Lineární programování – jaro 2012 – 1. termín

1. (15 bodů) Formulujte Farkasovo lemma udávající nutnou a postačující podmínku k tomu, aby součet $P + Q$ polyedrů

$$P = \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b \,\} \quad \text{a} \quad \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid Bx = c,\ x \geq 0 \,\}$$

obsahoval nulový vektor.

2. (20 bodů) Určete funkci f vektoru proměnných z, matici F a vektor a takové, že úloha lineárního programování

$$\max \{\, f \mid zF = a,\ z \leq 1 \,\}$$

je duální k úloze

$$\min \{\, cx \mid yA = p,\ Bx = q,\ yb \leq dx \,\}.$$

Formulujte větu o dualitě pro tuto dvojici úloh.
(x je sloupcový vektor proměnných; y je řádkový vektor proměnných; A a B jsou matice; b, c, d, p a q jsou vektory; 1 značí vektor $(1, \ldots, 1)$)

3. (25 bodů) Definujte stěny polyedru $P = \{\, y \mid yA \geq c \,\}$. Formulujte větu charakterizující minimální stěny tohoto polyedru algebraicky pomocí systémů nerovnic. Uveďte nutnou a postačující podmínku k tomu, aby byly minimálními stěnami tohoto polyedru vrcholy. Formulujte a dokažte charakterizaci vrcholů polyedru P, na níž je založena duální simplexová metoda. (K důkazu můžete použít dříve formulovanou obecnou větu.) Vysvětlete, jak souvisí tato charakterizace s údaji v simplexové tabulce.

4. (30 bodů) Vytvořte simplexovou tabulku odpovídající bazické množině indexů $\{3, 1\}$ (v tomto pořadí) pro úlohu lineárního programování minimalizovat

$$x_2 + x_3 + 2x_4$$

při omezeních $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \geq 0$ a

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 - 2x_5 &= -7, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 - x_5 &= -2 \end{aligned}$$

a s touto počáteční tabulkou vyřešte úlohu primární simplexovou metodou. Po jejím vyřešení přidejte další omezení

$$2x_1 - 2x_3 - x_4 - x_5 \geq -1$$

a úlohu dořešte duální simplexovou metodou.