λ_- jsou vlastními čísly a příslušné vlastní funkce jsou

$$v_-(x) = \mathrm{e}^{-\sqrt{|\lambda_-|}\,x}.$$

Podobně pro $\lambda = 0$ je

$$\lim_{x\to\infty} |y(x)| = \begin{cases}\infty, & A \neq 0,\\ B, & A = 0.\end{cases}$$

Číslo $\lambda_0 = 0$ je vlastním číslem a příslušná vlastní funkce je

$$v_0(x) = const \neq 0.$$

Pro $\lambda > 0$ jsou všechna řešení omezená, takže jakékoliv kladné číslo λ_+ je vlastním číslem a příslušné vlastní funkce jsou

$$v_+(x) = \cos\sqrt{\lambda_+}\,x, \qquad \tilde{v}_+(x) = \sin\sqrt{\lambda_+}\,x.$$

B.2.2 Sturmova-Liouvilleova úloha

$$\begin{aligned}-\left(p(x)y'(x)\right)' + q(x)y(x) &= \lambda y(x)\,, \qquad x \in (0, \ell)\,,\\ \alpha_0 y(0) + \beta_0 y'(0) \;=\; 0 &= \alpha_1 y(\ell) + \beta_1 y'(\ell)\,.\end{aligned}$$

- Sturmova-Liouvilleova úloha má nekonečně mnoho vlastních čísel $\lambda_1, \lambda_2, \dots$, pro která platí

$$\min\{q(x) : x \in [0, l]\} \;\leq\; \lambda_1 \;<\; \lambda_2 \;<\; \cdots\,; \qquad \lim_{n\to\infty} \lambda_n \;=\; \infty\,.$$

- Každému vlastnímu číslu Sturmovy-Liouvilleovy úlohy přísluší právě jedna normovaná vlastní funkce.
- Vlastní funkce $v_n = v_n(x)$ odpovídající vlastnímu číslu λ_n má v intervalu $(0,\ell)$ právě $n-1$ nulových bodů. Mezi každými dvěma sousedními nulovými body vlastní funkce v_n leží právě jeden nulový bod vlastní funkce v_{n+1}. Zejména vlastní funkce v_1 nemění znaménko na intervalu $(0,\ell)$.
- Posloupnost $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ normovaných vlastních funkcí Sturmovy-Liouvilleovy úlohy tvoří úplnou ortonormální posloupnost na $[0,\ell]$. Tj. je-li funkce $f \in \mathcal{L}^2(0,\ell)$, pak Fourierova řada funkce f vzhledem k ortonormální posloupnosti $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k funkci f podle středu (konvergence v prostoru $\mathcal{L}^2(0,\ell)$). Je-li funkce f navíc spojitá a splňuje homogenní okrajové podmínky, je tato konvergence stejnoměrná.

D.: J. Kalas, M. Ráb: *Obyčejné diferenciální rovnice,* MU Brno 1995, str. 158–163.

Důkaz je v těchto skriptech proveden pro případ $p \equiv 1$. □

Tvrzení jsou ilustrována příkladem B.2.1.1.

V případě periodických okrajových podmínek v příkladu B.2.1.2 mají vlastní čísla a příslušné vlastní funkce všechny vlastnosti s výjimkou jednoduchosti vlastních čísel.

B.3 Řešení nehomogenní okrajové úlohy

B.3.1 Nehomogenní rovnice s homogenními Newtonovými podmínkami — Fourierova metoda

$$\begin{aligned} Ly(x) &\equiv -\big(p(x)y'(x)\big)' + q(x)y(x) = f(x)\,, \quad x \in (0,\ell)\,, \\ \alpha_0 y(0) + \beta_0 y'(0) &= 0 = \alpha_1 y(\ell) + \beta_1 y'(\ell)\,. \end{aligned}$$

- Najdeme posloupnost vlastních čísel $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ a ortogonální posloupnost příslušných vlastních funkcí $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ Sturmovy-Liouvilleovy úlohy, tj. rostoucí posloupnost čísel $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ a posloupnost funkcí $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$, které splňují:
$$Lv_n(x) = \lambda_n v_n(x)\,,$$
$$\alpha_0 v_n(0) + \beta_0 v_n'(0) = 0 = \alpha_1 v_n(\ell) + \beta_1 v_n'(\ell)\,.$$
- Funkci f vyjádříme ve tvaru
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n v_n(x)\,, \quad \text{kde} \quad d_n = \frac{1}{\|v_n\|^2}\int_0^l f(\xi)v_n(\xi)\mathrm{d}\xi\,.$$
- Řešení úlohy hledáme ve tvaru
$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n v_n(x)\,.$$
Musí tedy platit
$$Ly(x) = L\left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n v_n(x)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n L v_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \lambda_n v_n(x)\,,$$
takže
$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \lambda_n v_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n v_n(x)\,,$$
z čehož plyne
$$c_n = \frac{d_n}{\lambda_n}\,, \quad n = 1, 2, \ldots\,,$$

pokud všechna vlastní čísla jsou nenulová.
Hledané řešení tedy je

$$y(x) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n(x)}{\lambda_n \left\|v_n\right\|^2} \int\limits_0^\ell f(\xi) v_n(\xi) \mathrm{d}\xi \;=\; \int\limits_0^\ell \left(f(\xi) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n(\xi) v_n(x)}{\lambda_n \left\|v_n\right\|^2} \right) \mathrm{d}\xi \,.$$

Označíme-li

$$G(x,\xi) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n(\xi) v_n(x)}{\lambda_n \left\|v_n\right\|^2} \,,$$

lze řešení zapsat

$$y(x) \;=\; \int\limits_0^\ell f(\xi) G(x,\xi) \mathrm{d}\xi \,.$$

B.3.2 Nehomogenní rovnice s homogenními Newtonovými podmínkami — metoda variace konstant

$$\begin{aligned} Ly(x) \;&\equiv\; -\big(p(x)y'(x)\big)' + q(x)y(x) \;=\; f(x)\,, \quad x \in (0,\ell)\,, \\ \alpha_0 y(0) + \beta_0 y'(0) \;&=\; 0 \;=\; \alpha_1 y(\ell) + \beta_1 y'(\ell)\,. \end{aligned}$$

- Najdeme řešení $u,\ v$ dvou pomocných homogenních úloh

$$\begin{aligned} Lu \;&=\; -\left(pu'\right)' + qu \;=\; 0\,, \qquad \alpha_0 u(0) + \beta_0 u'(0) \;=\; 0\,, \\ Lv \;&=\; -\left(pv'\right)' + qv \;=\; 0\,, \qquad \alpha_1 v(\ell) + \beta_1 v'(\ell) \;=\; 0\,. \end{aligned}$$

  Funkce $u,\ v$ nejsou určeny jednoznačně. Vezmeme ty, které jsou lineárně nezávislé.

- Pro Wronskián $W(x) \;=\; u(x)v'(x) \;-\; u'(x)v(x)$ funkcí $u,\ v$ platí $p(x)W(x) \;\equiv\; K$, kde K je nenulová konstanta, neboť

$$\begin{aligned} (pW)' \;&=\; \big(p(uv' - u'v)\big)' \;=\; p'uv' + pu'v' + puv'' - p'u'v \;-\, pu''v - pu'v' \;= \\ &=\; (pv'' + p'v')u \;-\, (pu'' + p'u')v \;=\; \left(pv'\right)' u - \left(pu'\right)' v \;=\, qvu - quv \;=\; 0\,, \end{aligned}$$

  kdyby $K = 0$, pak by $W \equiv 0$, což by byl spor s lineární nezávislostí.

- Řešení nehomogenní úlohy hledáme metodou variace konstant, tedy ve tvaru

$$y(x) \;=\; c_1(x)u(x) + c_2(x)v(x)\,.$$

  Funkce y má být řešením dané nehomogenní rovnice, takže musí platit

$$\begin{aligned} f \;&=\; L(c_1u + c_2v) \;=\; -\big(p(c_1u)'\big)' + qc_1u - \big(p(c_2v)'\big)' + qc_2v \;= \\ &=\; -p\left(c_1''u + 2c_1'u' + c_1u''\right) - p'\left(c_1'u + c_1u'\right) + qc_1u \,- \\ &\;\; -p\left(c_2''v + 2c_2'v' + c_2v''\right) - p'\left(c_2'v + c_2v'\right) + qc_2v \;= \\ &=\; c_1\left(-pu'' - p'u' + qu\right) - pc_1'u' - p\left(c_1''u + c_1'u'\right) - p'c_1'u \,+ \\ &\;\; c_2\left(-pv'' - p'v' + qv\right) - pc_2'v' - p\left(c_2''v + c_2'v'\right) - p'c_2'v \;= \\ &=\; c_1Lu - pc_1'u' - \big(p(c_1'u)\big)' + c_2Lv - pc_2'v' - \big(p(c_2'v)\big)' \;= \\ &=\; -p(c_1'u' + c_2'v') - \big(p(c_1'u + c_2'v)\big)'. \end{aligned}$$

  Tato rovnost bude splněna zejména tehdy, když funkce c_1, c_2 splňují soustavu rovnic

$$\begin{aligned} c_1'(x)u(x) + c_2'(x)v(x) \;&=\; 0\,, \\ c_1'(x)u'(x) + c_2'(x)v'(x) \;&=\; -\frac{f(x)}{p(x)}. \end{aligned} \tag{B.2}$$

Platí tedy

$$c_1'(x) = \frac{1}{W(x)}\begin{vmatrix} 0 & v(x) \\ -\frac{f(x)}{p(x)} & v'(x) \end{vmatrix} = \frac{f(x)v(x)}{K}, \quad c_2'(x) = \frac{1}{W(x)}\begin{vmatrix} u(x) & 0 \\ u'(x) & -\frac{f(x)}{p(x)} \end{vmatrix} = -\frac{f(x)u(x)}{K}. \tag{B.3}$$

- Funkce $y(x)$ má splňovat okrajové podmínky, tj.

$$\begin{aligned} \alpha_0\left[c_1(0)u(0)+c_2(0)v(0)\right]+\beta_0\left[c_1'(0)u(0)+c_1(0)u'(0)+c_2'(0)v(0)+c_2(0)v'(0)\right] &= 0, \\ \alpha_1\left[c_1(\ell)u(\ell)+c_2(\ell)v(\ell)\right]+\beta_1\left[c_1'(\ell)u(\ell)+c_1(\ell)u'(\ell)+c_2'(\ell)v(\ell)+c_2(\ell)v'(\ell)\right] &= 0, \end{aligned}$$

po úpravě s využitím (B.2)

$$\begin{aligned} c_1(0)\big(\alpha_0 u(0)+\beta_0 u'(0)\big)+c_2(0)\big(\alpha_0 v(0)+\beta_0 v'(0)\big) &= 0, \\ c_1(\ell)\big(\alpha_1 u(\ell)+\beta_1 u'(\ell)\big)+c_2(\ell)\big(\alpha_1 v(\ell)+\beta_1 v'(\ell)\big) &= 0; \end{aligned}$$

každá z funkcí splňuje jednu okrajovou podmínku, tedy

$$\begin{aligned} c_2(0)\big(\alpha_0 v(0)+\beta_0 v'(0)\big) &= 0, \\ c_1(\ell)\big(\alpha_1 u(\ell)+\beta_1 u'(\ell)\big) &= 0, \end{aligned}$$

takže

$$c_1(\ell) = 0, \quad c_2(0) = 0. \tag{B.4}$$

- Funkce $c_1,\ c_2$ jsou řešením rovnic (B.3) s počátečními podmínkami (B.4) a jsou tedy dány výrazy

$$c_1(x) = \frac{1}{K}\int_\ell^x f(\xi)v(\xi)\mathrm{d}\xi, \qquad c_2(x) = -\frac{1}{K}\int_0^x f(\xi)u(\xi)\mathrm{d}\xi.$$

- Řešení úlohy je

$$y(x) = -\frac{u(x)}{K}\int_x^\ell f(\xi)v(\xi)\mathrm{d}\xi - \frac{v(x)}{K}\int_0^x f(\xi)u(\xi)\mathrm{d}\xi.$$

Označíme-li

$$G(x,\xi) = \begin{cases} -\dfrac{u(x)v(\xi)}{K}, & 0 \le x < \xi \le \ell \\ -\dfrac{v(x)u(\xi)}{K}, & 0 \le \xi < x \le \ell \end{cases},$$

lze řešení zapsat

$$y(x) = \int_0^\ell f(\xi)G(x,\xi)\mathrm{d}\xi.$$

B.3.3 Greenova funkce

Funkci $G : [0,\ell]\times[0,\ell] \to \mathbb{R}$ nazveme *Greenovou funkcí homogenní okrajové úlohy*

$$\begin{aligned} &Ly(x) \equiv -\big(p(x)y'(x)\big)' + q(x)y(x) = 0, \quad x \in (0,\ell), \\ &\alpha_0 y(0) + \beta_0 y'(0) = 0 = \alpha_1 y(\ell) + \beta_1 y'(\ell). \end{aligned}$$

kde $p(x) > 0$ pro $x \in [0,l]$, jestliže

(i) G je spojitá pro $x \in [0,\ell]\times[0,\ell]$,

(ii) G je symetrická, tj. $G(x,\xi) = G(\xi,x)$,

(iii) pro každé $\xi \in [0,\ell]$ má funkce $G(\cdot,\xi)$ spojité derivace druhého řádu,

(iv) pro každé $\xi \in [0,\ell]$ je funkce $G(\cdot,\xi)$ řešením uvažované okrajové úlohy,

(v) $\lim\limits_{x\to\xi+} G_x(x,\xi) - \lim\limits_{x\to\xi-} G_x(x,\xi) = -\dfrac{1}{p(\xi)}$ pro $\xi \in (0,\ell)$.

Platí: Má-li uvažovaná homogenní okrajová úloha jen triviální řešení $y \equiv 0$ a jsou-li $p \in C^1(0,\ell),\ q \in C^2(0,\ell)$, existuje právě jedna její Greenova funkce. Nehomogenní okrajová úloha

$$\begin{aligned} Ly(x) \ &\equiv\ -\big(p(x)y'(x)\big)' + q(x)y(x) \ = \ f(x)\,, \quad x \in (0,\ell)\,, \\ \alpha_0 y(0) + \beta_0 y'(0) \ &= \ 0 \ = \ \alpha_1 y(\ell) + \beta_1 y'(\ell)\,. \end{aligned}$$

má pak jediné řešení tvaru

$$y(x) \ = \ \int_0^\ell f(\xi)G(x,\xi)\mathrm{d}\xi\,.$$

D.: I. Kiguradze: *Okrajové úlohy pro systémy lineárních obyčejných diferenciálních rovnic,* MU Brno 1997, str. 82. Důkaz je proveden pro mnohem obecnější situaci. □

B.3.4 Úloha s nehomogenními okrajovými podmínkami

$$\begin{aligned} Ly(x) \ &\equiv\ -\big(p(x)y'(x)\big)' + q(x)y(x) \ = \ f(x)\,, \quad x \in (0,\ell)\,, \\ \alpha_0 y(0) + \beta_0 y'(0) \ &= \ y_0\,, \qquad \alpha_1 y(\ell) + \beta_1 y'(\ell) \ = \ y_1\,. \end{aligned}$$

Jestliže funkce $w = w(x)$ splňuje okrajové podmínky

$$\alpha_0 w(0) + \beta_0 w'(0) \ = \ y_0\,, \qquad \alpha_1 w(\ell) + \beta_1 w'(\ell) \ = \ y_1$$

a funkce $u = u(x)$ je řešením úlohy

$$Lu(x) \ = \ f(x) - Lw(x)$$

s homogenními okrajovými podmínkami

$$\alpha_0 u(0) + \beta_0 u'(0) \ = \ 0 \ = \ \alpha_1 u(\ell) + \beta_1 u'(\ell)\,,$$

pak funkce

$$y(x) \ = \ u(x) + w(x)$$

je řešením uvažované úlohy.

Funkci w je vhodné volit v co nejjednodušším tvaru, například polynom.

Cvičení

Řešte okrajové úlohy

1) $-y'' - \dfrac{2}{x}y' = 0,\ x \in (0,1);\ y(1) = y_0$, y je omezená pro $x \to 0_+$.

2) $-\left(x^2y'\right)' = 0,\ x \in (1,\infty);\ y(1) = y_0,\ \lim\limits_{x\to\infty} y(x) = 0.$

3) $-\left(xy'\right)' = 0,\ x \in (1,\infty);\ y(1) = y_0$, y je omezená pro $x \to \infty$.

4) $-xy'' - y' = 0,\ x \in (1,2);\ y(1) = y_1,\ y(2) = 0.$

5) $-x^2y'' - xy' + k^2y = 0,\ x \in (0,\ell);\ y(\ell) = 1$, y je omezená pro $x \to 0_+$; k je parametr.

6) $-xy'' - y' = -x,\ x \in (0,\ell);\ y(0) = y(\ell) = 0.$

7) $-y'' = \sin x,\ x \in (0,2\pi);\ y'(0) = y'(2\pi) = 0.$

Najděte vlastní funkce okrajových úloh a vlastní čísla příslušných operátorů

8) $-v'' = \lambda v,\ x \in (0,\ell);\ v'(0) = v'(\ell) = 0.$

9) $-v'' = \lambda v,\ x \in \mathbb{R};\ v(x) = v(x + 2\pi).$

10) $-v'' + qv = \lambda v,\ x \in (0,\ell);\ v'(0) = 0,\ v(\ell) = 0;$ q je parametr.

Řešte okrajové úlohy

11) $-y'' - \omega^2 y = f(x),\ x \in (0,\ell);\ y(0) = y(\ell) = 0$; ω je parametr.

12) $-y'' - 3y = \dfrac{\pi - x}{2},\ x \in (0,\pi);\ y(0) = y(\pi) = 0.$

13) Najděte Greenovu funkci úlohy $-y'' + y = 0,\ y(0) = y(1) = 0.$

Výsledky: 1) $y(x) = y_0$ **2)** $y(x) = \frac{y_0}{x}$ **3)** $y(x) = y_0$ **4)** $y(x) = y_1 \frac{\ln 2 - \ln x}{\ln 2}$ **5)** $y(x) = \left(\frac{x}{\ell}\right)^{|k|}$ **6)** nemá řešení **7)** $y(x) = \sin x - x + C$, C je libovolná konstanta **8)** $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2$, $v_n(x) = \cos\frac{n\pi}{\ell}x,\ n = 0,1,2,\dots$ **9)** $\lambda_n = n^2$, $v_n(x) = C_n \cos nx + D_n \sin nx$, C_n, D_n jsou libovolné konstanty, $C_0 \neq 0$, $n = 0,1,2,\dots$ **10)** $\lambda_n = q + \left(\frac{(2n+1)\pi}{2\ell}\right)^2$, $v_n(x) = \cos\frac{(2n+1)\pi}{2\ell}x$. **11)** $y(x) = B \sin\frac{k\pi}{\ell}x + \frac{1}{\omega}\int\limits_0^x f(\xi)\sin\frac{k\pi}{l}(\xi - x)\mathrm{d}\xi$ pro $\frac{\omega\ell}{\pi} = k \in \mathbb{N}$ a $\int\limits_0^\ell f(\xi)\sin\frac{k\pi}{\ell}\xi\mathrm{d}\xi = 0$, B je libovolná konstanta;

$y(x) = \frac{1}{\omega}\int\limits_0^x f(\xi)\sin\omega(\xi - x)\mathrm{d}\xi - \frac{\sin\omega x}{\omega\sin\omega\ell}\int\limits_0^\ell f(\xi)\sin\omega(\xi - x)\mathrm{d}\xi = 2\ell\int\limits_0^x f(\xi)\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{k\pi}{\ell}\xi\sin\frac{k\pi}{\ell}x}{k^2\pi^2 - \omega^2\ell^2}\mathrm{d}\xi$ pro $\frac{\omega\ell}{\pi} \notin \mathbb{N}$

12) $y(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k(k^2-3)} = \frac{\pi}{6}\left(\cos\sqrt{3}x - \operatorname{cotg}\sqrt{3}\pi\ \sin\sqrt{3}x\right) + \frac{1}{6}(x - \pi)$ **13)** $G(x,\xi) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sh}(1-x)\operatorname{sh}\xi}{\operatorname{sh}1}, & 0 \le \xi \le x \le 1 \\ \frac{\operatorname{sh}x\operatorname{sh}(1-\xi)}{\operatorname{sh}1}, & 0 \le x < \xi \le 1 \end{cases}$

Dodatek C

Speciální funkce

C.1 Legendreovy polynomy

C.1.1 Definice

Legendreův polynom stupně $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ je pro každé $x \in \mathbb{R}$ definován vztahem

$$P_n(x) \;=\; \frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n\,.$$

Zejména

$$\begin{array}{lll} P_0(x) = 1 & P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1) & P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3) \\ P_1(x) = x & P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3-3x) & P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5-70x^3+15x) \end{array}$$

Poněvadž

$$(x^2-1)^n \;=\; \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k x^{2(n-k)} \;=\; \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k n!}{k!(n-k)!}x^{2n-2k} \;=\; n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!(n-k)!}x^{2n-2k}\,,$$

platí

$$P_n(x) \;=\; \frac{1}{2^n}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!(n-k)!}x^{2n-2k}\,.$$

Tedy pro $m \in \mathbb{N}$ je

$$\begin{aligned} P_{2m} &= \frac{\mathrm{d}^{2m}}{\mathrm{d}x^{2m}}\sum_{k=0}^{2m}\frac{(-1)^k}{2^{2m}k!(2m-k)!}x^{4m-2k} = \frac{\mathrm{d}^{2m-1}}{\mathrm{d}x^{2m-1}}\sum_{k=0}^{2m}\frac{(-1)^k(4m-2k)}{2^{2m}k!(2m-k)!}x^{4m-2k-1} = \\ &= \frac{\mathrm{d}^{2m-1}}{\mathrm{d}x^{2m-1}}\sum_{k=0}^{2m-1}\frac{(-1)^k(4m-2k)}{2^{2m}k!(2m-k)!}x^{4m-2k-1} = \\ &= \frac{\mathrm{d}^{2m-2}}{\mathrm{d}x^{2m-2}}\sum_{k=0}^{2m-1}\frac{(-1)^k(4m-2k)(4m-2k-1)}{2^{2m}k!(2m-k)!}x^{4m-2k-2} = \\ &= \frac{\mathrm{d}^{2m-2}}{\mathrm{d}x^{2m-2}}\sum_{k=0}^{2m-1}\frac{(-1)^k(4m-2k)!}{2^{2m}k!(2m-k)!(4m-2k-2)!}x^{4m-2k-2} = \cdots = \\ &= \sum_{k=0}^{m}\frac{(-1)^k(4m-2k)!}{2^{2m}k!(2m-k)!(2m-2k)!}x^{2(m-k)}\,, \end{aligned}$$

analogicky

$$P_{2m-1} \;=\; \sum_{k=0}^{m-1}\frac{(-1)^k(4m-2k-2)!}{2^{2m-1}k!(2m-k-1)!(2m-2k-1)!}x^{2(m-k)-1}\,,$$

souhrnně

$$P_n = \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} \frac{(-1)^k (2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!} x^{n-2k}\,. \tag{C.1}$$

C.1.2 Rekurentní vztahy pro Legendreovy polynomy

Pomocí (C.1) lze odvodit:

$$P_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1} x P_n(x) - \frac{n}{n+1} P_{n-1}(x)\,, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{C.2}$$

$$P_n'(x) = \frac{n}{1-x^2}\big(P_{n-1}(x) - xP_n(x)\big)\,, \quad n = 1, 2, \ldots\,. \tag{C.3}$$

C.1.3 Věta

Legendreův polynom P_n je pro každé $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ řešením diferenciální rovnice

$$(1-x^2)y''(x) - 2xy'(x) + n(n+1)y(x) = 0 \tag{C.4}$$

s podmínkou $y(1) = 1$.

D.: Pro $n = 0$ je tvrzení zřejmé. Nechť tedy $n > 0$.

Položme $\eta(x) = \dfrac{1}{2^n n!}(x^2-1)^n$. Pak $\eta'(x) = \dfrac{2xn(x^2-1)^{n-1}}{2^n n!}$, takže $(x^2-1)\eta'(x) = 2xn\eta(x)$. Derivujme tuto rovnost $(n+1)$-krát (s využitím Leibnizovy formule):

$$\begin{aligned}
(x^2-1)\eta^{(n+2)}(x) + (n+1)2x\eta^{(n+1)}(x) + \frac{n(n+1)}{2}2\eta^{(n)}(x) &= 2n\left(x\eta^{(n+1)}(x) + (n+1)\eta^{(n)}(x)\right)\,,\\
(x^2-1)\eta^{(n+2)}(x) + 2x\eta^{(n+1)}(x) - n(n+1)\eta^{(n)}(x) &= 0\,,
\end{aligned}$$

a poněvadž $\eta^{(n)}(x) = P_n(x)$, vidíme, že $P_n(x)$ je řešením uvedené rovnice.

Přímým výpočtem ověříme, že $P_0(1) = P_1(1) = 1$. Odtud a z rekurentní formule (C.2) úplnou indukcí plyne, že $P_n(1) = 1$ pro každé $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. $\square$

Rovnici z tvrzení věty lze také zapsat ve tvaru

$$\big((1-x^2)y'(x)\big)' + n(n+1)y(x) = 0\,. \tag{C.5}$$

C.1.4 Věta (Orthogonalita Legendreových polynomů)

Pro Legendreovy polynomy platí

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & m \neq n,\\ \dfrac{2}{2n+1}, & m = n.\end{cases}$$

D.: Buďte $n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Rovnici (C.5) jednou napíšeme pro $y(x) = P_m(x)$ a vynásobíme $P_n(x)$, podruhé ji napíšeme pro $y(x) = P_n(x)$ a vynásobíme $P_m(x)$:

$$\begin{aligned}
\big((1-x^2)P_m'(x)\big)' P_n(x) + m(m+1)P_m(x)P_n(x) &= 0\,,\\
\big((1-x^2)P_n'(x)\big)' P_m(x) + n(n+1)P_n(x)P_m(x) &= 0\,.
\end{aligned}$$

Tyto rovnice odečteme, upravíme a zintegrujeme v mezích od -1 do 1. Dostaneme

$$\begin{aligned}
\big((1-x^2)P_m'(x)\big)' P_n(x) - \big((1-x^2)P_n'(x)\big)' P_m(x) + \big(m(m+1) - n(n+1)\big)P_n(x)P_m(x) &= 0\,,\\
\Big((1-x^2)\big(P_m'(x)P_n(x) - P_m(x)P_n'(x)\big)\Big)' + (m-n)(m+n+1)P_n(x)P_m(x) &= 0\,,\\
\big[(1-x^2)\big(P_m'(x)P_n(x) - P_m(x)P_n'(x)\big)\big]_{-1}^{1} + (m-n)(m+n+1)\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)\mathrm{d}x &= 0\,,
\end{aligned}$$

a poněvadž první sčítanec se rovná nule, platí pro $m \neq n$

$$\int_{-1}^{1} P_n(x) P_m(x) \mathrm{d}x \;=\; 0\,.$$

Pro výpočet $\|P_n\|^2 = \int_{-1}^{1} (P_n(x))^2 \mathrm{d}x$ použijeme n-krát metodu per partes. Pro zjednodušení zápisu označíme $Q(x) = (x^2-1)^n$ a uvědomíme si, že 1 a -1 jsou $2n$-násobné kořeny polynomu Q.

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} (P_n(x))^2 \mathrm{d}x \;&=\; \left(\frac{1}{2^n n!}\right)^2 \int_{-1}^{1} Q^{(n)}(x) Q^{(n)}(x) \mathrm{d}x \;=\\
&=\; \left(\frac{1}{2^n n!}\right)^2 \left(\left[Q^{(n-1)}(x) Q^{(n)}(x) \right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} Q^{(n+1)}(x) Q^{(n-1)}(x) \mathrm{d}x \right) \;=\\
=\; -\left(\frac{1}{2^n n!}\right)^2 \int_{-1}^{1} Q^{(n+1)}(x) Q^{(n-1)}(x) \mathrm{d}x \;&=\; \cdots \;=\; (-1)^n \left(\frac{1}{2^n n!}\right)^2 \int_{-1}^{1} Q^{(2n)}(x) Q(x) \mathrm{d}x \;=\\
&=\; (-1)^n \left(\frac{1}{2^n n!}\right)^2 \int_{-1}^{1} (2n)!(x^2-1)^n \mathrm{d}x \;=\; (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \int_{-1}^{1} (x+1)^n (x-1)^n \mathrm{d}x\,.
\end{aligned}$$

Pro výpočet integrálu $\int_{-1}^{1} (x+1)^n (x-1)^n \mathrm{d}x$ opět použijeme n-krát metodu per partes:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} (x+1)^n (x-1)^n \mathrm{d}x \;&=\; \left[(x+1)^n \frac{(x-1)^{n+1}}{n+1} \right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} n(x+1)^{n-1} \frac{(x-1)^{n+1}}{n+1} \mathrm{d}x \;=\\
&=\; -\frac{n}{n+1} \int_{-1}^{1} (x+1)^{n-1}(x-1)^{n+1} \mathrm{d}x \;=\\
&=\; -\frac{n}{n+1} \left(\left[(x+1)^{n-1} \frac{(x-1)^{n+2}}{n+2} \right]_{-1}^{1} - \frac{n-1}{n+2} \int_{-1}^{1} (x+1)^{n-2}(x-1)^{n+2} \mathrm{d}x \right) \;=\\
=\; \frac{n(n-1)}{(n+1)(n+2)} \int_{-1}^{1} (x+1)^{n-2}(x-1)^{n+2} \mathrm{d}x \;&=\; \cdots \;=\; \frac{n(n-1)\cdots 1}{(n+1)(n+2)\cdots(2n)} (-1)^n \int_{-1}^{1} (x-1)^{2n} \mathrm{d}x \;=\\
&=\; \frac{(n!)^2}{(2n)!}(-1)^n \left[\frac{(x-1)^{2n+1}}{2n+1} \right]_{-1}^{1} \;=\; -\frac{(n!)^2}{(2n)!}(-1)^n \frac{(-2)^{2n+1}}{2n+1} \;=\; (-1)^n \frac{(n!)^2 2^{2n+1}}{(2n)!(2n+1)}
\end{aligned}$$

Celkem tedy

$$\int_{-1}^{1} \big(P_n(x)\big)^2 \mathrm{d}x \;=\; (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} (-1)^n \frac{(n!)^2 2^{2n+1}}{(2n)!(2n+1)} \;=\; \frac{2}{2n+1}\,.$$

□

C.1.5 Věta

Legendreovy polynomy P_n jsou vlastními funkcemi homogenní okrajové úlohy

$$-\big((1-x^2)y'(x)\big)' = \lambda y(x), \qquad y(x) \text{ je omezená pro } x \to 1- \text{ a pro } x \to -1+ \tag{C.6}$$

příslušné k vlastním číslům $\lambda = n(n+1)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Jiná vlastní čísla tato úloha nemá.

D.: Řešení rovnice budeme hledat Frobeniovou metodou (tj. budeme řešení předpokládat ve tvaru mocninné řady). Máme

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n,$$

$$\begin{aligned}(1-x^2)y'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n - \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^{n+2} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n - \sum_{n=2}^{\infty}(n-1)a_{n-1}x^n = a_1 + 2a_2 x + \sum_{n=2}^{\infty}\big((n+1)a_{n+1} - (n-1)a_{n-1}\big)x^n,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-\big((1-x^2)y'(x)\big)' &= -2a_2 - \sum_{n=2}^{\infty} n\big((n+1)a_{n+1} - (n-1)a_{n-1}\big)x^{n-1} = \\ &= -2a_2 - \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)\big(na_n - (n+2)a_{n+2}\big)x^n = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\big(na_n - (n+2)a_{n+2}\big)x^n.\end{aligned}$$

Tedy

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\big(na_n - (n+2)a_{n+2}\big)x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\lambda a_n x^n.$$

Odtud plyne $\lambda a_n = (n+1)na_n - (n+1)(n+2)a_{n+2}$, takže

$$a_{n+2} = \frac{n(n+1)-\lambda}{(n+1)(n+2)}a_n. \tag{C.7}$$

Fundamentální systém řešení rovnice (C.6) bude dán mocninnou řadou s $a_0 = 1$ a $a_1 = 0$ a řadou s $a_0 = 0$ a $a_1 = 1$, tedy

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^{2k+1}, \quad \text{kde } b_0 = 1,\ b_{k+1} = \frac{(2k+1)(2k+2)-\lambda}{(2k+2)(2k+3)}b_k, \\ y_2(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{2k}, \quad \text{kde } c_0 = 1,\ c_{k+1} = \frac{2k(2k+1)-\lambda}{(2k+1)(2k+2)}c_k. \end{aligned}$$

Pokud $\lambda = n(n+1)$ pro nějaké $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, je právě jedna z funkcí y_1, y_2 polynomem, druhá je vyjádřena nekonečnou řadou. Pokud $\lambda \neq n(n+1)$ pro všechna $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, jsou obě funkce y_1, y_2 dány nekonečnými řadami. Vyšetříme konvergenci těchto řad. Poněvadž

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty}\left|\frac{b_{k+1}x^{2k+3}}{b_k x^{2k+1}}\right| &= x^2 \lim_{k\to\infty}\left|\frac{(2k+1)(2k+2)-\lambda}{(2k+2)(2k+3)}\right| = x^2, \\ \lim_{k\to\infty}\left|\frac{c_{k+1}x^{2k+2}}{c_k x^{2k}}\right| &= x^2 \lim_{k\to\infty}\left|\frac{2k(2k+1)-\lambda}{(2k+1)(2k+2)}\right| = x^2, \end{aligned}$$

řady konvergují absolutně a stejnoměrně pro $|x| < 1$ podle limitního podílového kriteria a divergují pro $|x| > 1$.

Dále platí

$$\lim_{x\to 1+} y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k, \quad \lim_{x\to -1-} y_1(x) = -\sum_{k=0}^{\infty} b_k, \quad \lim_{x\to 1+} y_2(x) = \lim_{x\to -1-} y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k.$$

Poněvadž členy posloupností $\{b_k\}$ a $\{c_k\}$ od jistého indexu nemění znaménko, lze k vyšetřování konvergence řad $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$, $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k$ použít Gaussovo kriterium[1]. Jest

$$\begin{aligned}\frac{b_k}{b_{k+1}} &= \frac{(2k+2)(2k+3)}{(2k+1)(2k+2)-\lambda} = 1+\frac{1}{k}+\frac{1}{k^2}\frac{(\lambda-2)(k+1)}{(2k+1)(2k+2)-\lambda},\\ \frac{c_k}{c_{k+1}} &= \frac{(2k+1)(2k+2)}{2k(2k+1)-\lambda} = 1+\frac{1}{k}+\frac{1}{k^2}\frac{\lambda k(k+1)}{2k(2k+1)-\lambda},\end{aligned}$$

takže obě řady divergují. Libovolná lineární kombinace $\alpha y_1 + \beta y_2$ funkcí y_1, y_2 s koeficienty takovými, že $|\alpha| + |\beta| > 0$ je tedy v příslušném jednostranném okolí alespoň jednoho z bodů 1, -1 neohraničená.

Jediná vlastní čísla uvažované úlohy tedy jsou $\lambda = n(n+1)$ pro $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a příslušné vlastní funkce jsou polynomy. $\square$

C.1.6 Přidružené funkce k Legendreovým polynomům

Přidružené funkce $P_n^{[m]}$ jsou definovány jako řešeni rovnice

$$(1-x^2)z'' - 2xz' + \left(n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right) z = 0, \tag{C.8}$$

neboli

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left((1-x^2)\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right) + \left(n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right) z = 0,$$

která jsou ohraničená na intervalu $(-1, 1)$.

V této rovnici zavedeme novou neznámou funkci Y vztahem

$$z = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} Y(x).$$

Pak

$$z' = -\frac{m}{2}(1-x^2)^{\frac{m}{2}-1} 2xY + (1-x^2)^{\frac{m}{2}} Y' = (1-x^2)^{\frac{m}{2}-1}\left((1-x^2)Y' - mxY\right),$$

$$\begin{aligned}\left((1-x^2)z'\right)' &= \left((1-x^2)^{\frac{m}{2}}\left((1-x^2)Y' - mxY\right)\right)' =\\ &= -mx(1-x^2)^{\frac{m}{2}-1}\left((1-x^2)Y' - mxY\right) + (1-x^2)^{\frac{m}{2}}\left((1-x^2)Y'' - 2xY' - mxY' - mY\right) =\\ &= (1-x^2)^{\frac{m}{2}-1}\Big((1-x^2)^2 Y'' - 2(m+1)x(1-x^2)Y' + \left(m^2x^2 - m(1-x^2)\right)Y\Big).\end{aligned}$$

Tyto výrazy dosadíme do rovnice (C.8) a postupně upravujeme,

$$\begin{aligned}(1+x^2)^{\frac{m}{2}-1}\left[(1-x^2)^2Y'' - 2(m+1)x(1-x^2)Y' + \left(m^2x^2 - m(1-x^2)\right)Y + n(n+1)(1+x^2)Y - m^2Y\right] = 0\\ (1-x^2)^2Y'' - 2(m+1)x(1-x^2)Y' + \left(m^2x^2 - m(1-x^2) + n(n+1)(1-x^2) - m^2\right)Y = 0.\end{aligned}$$

Rovnice (C.8) se tedy transformuje na rovnici

$$(1-x^2)Y'' - 2(m+1)xY' + \big(n(n+1) - m(m+1)\big)Y = 0. \tag{C.9}$$

---

[1] Gaussovo kriterium konvergence řady $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ s nezápornými členy:

Nechť existuje $\varepsilon > 0$ a ohraničená posloupnost $\{\Theta_n\}_{n=1}^{\infty}$ takové že $\dfrac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \dfrac{\mu}{n} + \dfrac{1}{n^{1+\varepsilon}}\Theta_n$.

Je-li $\lambda > 1$, pak řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

Je-li $\lambda < 1$, pak řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Je-li $\lambda = 1$ a $\mu > 1$, pak řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

Je-li $\lambda = 1$ a $\mu \leq 1$, pak řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Nyní budeme postupně derivovat levou stranu Legendreovy rovnice (C.4):

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y\right] = (1-x^2)y''' - 2xy'' - 2xy'' - 2y' + n(n+1)y' = \\ = (1-x^2)y''' - 4xy'' + \big(n(n+1)-2\big)y',$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)y''' - 4xy'' + \big(n(n+1)-2\big)y'\right] = (1-x^2)y'''' - 2\cdot 3xy''' + \big(n(n+1)-2\cdot 3\big)y''$$

atd. Obecně pro přirozené číslo k dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\left[(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y\right] = (1-x^2)y^{(k+2)} - 2(k+1)xy^{(k+1)} + \big(n(n+1)-k(k+1)\big)y^{(k)};$$

tento výsledek lze ověřit úplnou indukcí. Derivujeme-li tedy m-krát Legendreovu rovnici (C.4), dostaneme

$$(1-x^2)y^{(m+2)} - 2(m+1)xy^{(m+1)} + \big(n(n+1)-m(m+1)\big)y^{(m)} = 0.$$

Porovnáním s rovnicí (C.9) vidíme, že řešení Y rovnice (C.9) je m-krát zderivované řešení Legendreovy rovnice (C.4), tj.

$$Y(x) = \frac{d^m}{\mathrm{d}x^n}P_n(x),$$

kde $P_n(x)$ je Legendreův polynom stupně n. Přidružené funkce jsou tedy dány výrazem

$$P_n^{[m]}(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}P_n(x).$$

Platí věta analogická k větě C.1.5: Rovnice

$$(1-x^2)z'' - 2xz' + \left(\lambda - \frac{m^2}{1-x^2}\right)z = 0$$

má řešení ohraničené v intervalu $(-1,1)$ právě tehdy, když $\lambda = n(n+1)$ pro nějaké $n = 0,1,2,\ldots$. Tato řešení jsou přidružené funkce $P_n^{[m]}$.

C.2 Čebyševovy-Laguerreovy polynomy

C.2.1 Definice

Čebyševův-Laguerreův polynom stupně $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ je pro každé $x > 0$ definován vztahem

$$L_n(x) \;=\; \frac{\mathrm{e}^x}{n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(\mathrm{e}^{-x}x^n\right).$$

Zejména

$$\begin{array}{lll} L_0(x) = 1 & L_2(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1 & L_4(x) = \frac{1}{24}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + 3x^2 - 4x + 1 \\ L_1(x) = -x + 1 & L_3(x) = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 3x + 1 & L_5(x) = -\frac{1}{120}x^5 + \frac{5}{24}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + 5x^2 - 5x + 1 \end{array}$$

C.2.2 Explicitní vyjádření Čebyševova-Laguerreova polynomu

Nechť $L_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_{nk}x^k$. S využitím Leibnizovy formule dostaneme

$$L_n(x) \;=\; \frac{\mathrm{e}^x}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\mathrm{e}^{-x}\frac{\mathrm{d}^{n-k}}{\mathrm{d}x^{n-k}}x^n \;=\; \frac{\mathrm{e}^x}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k\mathrm{e}^{-x}\frac{n!}{k!}x^k \;=\; \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{x^k}{k!}, \qquad \text{(C.10)}$$

takže

$$a_{nk} = \frac{(-1)^k}{k!}\binom{n}{k}.$$

Odtud dostaneme

$$\frac{a_{n(k+1)}}{a_{nk}} = -\frac{k!}{(k+1)!}\frac{\binom{n}{k+1}}{\binom{n}{k}} = -\frac{k!n!k!(n-k)!}{(k+1)!n!(k+1)!(n-k-1)!} = \frac{k-n}{(k+1)^2},$$

tedy

$$a_{n(k+1)} = \frac{k-n}{(k+1)^2}a_{nk}, \quad k = 0,1,2,\dots,n-1, \qquad a_{n0} = \binom{n}{0} = 1.$$

C.2.3 Rekurentní vztahy pro Čebyševovy-Laguerreovy polynomy

S využitím (C.10) dostaneme

$$\begin{aligned} nL_n(x) &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{n}{k!}x^k + n, \\ xL_n'(x) &= x\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{k}{k!}x^{k-1} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{1}{(k-1)!}x^k, \end{aligned}$$

tedy

$$\begin{aligned} nL_n(x) - xL_n'(x) &= n + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{1}{(k-1)!}\left(\frac{n}{k}-1\right)x^k = n + \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{n-k}{k!}x^k = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{n-k}{k!}x^k = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{n-k}{k!}x^k = \\ &= n\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!}\frac{x^k}{k!} = nL_{n-1}(x). \end{aligned}$$

Odtud dostaneme vyjádření derivace Čebyševova-Laguerreova polynomu pomocí tohoto polynomu a polynomu nižšího stupně:

$$L_n'(x) = \frac{n}{x}\big(L_n(x) - L_{n-1}(x)\big). \tag{C.11}$$

S využitím (C.10) také dostaneme

$$\begin{aligned} L_n'(x) - L_{n-1}'(x) &= \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k\left[\binom{n}{k} - \binom{n-1}{k}\right]\frac{x^{k-1}}{(k-1)!} + (-1)^n\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \\ &= \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k\frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!}\left[\frac{n}{n-k}-1\right]\frac{x^{k-1}}{(k-1)!} + (-1)^n\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \\ &= \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}\frac{x^{k-1}}{(k-1)!} + (-1)^n\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{k+1}\frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!}\frac{x^k}{k!} = -\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{n-1}{k}\frac{x^k}{k!} = -L_{n-1}(x). \end{aligned}$$

Máme tedy další rekurentní formuli

$$L_n'(x) - L_{n-1}'(x) + L_{n-1}(x) = 0. \tag{C.12}$$

Z formulí (C.11) a (C.12) dostaneme

$$\frac{n}{x}\big(L_n(x) - L_{n-1}(x)\big) = L_{n-1}'(x) - L_{n-1}(x),$$

tedy

$$L_n(x) \;=\; \left(1-\frac{x}{n}\right) L_{n-1}(x)+\frac{x}{n}L'_{n-1}(x)\,, \tag{C.13}$$

což je formule pro výpočet Čebyševova-Laguerreova polynomu pomocí Čebyševova-Laguerreova polynomu stupně nižšího a jeho derivace. Napíšeme-li tuto formuli pro $n+1$ místo pro n a za L'_n dosadíme z (C.11), dostaneme

$$L_{n+1}(x) \;=\; \bigl(1-\frac{x}{n+1}\bigr)L_n(x)+\frac{x}{n+1}\frac{n}{x}\bigl(L_n(x)-L_{n-1}(x)\bigr).$$

Tuto rovnici upravíme na tvar

$$(n+1)L_{n+1}(x) \;=\; (2n+1-x)L_n(x)-nL_{n-1}(x)\,.$$

Tento vzorec lze použít k postupnému výpočtu Čebyševových-Laguerreových polynomů z prvních dvou

$$L_0(x)=1, \quad L_1(x)=1-x.$$

C.2.4 Diferenciální rovnice pro Čebyševovy-Laguerreovy polynomy

Derivováním rovnice (C.11) dostaneme

$$L''_n(x) \;=\; -\frac{n}{x^2}\bigl(L_n(x)-L_{n-1}(x)\bigr)+\frac{n}{x}\left(L'_n(x)-L'_{n-1}(x)\right).$$

Do této rovnice dosadíme z (C.12) za výraz $L'_n(x)-L'_{n-1}(x)$ a upravíme:

$$\begin{aligned} xL''_n(x) &= -\frac{n}{x}\bigl(L_n(x)-L_{n-1}(x)\bigr)-nL_{n-1}(x)\,, \\ xL''_n(x) &= -\frac{n}{x}L_n(x)+\left(\frac{n}{x}-n\right)L_{n-1}(x)\,. \end{aligned}$$

Za výraz $L_{n-1}(x)$ v poslední rovnici dosadíme z (C.11) a dostaneme

$$xL''_n(x) \;=\; -\frac{n}{x}L_n(x)+\frac{n(1-x)}{x}\left(-\frac{x}{n}L'_n(x)+L_n(x)\right),$$

po úpravě

$$xL''_n(x) \;=\; (x-1)L'_n(x)-nL_n(x)\,.$$

To znamená, že Čebyševovy-Laguerreovy polynomy L_n jsou řešením diferenciální rovnice

$$xy''(x)+(1-x)y'(x)+ny(x)=0,$$

nebo v samoadjungovaném tvaru

$$\left(x\mathrm{e}^{-x}y'\right)'+n\mathrm{e}^{-x}y=0.$$

Čebyševovy-Laguerreovy polynomy jsou řešením této rovnice s okrajovými podmínkami

$$y(0)=1, \qquad \lim_{x\to\infty}\mathrm{e}^{-x}y(x)=0.$$

C.2.5 Věta (Orthonormalita Čebyševových-Laguerrových polynomů)

Pro Čebyševovy-Laguerreovy polynomy platí

$$\int\limits_0^\infty L_m(x)L_n(x)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x \;=\; \begin{cases}1, & m=n\\ 0, & m\neq n\end{cases}.$$

D.: Pro každé $0 < l < n$ platí

$$\frac{\mathrm{d}^{n-l}}{\mathrm{d}x^{n-l}}\left(\mathrm{e}^{-x}x^n\right) \;=\; \frac{\mathrm{d}^{n-l}}{\mathrm{d}x^{n-l}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}x^{k+n} \;=\; \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}(k+n)(k+n-1)\cdots(k+l+1)x^{k+l} \;=$$

$$=\; \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\frac{(k+n)!}{(k+l)!}x^{k+l},$$

takže

$$\lim_{x\to 0+}\frac{\mathrm{d}^{n-l}}{\mathrm{d}x^{n-l}}\left(\mathrm{e}^{-x}x^n\right) \;=\; 0\,; \tag{C.14}$$

také platí $\frac{\mathrm{d}^{n-l}}{\mathrm{d}x^{n-l}}\left(\mathrm{e}^{-x}x^n\right) = P(x)\mathrm{e}^{-x}$, kde $P(x)$ je nějaký polynom, takže

$$\lim_{x\to\infty}L_m(x)\frac{\mathrm{d}^{n-l}}{\mathrm{d}x^{n-l}}\left(\mathrm{e}^{-x}x^n\right) \;=\; 0 \tag{C.15}$$

pro každé $m \in \mathbb{N}$.
Nechť pro určitost je $m \le n$. Uvažujme integrál

$$J \;=\; \int_0^{\infty}L_m(x)L_n(x)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x \;=\; \frac{1}{n!}\int_0^{\infty}L_m(x)\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(\mathrm{e}^{-x}x^n\right)\mathrm{d}x\,.$$

K jeho výpočtu použijeme m krát metodu per partes a vztahy (C.14), (C.15):

$$J \;=\; \frac{1}{n!}\left(\left[L_m(x)\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}}\left(\mathrm{e}^{-x}x^n\right)\right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty}L_m'(x)\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}}\left(\mathrm{e}^{-x}x^n\right)\mathrm{d}x\right) \;=$$

$$=\; -\frac{1}{n!}\int_0^{\infty}L_m'(x)\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}}\left(\mathrm{e}^{-x}x^n\right)\mathrm{d}x \;=\; \cdots \;=\; \frac{(-1)^m}{n!}\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}L_m(x)\frac{\mathrm{d}^{n-m}}{\mathrm{d}x^{n-m}}\left(\mathrm{e}^{-x}x^n\right)\mathrm{d}x\,.$$

S využitím C.2.2 dostaneme

$$J \;=\; \frac{(-1)^m}{n!}\int_0^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!}\binom{m}{m}m!\frac{\mathrm{d}^{n-m}}{\mathrm{d}x^{n-m}}\left(\mathrm{e}^{-x}x^n\right)\mathrm{d}x \;=\; \frac{1}{n!}\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}^{n-m}}{\mathrm{d}x^{n-m}}\left(\mathrm{e}^{-x}x^n\right)\mathrm{d}x\,.$$

Je-li $m = n$, pak podle C.4.2 je

$$J \;=\; \frac{1}{n!}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-x}x^n\mathrm{d}x \;=\; \frac{1}{n!}\Gamma(n+1) \;=\; \frac{1}{n!}n! \;=\; 1\,,$$

Jeli $m < n$, pak podle (C.14) a (C.14) je

$$J \;=\; \frac{1}{n!}\left[\frac{\mathrm{d}^{n-m-1}}{\mathrm{d}x^{n-m-1}}\left(\mathrm{e}^{-x}x^n\right)\right]_0^{\infty} \;=\; 0\,.$$

□

Z věty plyne, že funkce

$$\psi_n(x) \;=\; \mathrm{e}^{-x/2}L_n(x), \quad n = 0,1,2,\ldots$$

tvoří ortonormální posloupnost v prostoru $\mathcal{L}^2(0,\infty)$.

C.2.6 Zobecněné Čebyševovy-Laguerreovy polynomy

Zobecněný Čebyševův-Laguerreův polynom stupně $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ je pro všechna reálná $x > 0$ a $s > -1$ definován vztahem

$$Q_n^s(x) \;=\; \frac{\mathrm{e}^x}{n!} x^{-s} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} \left(\mathrm{e}^{-x} x^{n+s}\right).$$

Tyto polynomy jsou řešením diferenciální rovnice

$$xy''(x) + (s+1-x)y'(x) + ny(x) = 0,$$

nebo v samoadjungovaném tvaru

$$\left(x^{s+1}\mathrm{e}^{-x}y'\right)' + n\mathrm{e}^{-x}x^s y = 0.$$

Zobecněné Čebyševovy-Laguerreovy polynomy splňují rekurentní formule

$$\begin{aligned}
(n+1)Q_{n+1}^s(x) \;&=\; (2n+s+1-x)Q_n^s(x) - (n+s)Q_{n-1}^s(x) \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}Q_n^s(x) \;&=\; \frac{1}{x}\left(nQ_n^s(x) - (n+s)Q_{n-1}^s(x)\right), \\
Q_n^{s+1}(x) - Q_{n-1}^{s+1}(x) \;&=\; Q_n^s(x), \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}Q_n^s(x) \;&=\; -Q_{n-1}^{s+1}(x)
\end{aligned}$$

a rovnici

$$\int_0^\infty Q_m^s(x)Q_n^s(x)\mathrm{e}^{-x}x^s\mathrm{d}x \;=\; \begin{cases} \dfrac{\Gamma(n+s+1)}{n!}, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases};$$

přitom $\Gamma(n+s+1) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{n+s}\mathrm{d}t$, sr. C.4. Z poslední rovnice plyne, že funkce

$$\Phi_n^s(x) \;=\; x^{s/2}\mathrm{e}^{-x/2}\sqrt{\frac{n!}{\Gamma(n+s+1)}}\,Q_n^s(x), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

tvoří ortonormální posloupnost v prostoru $\mathcal{L}^2(0,\infty)$.

Řešení rovnice $xy''(x) + (s+1-x)y'(x) + \lambda y(x) = 0$ v oboru polynomů

Řešení hledáme ve tvaru polynomu

$$y(x) = Q(x) = \sum_{k=0}^\infty q_k x^k, \quad q_k = 0 \text{ pro } k > n$$

zatím neurčeného stupně n. Pak je

$$Q'(x) = \sum_{k=1}^\infty kq_k x^{k-1} = \sum_{k=0}^\infty (k+1)q_{k+1}x^k, \quad xQ'(x) = \sum_{k=1}^\infty kq_k x^k,$$

$$Q''(x) = \sum_{k=2}^\infty k(k-1)q_k x^{k-2}, \quad xQ''(x) = \sum_{k=2}^\infty k(k-1)q_k x^{k-1} = \sum_{k=1}^\infty k(k+1)q_{k+1}x^k.$$

Po dosazení do rovnice dostaneme

$$\sum_{k=1}^\infty \left(k(k+1)q_{k+1} + (s+1)(k+1)q_{k+1} - kq_k + \lambda q_k\right)x^k + (s+1)q_1 + \lambda q_0 = 0$$

a odtud

$$q_1 = \frac{-\lambda}{s+1}q_0, \qquad q_{k+1} = \frac{k-\lambda}{(k+1)(k+s+1)}q_k, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Rovnice má tedy řešení v oboru polynomů pouze pro $\lambda = n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$. Tento polynom je stupně n a je určen jednoznačně až na aditivní konstantu q_0.

C.3 Čebyševovy-Hermiteovy polynomy

C.3.1 Definice

Čebyševův-Hermiteův polynom stupně $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ je pro každé $x \in \mathbb{R}$ definován vztahem

$$H_n(x) = (-1)^n \mathrm{e}^{x^2} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} \mathrm{e}^{-x^2}.$$

Zejména

$$\begin{array}{lll} H_0(x) = 1 & H_2(x) = 4x^2 - 2 & H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12 \\ H_1(x) = 2x & H_3(x) = 8x^3 - 12x & H_5(x) = 32x^5 - 160x^3 + 120x \end{array}$$

C.3.2 Rekurentní vztahy pro Čebyševovy-Hermiteovy polynomy

S využitím Leibnizovy formule pro výpočet vyšší derivace součinu funkcí dostaneme pro každé $n \geq 1$

$$\begin{aligned} H_{n+1}(x) &= (-1)^{n+1} \mathrm{e}^{x^2} \frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}x^{n+1}} \mathrm{e}^{-x^2} = (-1)^{n+1} \mathrm{e}^{x^2} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} \left(-2x\mathrm{e}^{-x^2}\right) = 2(-1)^n \mathrm{e}^{x^2} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} \left(x\mathrm{e}^{-x^2}\right) = \\ &= 2(-1)^n \mathrm{e}^{x^2} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} x \frac{\mathrm{d}^{n-k}}{\mathrm{d}x^{n-k}} \mathrm{e}^{-x^2} = 2(-1)^n \mathrm{e}^{x^2} \left[\binom{n}{0} x \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} \mathrm{e}^{-x^2} + \binom{n}{1} \frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}} \mathrm{e}^{-x^2}\right] = \\ &= 2x(-1)^n \mathrm{e}^{x^2} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} \mathrm{e}^{-x^2} - 2n(-1)^{n-1} \mathrm{e}^{x^2} \frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}} \mathrm{e}^{-x^2} = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)\,, \end{aligned}$$

tedy

$$H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0\,. \tag{C.16}$$

Této rovnice lze využít k postupnému výpočtu Čebyševových-Hermiteových polynomů pomocí prvních dvou.

Dále platí

$$\begin{aligned} H_n'(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(-1)^n \mathrm{e}^{x^2} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} \mathrm{e}^{-x^2}\right] = 2x(-1)^n \mathrm{e}^{x^2} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} \mathrm{e}^{-x^2} - (-1)^{n+1} \mathrm{e}^{x^2} \frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}x^{n+1}} \mathrm{e}^{-x^2} = \\ &= 2xH_n(x) - H_{n+1}(x). \end{aligned}$$

Odtud s využitím (C.16) dostaneme

$$H_n'(x) = 2nH_{n-1}(x)\,, \tag{C.17}$$

tj. vyjádření derivace polynomu H_n pomocí polynomu nižšího stupně.

C.3.3 Diferenciální rovnice pro Čebyševovy-Hermiteovy polynomy

S využitím vztahů (C.17) a (C.16) dostaneme

$$\begin{aligned} H_n''(x) &= \big(2nH_{n-1}(x)\big)' = \big(2xH_n(x) - H_{n+1}(x)\big)' = 2H_n(x) + 2xH_n'(x) - H_{n+1}'(x) = \\ &= 2H_n(x) + 2xH_n'(x) - 2(n+1)H_n(x) = 2xH_n'(x) - 2nH_n(x)\,. \end{aligned}$$

Pro každé $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ je tedy Čebyševův-Hermiteův polynom $H_n(x)$ řešením diferenciální rovnice

$$y''(x) - 2xy'(x) + 2ny(x) = 0\,, \tag{C.18}$$

nebo v samoadjungovaném tvaru

$$\left(\mathrm{e}^{-x^2} y'\right)' + 2n\mathrm{e}^{-x^2} y = 0\,.$$

Poznamenejme ještě, že Čebyševův-Hermiteův polynom je řešením rovnice (C.18) s okrajovými podmínkami

$$\lim_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{-x^2} y(x) = \lim_{x \to \infty} \mathrm{e}^{-x^2} y(x) = 0\,.$$

C.3.4 Věta (Orthogonalita Čebyševových-Hermiteových polynomů)

Pro Čebyševovy-Hermiteovy polynomy platí

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_m(x)H_n(x)\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = \begin{cases} 2^n n!\sqrt{\pi}, & n=m \\ 0, & n\neq m \end{cases}.$$

D.: Pro určitost budeme předpokládat, že $m \leq n$. Označme

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} H_m(x)H_n(x)\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} H_m(x)\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\,.$$

Pro výpočet tohoto integrálu použijeme m krát metodu per partes; přitom využijeme (C.17) a skutečnost, že pro libovolný polynom P platí

$$\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-x^2}P(x) = \lim_{x\to\infty} \mathrm{e}^{-x^2}P(x) = 0\,.$$

$$J = (-1)^n \left(\left[H_m(x)\mathrm{e}^{-x^2}\right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} H'_m(x)\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x \right) =$$

$$= (-1)^{n-1}2m \int_{-\infty}^{\infty} H_{m-1}(x)\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = (-1)^{n-2}2m2(m-1)\int_{-\infty}^{\infty} H_{m-2}(x)\frac{\mathrm{d}^{n-2}}{\mathrm{d}x^{n-2}}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x =$$

$$= \cdots = (-1)^{n-m}2^m m! \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}^{n-m}}{\mathrm{d}x^{n-m}}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\,.$$

Je-li $m<n$, pak

$$J = (-1)^{n-m}2^m m! \left[\frac{\mathrm{d}^{n-m-1}}{\mathrm{d}x^{n-m-1}}\mathrm{e}^{-x^2}\right]_{-\infty}^{\infty} = 0\,;$$

je-li $m=n$, pak podle (C.21) je

$$J = 2^n n! \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = 2^n n!\sqrt{\pi}\,.$$

□

Z věty plyne, že funkce

$$\psi_n = \frac{\mathrm{e}^{-x^2/2}}{\sqrt{2^n n!\sqrt{\pi}}}\,H_n(x)\,, \qquad n=0,1,2,\ldots$$

tvoří ortonormální posloupnost v prostoru $\mathcal{L}^2(-\infty,\infty)$.

C.3.5 Rekurentní vztahy pro koeficienty Čebyševových-Hermiteových polynomů

Hledáme řešení rovnice (C.18) ve tvaru mocninné řady $y(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_{nk}x^k$.

Platí

$$2ny(x) = \sum_{k=0}^{\infty} 2na_{nk}x^k\,,$$

$$2xy'(x) = 2x\sum_{k=0}^{\infty} ka_{nk}x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} 2ka_{nk}x^k\,,$$

$$y''(x) = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)a_{nk}x^{k-2} = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_{nk}x^{k-2} = \sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)a_{n(k+2)}x^k\,.$$

Po dosazení do rovnice (C.18) dostaneme

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[(k+2)(k+1)a_{n(k+2)} - 2ka_{nk} + 2na_{nk}\right] x^k \;=\; 0\,,$$

a tedy

$$a_{n(k+2)} \;=\; \frac{2(n-k)}{(k+2)(k+1)}\, a_{nk}\,, \qquad n = 0,1,2,\ldots,n-2.$$

C.4 Funkce Γ

C.4.1 Poznámky

1. Nevlastní integrál $\int\limits_0^{\infty} \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t$ absolutně konverguje pro každé $x > 0$.

   D.: Je-li $x \geq 1$, integrál $\int\limits_0^{1} \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t$ není nevlastní.
   Je-li $x < 1$, vezmeme $\delta \in (0,x)$. Pak $\lim\limits_{t\to 0+} t^{1-\delta}\left|\mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\right| = \lim\limits_{t\to 0+} \mathrm{e}^{-t}t^{x-\delta} = 0$ a podle limitního srovnávacího kriteria pro nevlastní integrály druhého druhu a vzhledem k tomu, že nevlastní integrál $\int\limits_0^{1} t^{-k}\mathrm{d}t$ konverguje pro $k < 1$, také nevlastní integrál $\int\limits_0^{1} \left|\mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\right| \mathrm{d}t$ konverguje.
   Dále je

   $$\lim_{t\to\infty} \big((x+1)\ln t - t\big) = \lim_{\tau\to 0+} \left((x+1)\ln\frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau}\right) = -\lim_{\tau\to 0+} \frac{\tau(x+1)\ln\tau + 1}{\tau} = -\infty,$$

   neboť podle de l'Hospitalova pravidla platí

   $$\lim_{\tau\to 0+} \tau\ln\tau = \lim_{\tau\to 0+} \frac{\ln\tau}{\frac{1}{\tau}} = \lim_{\tau\to 0+} \frac{\frac{1}{\tau}}{-\frac{1}{\tau^2}} = -\lim_{\tau\to 0+} \tau = 0,$$

   takže podle věty o limitě složené funkce dostaneme

   $$\lim_{t\to\infty} t^2\left|\mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\right| \;=\; \lim_{t\to\infty} \mathrm{e}^{-t}t^{x+1} \;=\; \lim_{t\to\infty} e^{(x+1)\ln t - t} \;=\; 0 \;<\; \infty\,.$$

   Podle limitního srovnávacího kriteria pro nevlastní integrály prvního druhu a z toho, že $\int\limits_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ konverguje, nyní dostáváme, že také integrál $\int\limits_1^{\infty} \left|\mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\right| \mathrm{d}t$ konverguje. □

2. Pro $x > 0$ položme

   $$\Gamma(x) \;=\; \int\limits_0^{\infty} \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t\,. \tag{C.19}$$

   Pro každé $x > 0$ a každé $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ pak platí

   $$\Gamma(x) \;=\; \frac{\Gamma(x+n+1)}{x(x+1)\cdots(x+n)}\,. \tag{C.20}$$

   D.: Úplnou indukcí:
   Integrací „per partes“ dostaneme $\Gamma(x+1) = \int\limits_0^{\infty} \mathrm{e}^{-t}t^{x}\mathrm{d}t = -\left[\mathrm{e}^{-t}t^{x}\right]_{t=0}^{\infty} + x\int\limits_0^{\infty} \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t = x\Gamma(x)$, takže (C.20) platí pro $n = 0$.
   Podobně $\Gamma(x+n+2) = \int\limits_0^{\infty} \mathrm{e}^{-t}t^{x+n+1}\mathrm{d}t = -\left[\mathrm{e}^{-t}t^{x+n+1}\right]_{t=0}^{\infty} + (x+n+1)\int\limits_0^{\infty} \mathrm{e}^{-t}t^{x+n}\mathrm{d}t =$
   $= (x+n+1)\Gamma(x+n+1)$, což je indukční krok. □

Podle (C.19) je

$$\Gamma(1) \;=\; \int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t \;=\; -\left[\mathrm{e}^{-t}\right]_0^\infty \;=\; 1\,.$$

Z (C.20) nyní pro každé $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ plyne

$$1 = \Gamma(1) = \frac{\Gamma(n+2)}{1\cdot 2\cdots(n+1)} = \frac{\Gamma(n+2)}{(n+1)!}, \quad \text{tj. } \Gamma(n+2) = (n+1)!,$$

tedy pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $\Gamma(n) = (n-1)!\,.$

C.4.2 Definice

Funkce Γ je pro každé $x > 0$ definována vztahem (C.19), pro $x < 0,\ x \notin \mathbb{Z}$ je funkce Γ definována vztahem (C.20), kde za n vezmeme $[-x] = -[x]-1$, t.j.

$$\Gamma(x) \;=\; \frac{\Gamma(x-[x])}{x(x+1)\cdots(x-[x]-1)}\,.$$

$\operatorname{Dom}\Gamma = \mathbb{R} \setminus \{0,-1,-2,\dots\}$.

C.4.3 Věta

1. Pro každé $x \in \operatorname{Dom}\Gamma$ platí

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \quad \text{neboli} \quad \Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1)$$

a pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\Gamma(x) = (x-1)(x-2)\cdots(x-n)\Gamma(x-n)\,.$$

2. Pro každé $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ platí

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}\,.$$

D.:

1. Pro $x > 0$ byl první vztah dokázán v C.4.1.2, pro $x \in (-1,0)$ je podle definice $\Gamma(x) = \dfrac{\Gamma(x+1)}{x}$, což je první vztah a pro $x < -1$ je

$$x\Gamma(x) = x\frac{\Gamma(x-[x])}{x(x+1)\cdots(x-[x]-1)} = \frac{\Gamma(x+1-[x+1])}{(x+1)(x+2)\cdots(x+1-[x+1]-1)} = \Gamma(x+1)\,,$$

což je opět první vztah. Ten druhý z něho plyne indukcí.

2. Nechť $x \in (0,1)$. Pak

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) \;=\; \int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t \int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-s}s^{-x}\mathrm{d}s \;=\; \iint\limits_{[0,\infty)\times[0,\infty)} \mathrm{e}^{-(t+s)}s^{-x}t^{x-1}\mathrm{d}s\mathrm{d}t\,.$$

Položíme $u = s+t,\ v = \dfrac{t}{s}$, neboli $s = \dfrac{u}{v+1},\ t = \dfrac{uv}{v+1}$. Podle věty o transformaci dvojného integrálu dostaneme

$$\begin{aligned}\Gamma(x)\Gamma(1-x) \;&=\; \int\limits_0^\infty \left(\int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-u}\left(\frac{v+1}{u}\right)^x \left(\frac{uv}{v+1}\right)^x \frac{v+1}{uv}\,\frac{u}{(v+1)^2}\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}s \;=\\ &=\; \int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u \int\limits_0^\infty \frac{v^{x-1}}{v+1}\mathrm{d}v \;=\; \int\limits_0^\infty \frac{v^{x-1}}{v+1}\mathrm{d}v\,.\end{aligned}$$

Podle známého vzorce z teorie integrálu [Jarník, I2, str. 277–281] je

$$\int_0^\infty \frac{v^{x-1}}{v+1}\mathrm{d}v = \frac{\pi}{\sin \pi x}\,.$$

Nechť $x > 1$. Pak podle 1. je $\Gamma(x) = (x-1)(x-2)\cdots(x-[x])\Gamma(x-[x])$. $1-x<0$, takže podle definice

$$\Gamma(1-x) \;=\; \frac{\Gamma(1-x+[x])}{(1-x)(2-x)\cdots([x]-x)} \;=\; \frac{(-1)^{[x]}\Gamma(1-x+[x])}{(x-1)(x-2)\cdots(x-[x])}\,,$$

$x-[x] \in (0,1)$, takže podle již dokázaného je

$$\begin{aligned}\Gamma(x)\Gamma(1-x) \;&=\; (-1)^{[x]}\Gamma(x-[x])\Gamma(1-x+[x]) \;=\; (-1)^{[x]}\frac{\pi}{\sin\pi(x-[x])} \;= \\ &=\; (-1)^{[x]}\frac{\pi}{\sin\pi x\cos\pi[x]-\cos\pi x\sin\pi[x]} \;=\; (-1)^{[x]}\frac{\pi}{(-1)^{[x]}\sin\pi x} \;=\; \frac{\pi}{\sin\pi x}\,.\end{aligned}$$

Nechť $x<0$. Pak podle definice je $\Gamma(x) = \dfrac{\Gamma(x-[x])}{x(x+1)\cdots(x-[x]-1)}$ a podle 1. je
$\Gamma(1-x) = -x(-x-1)\cdots(-x+1+[x])\Gamma(1-x+[x]) = (-1)^{[x]}x(x+1)\cdots(x-[x]-1)\Gamma(1-x+[x])$.
Opět $x-[x]\in(0,1)$ a podle již dokázaného

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) \;=\; (-1)^{[x]}\Gamma(x-[x])\Gamma(1-x+[x]) \;=\; (-1)^{[x]}\frac{\pi}{\sin\pi(x-[x])} \;=\; \frac{\pi}{\sin\pi x}\,.$$

□

Známe-li $\Gamma(x)$ pro $x\in[\frac12,1]$, lze podle C.4.3 vypočítat $\Gamma(x)$ pro jakékoliv $x\in\operatorname{Dom}\Gamma$. Již víme, že $\Gamma(1)=1$. Položíme-li v C.4.3.2 $x=\frac12$, dostaneme

$$\left(\Gamma\left(\frac12\right)\right)^2 \;=\; \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{2}} \;=\; \pi \quad\text{neboli}\quad \Gamma\left(\frac12\right) \;=\; \sqrt{\pi}\,.$$

Odtud také plyne

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x \;=\; \frac12\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{-\frac12}\mathrm{d}t \;=\; \frac12\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{\frac12-1}\mathrm{d}t \;=\; \frac12\Gamma\left(\frac12\right) \;=\; \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,. \tag{C.21}$$

Podle vět z teorie integrálů závislých na parametrech platí

$$\lim_{x\to0+}\Gamma(x) \;=\; \lim_{x\to0+}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t \;=\; \int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\mathrm{d}t \;=\; \infty,\ \text{neboť}\ \lim_{t\to0+}\frac{\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}}{\frac1t} = \lim_{t\to0+}\mathrm{e}^{-t} = 1 > 0,$$

a

$$\lim_{x\to0-}\Gamma(x) \;=\; \lim_{x\to0-}\frac{\Gamma(x+1)}{x} \;=\; \Gamma(1)\lim_{x\to0-}\frac1x \;=\; -\infty\,.$$

C.4.4 Logaritmická derivace funkce Γ

$$\psi(x) \;=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln\Gamma(x) \;=\; \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$$

Omezíme se na $\operatorname{Dom}\psi = (0,\infty)$.

Podle C.4.3 platí

$$\begin{aligned}\psi(x+1) \;&=\; \frac1x + \psi(x) \\ \psi(x) \;&=\; \psi(x-n) + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x-k} \qquad \text{pro } n\in\mathbb{N},\ n<x \\ \psi(x+n) \;&=\; \psi(x) + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{x+k} \qquad \text{pro } n\in\mathbb{N} \\ \psi(1-x)-\psi(x) \;&=\; \pi\operatorname{cotg}\pi x\end{aligned} \tag{C.22}$$

Tyto vztahy lze využít pro výpočet hodnot funkce ψ, známe-li $\psi(x)$ pro $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

Podle vět z teorie integrálů závislých na parametrech platí pro $x > 0$

$$\Gamma'(x) \;=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t \;=\; \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\ln t\mathrm{d}t\,. \tag{C.23}$$

Položíme $\gamma \;=\; -\Gamma'(1) \;=\; -\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\ln t\mathrm{d}t \;=\; 0.5772157\cdots$ (Eulerova konstanta). Dosadíme-li v (C.22) 1 za x, dostaneme

$$\psi(n+1) \;=\; -\gamma + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\,.$$

Platí (tzv. Frullaniho integrál)

$$\ln t \;=\; \int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-\xi} - \mathrm{e}^{-\xi t}}{\xi}\mathrm{d}\xi\,. \tag{C.24}$$

Dosadíme do (C.23) a dostaneme

$$\begin{aligned}\Gamma'(x) \;&=\; \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\left(\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-\xi} - \mathrm{e}^{-\xi t}}{\xi}\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}t \;=\; \int_0^\infty \frac{1}{\xi}\left(\mathrm{e}^{-\xi}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t - \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t(\xi+1)}t^{x-1}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}\xi \;=\\ &=\; \int_0^\infty \frac{1}{\xi}\left(\mathrm{e}^{-\xi}\Gamma(x) - \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t(\xi+1)}t^{x-1}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}\xi\,.\end{aligned}$$

Ve vnitřním integrálu zavedeme substituci $u = t(\xi+1)$ a dostaneme

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t(\xi+1)}t^{x-1}\mathrm{d}t \;=\; \int_0^\infty \mathrm{e}^{-u}\left(\frac{u}{\xi+1}\right)^{x-1}\frac{\mathrm{d}u}{\xi+1} \;=\; \frac{1}{(\xi+1)^x}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-u}u^{x-1}\mathrm{d}u \;=\; \frac{1}{(\xi+1)^x}\Gamma(x)\,,$$

takže

$$\Gamma'(x) \;=\; \Gamma(x)\int_0^\infty \frac{1}{\xi}\left(\mathrm{e}^{-\xi} - (\xi+1)^{-x}\right)\mathrm{d}\xi \;=\; \Gamma(x)\left(\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-\xi}}{\xi}\mathrm{d}\xi - \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi(\xi+1)^x}\right),$$

což znamená, že

$$\psi(x) \;=\; \int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-\xi}}{\xi}\mathrm{d}\xi - \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi(\xi+1)^x}\,.$$

Ve druhém integrálu zavedeme substituci $\xi + 1 = \mathrm{e}^t$:

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi(\xi+1)^x} \;=\; \int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^t\mathrm{d}t}{(\mathrm{e}^t - 1)\mathrm{e}^{tx}} \;=\; \int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{1-\mathrm{e}^{-t}}\mathrm{d}t$$

a v prvním přeznačíme integrační proměnnou. Dostaneme

$$\psi(x) \;=\; \int_0^\infty \left(\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t} - \frac{e^{-tx}}{1-e^{-t}}\right)\mathrm{d}t\,. \tag{C.25}$$

Zejména pro $x = 1$ dostaneme

$$-\gamma \;=\; \int_0^\infty \left(\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t} - \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}\right)\mathrm{d}t\,.$$

Odečteme-li poslední dvě rovnice, dostaneme

$$\psi(x) \;=\; -\gamma + \int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-tx}}{1-\mathrm{e}^{-t}}\mathrm{d}t\,.$$

Zavedeme substituci $\eta = \mathrm{e}^{-t}$:

$$\psi(x) \;=\; -\gamma + \int_0^1 \frac{1-\eta^{x-1}}{1-\eta}\mathrm{d}\eta\,. \tag{C.26}$$

Buď $s \in (0,1)$ libovolné číslo. Funkce $\eta \mapsto \eta - \eta^x$ je na intervalu $[0,s]$ spojitá, takže podle první Weierstrassovy věty je na tomto intervalu ohraničená. Existuje tedy konstanta $c \geq 0$ taková, že

$$\left|\eta^n - \eta^{n+x-1}\right| = |\eta^n|\;|\eta - \eta^x| \leq s^n c$$

pro každé $n \geq 1$ a každé $\eta \in [0,s]$. Geometrická řada $\sum\limits_{n=+}^{\infty} cs^n$ konverguje. Podle Weierstrassova kriteria tedy řada

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\eta^n - \eta^{n+x-1}\right) \;=\; 1 - \eta^{x-1} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\eta^n - \eta^{n+x-1}\right)$$

konverguje absolutně a stejnoměrně na intervalu $[0,s]$. Odtud plyne, že následující výpočet je korektní.

$$\int_0^s \frac{1-\eta^{x-1}}{1-\eta}\mathrm{d}\eta \;=\; \int_0^s \left(\left(1-\eta^{x-1}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\eta^n\right)\mathrm{d}\eta \;=\; \int_0^s \sum_{n=0}^{\infty}\left(\eta^n - \eta^{n+x-1}\right)\mathrm{d}\eta \;=$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^s \left(\eta^n - \eta^{n+x-1}\right)\mathrm{d}\eta \;=\; \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{s^{n+1}}{n+1} - \frac{s^{n+x}}{n+x}\right)\,. \tag{C.27}$$

Přitom poslední řada konverguje stejnoměrně na intervalu $[0,s]$; vzhledem k tomu, že s bylo libovolné číslo z intervalu $(0,1)$, tato řada konverguje lokálně stejnoměrně na intervalu $[0,1)$. Řada

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+x}\right) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x-1}{(n+1)(n+x)}$$

konverguje podle Cauchyova-Maclaurinova Kriteria. Z C.27 nyní plyne

$$\int_0^1 \frac{1-\eta^{x-1}}{1-\eta}\mathrm{d}\eta \;=\; \lim_{s\to 1-}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{s^{n+1}}{n+1} - \frac{s^{n+x}}{n+x}\right) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty}\lim_{s\to 1-}\left(\frac{s^{n+1}}{n+1} - \frac{s^{n+x}}{n+x}\right) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+x}\right)\,.$$

Odtud a z C.26 dostáváme vyjádření logaritmické derivace funkce Γ ve tvaru

$$\psi(x) \;=\; -\gamma + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+x}\right)\,. \tag{C.28}$$

C.4.5 Rozvoj funkce Γ ve Weierstrassův nekonečný součin

Podle (C.28) je

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\Gamma(t) \;=\; -\gamma + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+t}\right)\,.$$

Integrujeme-li tuto rovnost podle t v mezích od 1 do $x+1$, dostaneme

$$\ln\Gamma(x+1) \;=\; -\gamma x + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{n} - \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\right)\,.$$

Odtud dostaneme

$$\Gamma(x+1) \;=\; \mathrm{e}^{-\gamma x}\prod_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{\frac{x}{n}}\frac{1}{1+\frac{x}{n}}\,, \qquad \frac{1}{\Gamma(x+1)} \;=\; \mathrm{e}^{\gamma x}\prod_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-\frac{x}{n}}\left(1+\frac{x}{n}\right)\,.$$

C.4.6 Asymptotické vyjádření funkce Γ

Z (C.25) s využitím (C.24) dostaneme

$$\frac{\Gamma'(\xi+1)}{\Gamma(\xi+1)} = \int\limits_0^\infty \left(\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t} - \frac{\mathrm{e}^{-t\xi}\mathrm{e}^{-t}}{1-\mathrm{e}^{-t}}\right) \mathrm{d}t = \int\limits_0^\infty \left(\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t} - \frac{\mathrm{e}^{-t\xi}}{\mathrm{e}^{t}-1}\right) \mathrm{d}t =$$

$$= \int\limits_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-t\xi}}{t}\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-t\xi}\mathrm{d}t - \int\limits_0^\infty \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{\mathrm{e}^t-1}\right)\mathrm{e}^{-t\xi}\mathrm{d}t =$$

$$= \ln\xi + \frac{1}{2\xi} - \int\limits_0^\infty \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{\mathrm{e}^t-1}\right)\mathrm{e}^{-t\xi}\mathrm{d}t\,.$$

Zintegrujeme tuto rovnost podle ξ v mezích od 1 do x:

$$\ln\Gamma(x+1) - \ln\Gamma(2) = x\ln x - x + 1 + \frac{1}{2}\ln x - \int\limits_0^\infty \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{\mathrm{e}^t-1}\right)\frac{\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-tx}}{t}\mathrm{d}t\,.$$

Při označení $f(t) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{\mathrm{e}^t-1}\right)\frac{1}{t}$ a s využitím $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x),\ \Gamma(2) = 1$ máme

$$\ln\Gamma(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)\ln x - x + 1 - \int\limits_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t + \int\limits_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-tx}\mathrm{d}t\,. \tag{C.29}$$

Označme

$$I = \int\limits_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t,\quad J = \int\limits_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-t/2}\mathrm{d}t,\quad \omega(x) = \int\limits_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-tx}\mathrm{d}t\,.$$

Platí:

$$J - I = \int\limits_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-t/2}\mathrm{d}t - \int\limits_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = \int\limits_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-t/2}\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty f\left(\frac{t}{2}\right)\mathrm{e}^{-t/2}\mathrm{d}t =$$

$$= \int\limits_0^\infty \left(\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{\mathrm{e}^t-1}\right)\frac{1}{t} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{t} + \frac{1}{\mathrm{e}^{t/2}-1}\right)\frac{2}{t}\right)\mathrm{e}^{-t/2}\mathrm{d}t =$$

$$= \int\limits_0^\infty \left(\frac{1}{t} + \frac{1-(\mathrm{e}^{t/2}+1)}{\mathrm{e}^t-1}\right)\frac{\mathrm{e}^{-t/2}}{t}\mathrm{d}t = \int\limits_0^\infty \left(\frac{\mathrm{e}^{-t/2}}{t} - \frac{1}{\mathrm{e}^t-1}\right)\frac{\mathrm{d}t}{t}\,,$$

takže (při výpočtu využijeme (C.24))

$$J = \int\limits_0^\infty \left(\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{\mathrm{e}^t-1}\right)\mathrm{e}^{-t} + \frac{e^{-t/2}}{t} - \frac{1}{\mathrm{e}^t-1}\right)\frac{\mathrm{d}t}{t} =$$

$$= \int\limits_0^\infty \left(\frac{\mathrm{e}^{-t}}{2} - \frac{\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-t/2}}{t} + \frac{\mathrm{e}^{-t}-1}{\mathrm{e}^t-1}\right)\frac{\mathrm{d}t}{t} = \int\limits_0^\infty \left(\frac{\mathrm{e}^{-t/2}-\mathrm{e}^{-t}}{t} + \frac{\mathrm{e}^{-t}}{2} + \frac{\mathrm{e}^{-t}(1-\mathrm{e}^t)}{\mathrm{e}^t-1}\right)\frac{\mathrm{d}t}{t} =$$

$$= \int\limits_0^\infty \left(\frac{\mathrm{e}^{-t/2}-\mathrm{e}^{-t}}{t} - \frac{e^{-t}}{2}\right)\frac{\mathrm{d}t}{t} =$$

$$= \int_0^\infty \left(\left(\frac{e^{-t/2} - e^{-t}}{t} - \frac{e^{-t}}{2} - \frac{e^{-t}}{2} + \frac{e^{-t/2}}{2} \right) \frac{1}{t} + \frac{1}{2} \frac{e^{-t} - e^{-t/2}}{t} \right) dt =$$

$$= \int_0^\infty \frac{2\left(e^{-t/2} - e^{-t}\right) - t\left(2e^{-t} - e^{-t/2}\right)}{2t^2} dt + \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{e^{-t} - e^{-t/2}}{t} dt =$$

$$= \int_0^\infty \frac{\left(-e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-t/2}\right) t - \left(e^{-t} - e^{-t/2}\right)}{t^2} dt + \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2} =$$

$$= \int_0^\infty \frac{d}{dt} \frac{e^{-t} - e^{-t/2}}{t} dt - \frac{1}{2} \ln 2 = \left[\frac{e^{-t} - e^{-t/2}}{t} \right]_0^\infty - \frac{1}{2} \ln 2 =$$

$$= -\lim_{t \to 0} \frac{e^{-t} - e^{-t/2}}{t} - \frac{1}{2} \ln 2 = \lim_{t \to 0} \left(-\frac{1}{2} e^{-t/2} + e^{-t} \right) - \frac{1}{2} \ln 2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln 2 .$$

Položíme-li v (C.29) $x = \frac{1}{2}$, dostaneme

$$\ln \sqrt{\pi} = \frac{1}{2} - I + J ,$$

což spolu s předchozím výsledkem dá

$$I = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln \pi + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln 2 = 1 - \frac{1}{2} \ln 2\pi .$$

Dosadíme do (C.29) a dostaneme

$$\ln \Gamma(x) = \left(x - \frac{1}{2} \right) \ln x - x + \frac{1}{2} \ln 2\pi + \omega(x) .$$

Funkce f je na intervalu $(0, \infty)$ klesající, $\lim\limits_{t \to \infty} f(t) = 0$ a

$$\lim_{t \to 0+} f(t) = \lim_{t \to 0+} \frac{te^t - t - 2e^t + 2 + 2t}{2t^2 \left(e^t - 1\right)} = \lim_{t \to 0+} \frac{e^t + te^t - 2e^t + 1}{4t\left(e^t - 1\right) + 2t^2 e^t} =$$

$$= \lim_{t \to 0+} \frac{-e^t + e^t + te^t}{(4 + 4t)e^t + (4t + 2t^2)\, e^t - 4} = \lim_{t \to 0+} \frac{e^t + te^t}{(8 + 4t + 4 + 8t + 2t^2)\, e^t} = \frac{1}{12} ,$$

což znamená, že

$$|\omega(x)| = \left| \int_0^\infty f(t) e^{-tx} dt \right| \leq \int_0^\infty |f(t)| e^{-tx} dt \leq \frac{1}{12} \int_0^\infty e^{-tx} dt = -\frac{1}{12x} \left[e^{-tx} \right]_0^\infty = \frac{1}{12x} ,$$

z čehož plyne, že $\lim\limits_{x \to \infty} \omega(x) = 0$, takže pro velká x lze psát

$$\ln \Gamma(x) \approx \left(x - \frac{1}{2} \right) \ln x - x + \frac{1}{2} \ln 2\pi , \qquad \text{neboli} \qquad \Gamma(x) \approx \sqrt{2\pi}\, x^{x - \frac{1}{2}}\, e^{-x} . \tag{C.30}$$

Odtud dostaneme

$$n! = \Gamma(n + 1) \approx \sqrt{2\pi}\, (n + 1)^{n + \frac{1}{2}}\, e^{-n-1}$$

a poněvadž

$$\lim_{n \to \infty} \frac{(n + 1)^{n + \frac{1}{2}}\, e^{-n-1}}{n^{n + \frac{1}{2}}\, e^{-n}} = \frac{1}{e} \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \sqrt{1 + \frac{1}{n}} = \frac{1}{e}\, e\, 1 = 1 ,$$

lze psát

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e} \right)^n$$

pro velká n (Stirlingova formule).

C.5 Besselovy funkce

C.5.1 Definice

Obyčejná lineární homogenní rovnice druhého řádu

$$x^2y''(x) + xy'(x) + (x^2 - \nu^2)y(x) \;=\; 0\,, \tag{C.31}$$

kde $\nu \in \mathbb{R},\ x \in (0,\infty)$ se nazývá *Besselova rovnice řádu* ν.

Rovnici (C.31) lze ekvivalentně zapsat

$$x\big(xy'(x)\big)' + (x^2 - \nu^2)y(x) \;=\; 0\,.$$

C.5.2 Řešení rovnice (C.31) Frobeniovou metodou

Hledáme nějaké řešení rovnice (C.31). Budeme předpokládat, že je tvaru

$$y(x) \;=\; a_0x^\sigma + a_1x^{\sigma+1} + a_2x^{\sigma+2} + \cdots \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} a_kx^{\sigma+k}\,, \tag{C.32}$$

kde $\sigma \in \mathbb{R}$ je tzv. *charakteristický součinitel*, jehož hodnotu určíme později. Pak je

$$\begin{array}{rcrcrcl}
x^2y'' &=& a_0\sigma(\sigma-1)x^\sigma &+& a_1(\sigma+1)\sigma x^{\sigma+1} &+& \sum\limits_{k=2}^{\infty} a_k(\sigma+k)(\sigma+k-1)x^{\sigma+k}\,, \\
xy'(x) &=& a_0\sigma x^\sigma &+& a_1(\sigma+1)x^{\sigma+1} &+& \sum\limits_{k=2}^{\infty} a_k(\sigma+k)x^{\sigma+k}\,, \\
x^2y(x) &=& && && \sum\limits_{k=2}^{\infty} a_{k-2}x^{\sigma+k}\,, \\
-\nu^2y(x) &=& -\nu^2a_0x^\sigma &-& \nu^2a_1x^{\sigma+1} &+& \sum\limits_{k=2}^{\infty} (-\nu^2a_k)x^{\sigma+k}\,.
\end{array}$$

Tedy

$$a_0(\sigma^2-\nu^2)x^\sigma + a_1(\sigma^2+2\sigma+1-\nu^2)x^{\sigma+1} + \sum_{k=2}^{\infty}\big(a_k(\sigma^2+2\sigma k+k^2-\nu^2)+a_{k-2}\big)\,x^{\sigma+k} \;=\; 0\,,$$

takže (C.32) je formálním řešením Besselovy rovnice (C.31) pokud platí rovnosti

$$\begin{aligned}
a_0(\sigma^2-\nu^2) &= 0 \\
a_1(\sigma^2+2\sigma+1-\nu^2) &= 0 \\
a_k(\sigma^2+2\sigma k+k^2-\nu^2)+a_{k-2} &= 0\,,\quad k=2,3,\ldots
\end{aligned}$$

První z těchto rovností je splněna, pokud σ a ν vyhovují tzv. *charakteristické rovnici*

$$\sigma^2-\nu^2 \;=\; 0\,,\quad \text{tj. } \sigma \;=\; \pm\nu\,. \tag{C.33}$$

Položíme $\sigma=\nu$ a dosadíme do zbývajících rovností. Dostaneme

$$a_1(2\nu+1) \;=\; 0 \tag{C.34}$$

$$a_k(2\nu+k)k \;=\; a_{k-2}\,,\quad k=2,3,\ldots\,. \tag{C.35}$$

Rovnost (C.34) a rovnosti (C.35) s lichými indexy k, tj. $k=2m+1$ pro vhodné $m\in\mathbb{N}$, jsou zřejmě splněny, pokud $a_{2m+1}=0$, $m=0,1,2,\ldots$.

Najdeme podmínky, za jakých jsou splněny rovnosti (C.35) se sudými indexy k. Pokud $2\nu + k \neq 0$ pro $k = 2, 4, 6, \dots, 2m$, pak

$$a_{2m} = -\frac{a_{2(m-1)}}{2^2 m(m+\nu)} = -\frac{-\dfrac{a_{2(m-2)}}{2^2(m-1)(m-1+\nu)}}{2^2 m(m+\nu)} = \frac{a_{2(m-2)}}{2^4 m(m-1)(m+\nu)(m-1+\nu)} = \cdots =$$

$$= \frac{(-1)^m a_0}{2^{2m} m(m-1)\cdots 1\cdot(m+\nu)(m-1+\nu)\cdots(1+\nu)} = \frac{(-1)^m a_0 \Gamma(1+\nu)}{2^{2m} m!(m+\nu)(m-1+\nu)\cdots(1+\nu)\Gamma(1+\nu)} =$$

$$= \frac{(-1)^m a_0 \Gamma(1+\nu)}{2^{2m}\Gamma(m+1)\Gamma(m+\nu+1)}.$$

Tento výpočet naznačuje, že lze volit

$$a_0 = \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu+1)}, \quad a_{2m} = \frac{(-1)^m}{2^{2m+\nu}\Gamma(m+1)\Gamma(m+\nu+1)}.$$

Pokud $2\nu + k = 0$ pro nějaké $k = 2m_1$, pak $2\nu + k$ je celé záporné číslo pro všechna $k = 2, 4, 6, \dots, 2(m_1 - 1)$ a $2\nu + k > 0$ pro všechna $k = 2(m_1+1), 2(m_1+2), \dots$. Tedy $1+\nu, 2+\nu, \dots, m_1+\nu$ nejsou v definičním oboru funkce Γ a $m_1+\nu+1, m_1+\nu+2, \dots$ v něm jsou. V takovém případě lze volit

$$a_0 = a_2 = \cdots = a_{2(m_1-1)} = 0, \quad a_{2m} = \frac{(-1)^m}{2^{2m+\nu}\Gamma(m+1)\Gamma(m+\nu+1)} \text{ pro } m \geq m_1.$$

Snadno ověříme, že při uvedené volbě budou rovnosti (C.35) splněny pro každý sudý index k.

Formální řešení rovnice (C.31) je tedy tvaru

$$y(x) = \sum_{k=k_0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}, \tag{C.36}$$

kde

$$k_0 = \begin{cases} 0, & \nu \notin (-\infty, 0] \cap \mathbb{Z}, \\ -\nu, & \nu \in (-\infty, 0] \cap \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Abychom ověřili, že se jedná o řešení, je potřeba ukázat, že tato řada konverguje pro každé $x > 0$. Pro poloměr konvergence r mocninné řady

$$S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2^{2k}\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)} x^{2k}$$

podle Cauchyovy-Hadamardovy věty a s využitím (C.30) platí

$$\frac{1}{r} = \limsup_{k\to\infty} \sqrt[2k]{\frac{1}{2^{2k}\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)}} =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{k\to\infty} \sqrt[2k]{\frac{1}{2\pi(k+1)^{k+1/2}(k+\nu+1)^{k+\nu+1/2}\mathrm{e}^{-2k+\nu-1}}} = 0,$$

takže tato řada konverguje absolutně a stejnoměrně pro každé $x \in \mathbb{R}$. Řada (C.36) tedy konverguje absolutně a stejnoměrně pro každé $x > 0$. (Pro $x = 0$ nemusí být $y(x) = x^\nu S(x)$ vůbec definována.)

C.5.3 Definice

Funkce

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}$$

se nazývá *Besselova funkce prvního druhu řádu* ν. Je-li pro nějaké $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ číslo $k + \nu + 1$ celé nekladné (tj. $k + \nu + 1 \notin \operatorname{Dom}\Gamma$), klademe k-tý člen uvažované řady roven 0.

Označme

$$u_\nu(x) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$$

Pak je $J_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu} u_\nu(x)$.

C.5.4 Poznámka

$$u_\nu(0) \;=\; \frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\,, \quad u'_\nu(0) \;=\; 0\,.$$

D.: První vzorec plyne z toho, že $\Gamma(1) = 1$.

$$\begin{aligned} u'_\nu(x) \;&=\; \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{2k}{2\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-1} \;=\; \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-1} \;= \\ &=\; \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{\Gamma(k)\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-1}\,. \end{aligned}$$

(Poslední rovnost plyne z faktu, že $\Gamma(k+1) = k\Gamma(k)$.) □

C.5.5 Vlastnosti Besselovy funkce prvního druhu

1. Funkce $J_\nu(x)$ je spojitá na $(0, \infty)$.

   D.: Plyne z toho, že $u_\nu(x)$ jakožto součet mocninné řady je funkce spojitá. □

2. $\lim\limits_{x\to 0+} J_\nu(x) = \begin{cases} 1\,, & \nu = 0 \\ 0\,, & \nu > 0 \text{ nebo } \nu \in \mathbb{Z}\setminus\{0\} \\ \infty(-1)^{[\nu]}\,, & \nu \in (-\infty, 0)\setminus\mathbb{Z} \end{cases}.$

   D.: Plyne bezprostředně z C.5.4. □

3. Pro $n \in \mathbb{N}$ platí $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$ pro všechna $x \in (0, \infty)$.

   D.: $J_{-n}(x) = \sum\limits_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k-n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+n}}{\Gamma(k+n+1)\Gamma(k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n} = (-1)^n J_n(x).$
   □

4. $\left(x^{-\nu}J_\nu(x)\right)' = -x^{-\nu}J_{\nu+1}(x)\,,\ \left(x^{\nu}J_\nu(x)\right)' = x^{\nu}J_{\nu-1}(x)\,.$

D.: Platí:

$$\begin{aligned}
\left(x^{-\nu}J_\nu(x)\right)' &= \left(2^{-\nu}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}\right)' = \\
&= 2^{-\nu}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{2k}{2\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-1} = \\
&= 2^{-\nu}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-1} = \\
&= 2^{-\nu}\frac{x}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{\Gamma(k)\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2(k-1)} = \\
&= 2^{-\nu}\frac{x}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+2)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k} = \\
&= -2^{-\nu}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+2)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+1} = \\
&= -x^{-\nu}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+2)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+1} = \\
&= -x^{-\nu}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+(\nu+1)+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu+1}
\end{aligned}$$

Druhý vztah lze dokázat analogicky. □

5. $J_{\nu+1}(x) \;=\; \dfrac{2\nu}{x}J_\nu(x) - J_{\nu-1}(x)\,,\;\; J'_\nu(x) \;=\; \dfrac{1}{2}\big(J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x)\big)$.
První formule (rekurentní vzorec) umožňuje vypočítat $J_{\nu+1}(x)$ ze znalosti $J_\nu(x)$ a $J_{\nu-1}(x)$; druhá formule je vzorec pro derivaci Besselovy funkce prvního druhu.

D.: První formuli z 4. vynásobíme x^ν, druhou $x^{-\nu}$ a rozepíšeme derivaci součinu. Tím dostaneme

$$J'_\nu(x) - \frac{\nu}{x}J_\nu(x) \;=\; -J_{\nu+1}(x)\,, \quad J'_\nu(x) + \frac{\nu}{x}J_\nu(x) \;=\; J_{\nu-1}(x)\,.$$

Odečtením těchto rovnic dostaneme první formuli, sečtením druhou. □

6. Platí

$$J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k},$$

$$J_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+2)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+1} = \frac{x}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k+1)(k!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}.$$

7. $J_{-1/2}(x) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi x}}\cos x\,,\quad J_{1/2}(x) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi x}}\sin x\,.$

D.: Poněvadž podle C.4.3 je pro každé $k \in \mathbb{N}\cup\{0\}$

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right) &= \left(k-\frac{1}{2}\right)\left(k-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(k-\frac{2k-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{(2k-1)(2k-3)\cdots 1}{2^k}\sqrt{\pi} = \\
&= \frac{(2k)!}{(2k)!!2^k}\sqrt{\pi} = \frac{(2k)!}{k!2^{2k}}\sqrt{\pi}\,,
\end{aligned}$$

kde $(2k)!! = 2k(2k-2)(2k-4)\cdots 2$, tak platí $\Gamma(k+1)\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right) = k!\frac{(2k)!}{k!2^{2k}}\sqrt{\pi} = \frac{(2k)!}{2^{2k}}\sqrt{\pi}$ a tedy

$$J_{-1/2} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{\Gamma(k+1)\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-1/2} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{2^{2k}}{(2k)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k} =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x\,.$$

Druhý vztah se dokáže analogicky. □

Rekurentní formule uvedené v 5 spolu s vyjádřením funkcí J_0, J_1, J_{-n}, $J_{-1/2}$, $J_{1/2}$ uvedenými v 6, 3 a 7 umožňují vypočítat Besselovy funkce 1. druhu libovolného celočíselného a poločíselného řádu.

C.5.6 Věta (Nulové body Besselových funkcí celočíselného řádu)

Funkce J_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$ má jednoduché nulové body $x_{n1}, x_{n2}, x_{n3}, \ldots$ takové, že

$$0 < x_{n1} < x_{n2} < x_{n3} < \cdots\,, \quad \lim_{k\to\infty} x_{nk} = \infty$$

a posloupnost $\{x_{nk}\}_{k=1}^{\infty}$ nemá hromadné body. Funkce J_n, $n = 1, 2, \ldots$ má navíc n-násobný nulový bod $x_{n0} = 0$.

D.: Viz např. G.N.Watson, A Treatise on the Theory of Bessel Functions, Cambridge University Press, 1922, kap. XV. □

C.5.7 Věta (Orthogonalita Besselových funkcí celočíselného řádu)

Besselovy funkce J_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$ splňují pro každé $a > 0$ a všechna $k, l \in \mathbb{N}$ rovnost

$$\int_0^a \xi J_n\left(\frac{x_{nk}}{a}\xi\right) J_n\left(\frac{x_{nl}}{a}\xi\right) \mathrm{d}\xi = \begin{cases} 0, & k \neq l \\ \frac{1}{2}a^2\big(J_{n+1}(x_{nk})\big)^2, & k = l \end{cases}$$

kde x_{nk} (resp. x_{nl}) je k-tý (resp. l-tý) jednoduchý nulový bod funkce J_n.

D.: Položme $f(\xi) = J_n\left(\frac{x_{nk}}{a}\xi\right)$, $g(\xi) = J_n\left(\frac{x_{nl}}{a}\xi\right)$. Pak

$$\frac{\mathrm{d}f(\xi)}{\mathrm{d}\xi} = \frac{x_{nk}}{a}J_n'\left(\frac{x_{nk}}{a}\xi\right), \quad \frac{\mathrm{d}^2 f(\xi)}{\mathrm{d}\xi^2} = \left(\frac{x_{nk}}{a}\right)^2 J_n''\left(\frac{x_{nk}}{a}\xi\right).$$

Poněvadž J_n je řešením Besselovy rovnice (C.31), platí

$$\frac{\mathrm{d}^2 f(\xi)}{\mathrm{d}\xi^2} = \left(\frac{x_{nk}}{a}\right)^2\left(\frac{x_{nk}}{a}\xi\right)^{-2}\left(-\frac{x_{nk}}{a}\xi J_n'\left(\frac{x_{nk}}{a}\xi\right) - \left(\left(\frac{x_{nk}}{a}\xi\right)^2 - n^2\right)J_n\left(\frac{x_{nk}}{a}\xi\right)\right) =$$

$$= -\frac{1}{\xi^2}\left(\xi\frac{\mathrm{d}f(\xi)}{\mathrm{d}\xi} + \left(\left(\frac{x_{nk}}{a}\xi\right)^2 - n^2\right)f(\xi)\right),$$

tedy

$$\frac{\mathrm{d}^2 f(\xi)}{\mathrm{d}\xi^2} + \frac{1}{\xi}\frac{\mathrm{d}f(\xi)}{\mathrm{d}\xi} + \left(\left(\frac{x_{nk}}{a}\right)^2 - \frac{n^2}{\xi^2}\right)f(\xi) = 0.$$

Analogicky dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}^2 g(\xi)}{\mathrm{d}\xi^2} + \frac{1}{\xi}\frac{\mathrm{d}g(\xi)}{\mathrm{d}\xi} + \left(\left(\frac{x_{nl}}{a}\right)^2 - \frac{n^2}{\xi^2}\right)f(\xi) = 0.$$

První rovnost vynásobíme ξg, druhou vynásobíme ξf a odečteme je:

$$\xi\left(gf'' - fg''\right) + \left(gf' - fg'\right) + \xi fg\left(\left(\frac{x_{nk}}{a}\right)^2 - \left(\frac{x_{nl}}{a}\right)^2\right) = 0.$$

Po úpravě

$$\xi\left(gf''+g'f'-g'f'-fg''\right)+\left(gf'-fg'\right)+\xi fg\frac{x_{nk}^2-x_{nl}^2}{a^2}=0,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\bigl(\xi\left(gf'-fg'\right)\bigr)=\frac{x_{nl}^2-x_{nk}^2}{a^2}\xi fg.$$

Integrací poslední rovnosti v mezích od 0 do a dostaneme

$$a\bigl(g(a)f'(a)-f(a)g'(a)\bigr)=\frac{x_{nl}^2-x_{nk}^2}{a^2}\int\limits_0^a\xi f(\xi)g(\xi)\mathrm{d}\xi\,.$$

Poněvadž $f(a)=J_n\left(\frac{x_{nk}}{a}a\right)=0$ a $g(a)=J_n\left(\frac{x_{nl}}{a}a\right)=0$, platí

$$0=\frac{x_{nl}^2-x_{nk}^2}{a^2}\int\limits_0^a\xi J_n\left(\frac{x_{nk}}{a}\xi\right)J_n\left(\frac{x_{nl}}{a}\xi\right)\mathrm{d}\xi\,,$$

takže pro $k\neq l$ je dokazovaná rovnost splněna.

Poněvadž J_n splňuje Besselovu rovnici (C.31), platí pro každé $x>0$ rovnost

$$x^2J_n(x)=n^2J_n(x)-xJ_n'(x)-x^2J_n''(x).$$

Integrací per partes s využitím této rovnosti dostaneme

$$\begin{aligned}\int x\bigl(J_n(x)\bigr)^2\mathrm{d}x&=\frac12x^2\bigl(J_n(x)\bigr)^2-\int x^2J_n(x)J_n'(x)\mathrm{d}x=\\&=\frac12x^2\bigl(J_n(x)\bigr)^2-\int\Bigl(n^2J_n(x)J_n'(x)-x\bigl(J_n'(x)\bigr)^2-x^2J_n''(x)J_n'(x)\Bigr)\mathrm{d}x=\\&=\frac12x^2\bigl(J_n(x)\bigr)^2-\int\left(\frac{n^2}{2}\left[\bigl(J_n(x)\bigr)^2\right]'-\left[\frac{x^2}{2}\bigl(J_n'(x)\bigr)^2\right]'\right)\mathrm{d}x=\\&=\frac12x^2\bigl(J_n(x)\bigr)^2-\frac{n^2}{2}\bigl(J_n(x)\bigr)^2+\frac{x^2}{2}\bigl(J_n'(x)\bigr)^2=\frac{x^2}{2}\Bigl(\bigl(J_n(x)\bigr)^2+\bigl(J_n'(x)\bigr)^2\Bigr)-\frac{n^2}{2}\bigl(J_n(x)\bigr)^2.\end{aligned}$$

Podle C.5.5.5 je $\bigl(J_n(x)\bigr)^2+\bigl(J_n'(x)\bigr)^2=\bigl(J_n(x)\bigr)^2+\bigl(J_{n-1}(x)-J_{n+1}(x)\bigr)^2$ a tento výraz je podle C.5.5.2 pro x z pravého okolí nuly ohraničený. To znamená, že

$$\lim_{x\to0+}\frac{x^2}{2}\left[\bigl(J_n(x)\bigr)^2+\bigl(J_n'(x)\bigr)^2\right]=0.$$

Dále podle C.5.5.2 je také

$$\lim_{x\to0+}\frac12\bigl(nJ_n(x)\bigr)^2=0.$$

Platí tedy

$$\begin{aligned}\int\limits_0^a\xi\left[J_n\left(\frac{x_{nk}}{a}\xi\right)\right]^2\mathrm{d}\xi&=\frac{a^2}{x_{nk}^2}\int\limits_0^{x_{nk}}x\left[J_n(x)\right]^2\mathrm{d}x=\\&=\frac{a^2}{x_{nk}^2}\left[\frac{x_{nk}^2}{2}\Bigl(\bigl(J_n(x_{nk})\bigr)^2+\bigl(J_n'(x_{nk})\bigr)^2\Bigr)-\frac{n^2}{2}\bigl(J_n(x_{nk})\bigr)^2\right]=\frac{a^2}{2}\bigl(J_n'(x_{nk})\bigr)^2.\end{aligned}$$

Podle C.5.5.4 je

$$-x^{-n}J_{n+1}(x)=\bigl(x^{-n}J_n(x)\bigr)'=-\frac{n}{x^{n+1}}J_n(x)+x^{-n}J_n'(x),$$

takže $J_n'(x_{nk})=-J_{n+1}(x_{nk})$. Celkem tedy

$$\int\limits_0^a\xi\left[J_n\left(\frac{x_{nk}}{a}\xi\right)\right]^2\mathrm{d}\xi=\frac{a^2}{2}\bigl(J_{n+1}(x_{nk})\bigr)^2,$$

což je dokazovaná rovnost pro $k=l$. □

C.5.8 Věta

Nechť $\nu \in \mathbb{Z}$ a v je řešením Besselovy rovnice (C.31) lineárně nezávislé na J_ν. Pak $\left|\lim_{x\to 0+} v(x)\right| = \infty$.

D.: Označme

$$W = W(x) = W(x; J_\nu, v) = \begin{vmatrix} J_\nu(x) & v(x) \\ J'_\nu(x) & v'(x) \end{vmatrix} = J_\nu(x)v'(x) - J'_\nu(x)v(x)$$

wronskián funkcí J_ν, v. S využitím faktu, že J_ν a v jsou řešením rovnice (C.31) dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}W = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(J_\nu v' - J'_\nu v\right) = J'_\nu v' + J_\nu v'' - J''_\nu v - J'_\nu v' = J_\nu v'' - J''_\nu v =$$
$$= J_\nu \frac{(\nu^2 - x^2)v - xv'}{x^2} - v\frac{(\nu^2 - x^2)J_\nu - xJ'_\nu}{x^2} = \frac{1}{x}\left(J'_\nu v - J_\nu v'\right) = -\frac{1}{x}W.$$

Wronskián W tedy splňuje diferenciální rovnici $W' = -\frac{W}{x}$, což znamená, že

$$W(x) = \frac{C}{x},$$

kde C je nějaká nenulová konstanta (neboť funkce J_ν, v jsou nezávislé). Dále platí

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{v}{J_\nu}\right) = \frac{v'J_\nu - vJ'_\nu}{J_\nu^2} = \frac{W}{J_\nu^2} = \frac{C}{xJ_\nu^2}.$$

Buď $\alpha > 0$ libovolná konstanta. Integrací poslední rovnosti v mezích od x do α dostaneme

$$\frac{v(x)}{J_\nu(x)} = D - C\int_x^\alpha \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi\big(J_\nu(\xi)\big)^2},$$

kde $D = \dfrac{v(\alpha)}{J_\nu(\alpha)}$ je konstanta. Odtud plyne, že pro každé $x \in (0, \alpha)$ platí

$$v(x) = J_\nu(x)\left(D - C\int_x^\alpha \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi\left(J_\nu(\xi)\right)^2}\right)$$

a tedy

$$\lim_{x\to 0+} v(x) = D\lim_{x\to 0+} J_\nu(x) - C\lim_{x\to 0+} J_\nu(x)\int_x^\alpha \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi\big(J_\nu(\xi)\big)^2}. \tag{C.37}$$

Buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Položme $\eta = \begin{cases} (1+\varepsilon)^2, & \nu = 0 \\ \varepsilon^2, & \nu \in \mathbb{Z}\setminus\{0\} \end{cases}$. Pak $\eta > 0$ a podle C.5.5.2 k němu existuje $\delta > 0$ takové, že pro všechna $\xi \in (0, \delta)$ je $\big(J_\nu(\xi)\big)^2 < \eta$. Odtud plyne, že pro $x \in (0, \delta)$ platí

$$\int_x^\alpha \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi\big(J_\nu(\xi)\big)^2} = \int_x^\delta \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi\big(J_\nu(\xi)\big)^2} + \int_\delta^\alpha \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi\big(J_\nu(\xi)\big)^2} > \frac{1}{\eta}\int_x^\delta \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi} + \int_\delta^\alpha \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi\big(J_\nu(\xi)\big)^2} = \frac{1}{\eta}\ln\frac{\delta}{x} + \int_\delta^\alpha \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi\big(J_\nu(\xi)\big)^2},$$

tedy

$$\lim_{x\to 0+}\int_x^\alpha \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi\big(J_\nu(\xi)\big)^2} \geq \int_\delta^\alpha \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi\big(J_\nu(\xi)\big)^2} + \frac{1}{\eta}\lim_{x\to 0+}\ln\frac{\delta}{x} = \infty.$$

Odtud vzhledem k C.5.5.2 a (C.37) dále plyne, že pro $\nu = 0$ je

$$\lim_{x\to 0+} v(x) = (-\operatorname{sgn} C)\,\infty$$

a pro $\nu \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ podle de l'Hospitalova pravidla a podle C.5.5.5 je

$$\lim_{x\to 0+} v(x) = -C \lim_{x\to 0+} J_\nu(x) \int_x^\alpha \frac{d\xi}{\xi\big(J_\nu(\xi)\big)^2} = -C \lim_{x\to 0+} \frac{\int_x^\alpha \frac{d\xi}{\xi\left(J_\nu(\xi)\right)^2}}{\frac{1}{J_\nu(x)}} = -C \lim_{x\to 0+} \frac{-\frac{1}{x\left(J_\nu(x)\right)^2}}{-\frac{J'_\nu(x)}{\left(J_\nu(x)\right)^2}} =$$

$$= -C \lim_{x\to 0+} \frac{1}{xJ'_\nu} = -C \lim_{x\to 0+} \frac{2}{x\big(J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x)\big)}\,.$$

Podle C.5.5.2 je funkce $x \mapsto J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}$ v pravém okolí nuly ohraničená a tedy $\left|\lim_{x\to 0+} v(x)\right| = \infty$. $\square$

C.5.9 Věta

Je-li $\nu \notin \mathbb{Z}$, jsou Besselovy funkce prvního druhu J_ν a $J_{-\nu}$ řešením rovnice (C.31) a jsou lineárně nezávislé.

D.: Funkce $J_\nu,\ J_{-\nu}$ byly v C.5.2 nalezeny jako řešení rovnice (C.31). Stačí tedy ověřit tvrzení o nezávislosti.
Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že $\nu > 0$.
Wronskián funkcí $J_\nu,\ J_{-\nu}$ je

$$\begin{aligned}
W(x, J_\nu, J_{-\nu}) &= \begin{vmatrix} J_\nu(x) & J_{-\nu}(x) \\ J'_\nu(x) & J'_{-\nu}(x) \end{vmatrix} = J_\nu(x)J'_{-\nu}(x) - J_{-\nu}(x)J'_\nu(x) = \\
&= \left(\frac{x}{2}\right)^\nu u_\nu(x) \left(\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} u_{-\nu}(x)\right)' - \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} u_{-\nu}(x) \left(\left(\frac{x}{2}\right)^\nu u_\nu(x)\right)' = \\
&= \left(\frac{x}{2}\right)^\nu u_\nu(x) \left(-\frac{\nu}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu-1} u_{-\nu}(x) + \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} u'_{-\nu}(x)\right) - \\
&\quad - \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} u_{-\nu}(x) \left(\frac{\nu}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu-1} u_\nu(x) + \left(\frac{x}{2}\right)^\nu u'_\nu(x)\right) = \\
&= u_\nu(x)u'_{-\nu}(x) - u_{-\nu}(x)u'_\nu(x) - \frac{2\nu}{x}u_\nu(x)u_{-\nu}(x)\,.
\end{aligned}$$

Podle C.5.4 pro $\nu \notin \mathbb{Z}$ platí $\left|\lim_{x\to 0+} W(x, J_\nu, J_{-\nu})\right| = \infty$, což znamená, že pro nějaké $x > 0$ je $W(x, J_\nu, J_{-\nu}) \neq 0$ a tedy podle známé věty z teorie lineárních homogenních obyčejných diferenciálních rovnic funkce $J_\nu,\ J_{-\nu}$ tvoří fundamentální systém řešení rovnice (C.31). $\square$

Pro $\nu \notin \mathbb{Z}$ tedy Besselovy funkce prvního druhu J_ν a J_{-nu} tvoří fundamentální systém řešení rovnice (C.31). V případě $\nu \in \mathbb{Z}$ máme pouze jedno bázové řešení (sr. C.5.5.3).

C.5.10 Definice

Funkce Y_ν definovaná pro každé $\nu \in \mathbb{R}$ a každé $x \in (0, \infty)$ vztahem

$$Y_\nu(x) = \lim_{\xi\to\nu} \frac{J_\xi(x)\cos\pi\nu - J_{-\xi}(x)}{\sin\pi\xi}$$

se nazývá *Besselova funkce druhého druhu řádu* ν. (Někdy také *Neumannova funkce*.)

Pokud $\nu \notin \mathbb{Z}$, je jmenovatel zlomku za limitou nenulový a tedy pro $\nu \notin \mathbb{Z}$ lze psát

$$Y_\nu(x) = \frac{J_\nu(x)\cos\pi\nu - J_{-\nu}(x)}{\sin\pi\nu}\,.$$

Je-li $\nu = n \in \mathbb{Z}$, jsou čitatel i jmenovatel zlomku za limitou nulové a limitu lze tedy vypočítat podle de l'Hospitalova pravidla:

$$Y_n(x) = \frac{1}{\pi}\left(\left[\frac{\partial}{\partial\nu}J_\nu(x)\right]_{\nu=n} - (-1)^n\left[\frac{\partial}{\partial\nu}J_{-\nu}(x)\right]_{\nu=n}\right)\,.$$

C.5.11 Věta

Funkce Y_ν je řešením rovnice (C.31) pro libovolné $\nu \in \mathbb{R}$. Pro wronskián funkcí J_ν a Y_ν platí $W(x, J_\nu, Y_\nu) = \dfrac{2}{\pi x}$. (Funkce J_ν a Y_ν tedy tvoří fundamentální systém řešení rovnice (C.31).)

D.: Viz např. G.N.Watson, A Treatise on the Theory of Bessel Functions, Cambridge University Press, 1922, str. 58–76. □

C.5.12 Poznámka

Besselovy funkce druhého druhu splňují stejné vztahy, jako funkce prvního druhu:

$$
\begin{aligned}
\big(x^{-\nu} Y_\nu(x)\big)' &= -x^{-\nu} Y_{\nu+1}(x)\,,\\
\big(x^{\nu} Y_\nu(x)\big)' &= x^{\nu} Y_{\nu-1}(x)\,,\\
Y_{\nu+1}(x) &= \frac{2\nu}{x} Y_\nu(x) - Y_{\nu-1}(x)\,,\\
Y_\nu'(x) &= \frac{1}{2}\big(Y_{\nu-1}(x) - Y_{\nu+1}(x)\big)
\end{aligned}
$$

Dodatek D

Laplaceův operátor v křivočarém souřadném systému

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2},$$

podrobněji

$$\Delta u(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \Delta_{x_1, x_2, \ldots, x_n} u(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_i^2}.$$

Souřadnice $x_1, x_2, \ldots, x_n$ transformujeme na souřadnice $q_1, q_2, \ldots, q_n$. Pak je

$$\begin{aligned}
x_i &= x_i(q_1, q_2, \ldots, q_n)\,, \qquad q_i = q_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,, \\
\frac{\partial u}{\partial x_i} &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial x_i}\,, \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial x_i} \right) = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial q_j}{\partial x_i} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial q_j \partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u}{\partial q_j} \frac{\partial^2 q_j}{\partial x_i^2} \right) = \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial q_j \partial q_k} \frac{\partial q_j}{\partial x_i} \frac{\partial q_k}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial q_j} \frac{\partial^2 q_j}{\partial x_i^2}
\end{aligned}$$

pro $i = 1, 2, \ldots, n$. Tedy

$$\begin{aligned}
\Delta_{q_1, q_2, \ldots, q_n} u &= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial q_j \partial q_k} \frac{\partial q_j}{\partial x_i} \frac{\partial q_k}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial q_j} \frac{\partial^2 q_j}{\partial x_i^2} \right) = \\
&= \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial q_j \partial q_k} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial q_j}{\partial x_i} \frac{\partial q_k}{\partial x_i} \right) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial q_j} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 q_j}{\partial x_i^2} \right).
\end{aligned}$$

Speciální případy:

Polární souřadnice v rovině

$$x = r \cos\varphi,\ y = r \sin\varphi, \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2},\ \varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \frac{\pi}{2}(1 - \operatorname{sgn} x) + 2k\pi$$

V tomto případě je

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{-y}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2},$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \frac{\sqrt{x^2+y^2} - x\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} = \frac{y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}, \quad \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} = \frac{x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}},$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = y\frac{2x}{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -x\frac{2y}{x^2+y^2},$$

a dále

$$\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2 = \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = 1, \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 = \frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{1}{r^2}, \quad \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} = \frac{y^2+x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{1}{r}, \qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0.$$

Laplaceův operátor transformovaný do polárních souřadnic tedy je

$$\begin{aligned}\Delta_{r,\varphi} u \;=\; & \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\left(\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \varphi}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}\left(\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2\right) + \\ & + \frac{\partial u}{\partial r}\left(\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2}\right) + \frac{\partial u}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\right) \;=\; \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}.\end{aligned}$$

Tento výsledek můžeme zapsat ve tvaru

$$\Delta_{r,\varphi}\, u \;=\; \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}$$

Cylindrické souřadnice v trojrozměrném prostoru

$$x = r\cos\varphi,\; y = r\sin\varphi,\; z = z, \qquad r = \sqrt{x^2+y^2},\; \varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + \frac{\pi}{2}(1 - \operatorname{sgn} x) + 2k\pi,\; z = z$$

$$\Delta_{r,\varphi,z}\, u \;=\; \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

Sférické souřadnice v trojrozměrném prostoru

$$x = r\cos\varphi\cos\vartheta,\; y = r\sin\varphi\cos\vartheta,\; z = r\sin\vartheta,$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2},\; \varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + \frac{\pi}{2}(1 - \operatorname{sgn} x) + 2k\pi,\; \vartheta = \arcsin\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\Delta_{r,\varphi,\vartheta}\, u \;=\; \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\cos^2\vartheta}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2\cos\vartheta}\frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(\cos\vartheta\frac{\partial u}{\partial \vartheta}\right)$$