Lineární programování – jaro 2012 – 4. termín

1. **(15 bodů)** Nechť $\varphi, \psi \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ jsou lineární zobrazení definovaná předpisy $\varphi(x) = A \cdot x$ a $\psi(x) = B \cdot x$. Nechť dále $P = \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid Cx \leq d \,\}$ je polyedr. Formulujte Farkasovo lemma udávající nutnou a postačující podmínku k tomu, aby existoval bod polyedru P, jehož obrazy v zobrazeních φ a ψ se na žádné složce neliší o více než o 1.

2. **(20 bodů)** Určete funkci f vektoru proměnných z, matici C a vektor a takové, že úloha lineárního programování

$$\min \{\, f \mid Cz = a,\ z \leq 1 \,\}$$

je duální k úloze

$$\max \{\, dx \mid |x_1| \leq |y_1|,\ \ldots,\ |x_n| \leq |y_n|,\ cx = yb,\ y \leq 0,\ Ax \geq b,\ yB + d \leq c \,\}$$

kde $x = (x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}$ a $y = (y_1, \ldots, y_n)$ jsou vektory proměnných, b, c, d jsou konstantní vektory a A, B jsou matice. Formulujte větu o dualitě pro tuto dvojici úloh.

3. **(25 bodů)** Definujte stěny polyedru a jejich dimenzi. Formulujte větu charakterizující minimální stěny algebraicky pomocí systémů nerovnic. Určete dimenzi minimálních stěn polyedru $P = \{\, x \mid Ax = b, x \geq 0 \,\}$ a svoje tvrzení zdůvodněte. Formulujte a dokažte charakterizaci minimálních stěn polyedru P, na níž je založena simplexová metoda. (K důkazu můžete použít dříve formulovanou obecnou větu.)

4. **(30 bodů)** Mějme dvě úlohy lineárního programování:

$$\begin{array}{ll} \text{minimalizovat} & 3x - y + z \\ \text{maximalizovat} & -2x - y - z \end{array}$$

při stejných omezeních $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ a

$$\begin{aligned} 4x - y - 2z &\geq -5, \\ x - 2y - z &\leq -2, \\ x + 2y - 2z &\geq 3. \end{aligned}$$

Vyřešte jednu z těchto úloh duální simplexovou metodou a poté využijte získanou závěrečnou simplexovou tabulku k dořešení druhé úlohy primární simplexovou metodou.