Lineární programování – jaro 2014 – 1. termín

1. (15 bodů) Nechť $\varphi\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ je lineární zobrazení prostorů řádkových vektorů definované předpisem $\varphi(x) = xA$. Nechť dále $P = \{\, x \in \mathbb{R}^m \mid xB \leq a \,\}$ je polyedr a nechť α je reálné číslo. Formulujte Farkasovo lemma udávající nutnou a postačující podmínku na matice A a B, vektor a a číslo α, aby existoval v polyedru P bod takový, že všechny složky jeho φ-obrazu se liší od α nejvýše o hodnotu 1.

2. (20 bodů) Určete funkci f vektoru proměnných z, matici B a vektor a takové, že úloha lineárního programování

$$\min \{\, f \mid Bz + a \geq 0,\ z \leq 0 \,\}$$

je duální k úloze

$$\max \{\, x_1 + \cdots + x_m \mid x \geq y_1 \cdot d,\ Ax = b,\ yC \leq c,\ y_1 \geq y_2 \geq \cdots \geq y_n \,\},$$

kde $x = (x_1, \ldots, x_m)^{\mathrm{T}}$ a $y = (y_1, \ldots, y_n)$ jsou vektory proměnných, b, c, d konstantní vektory a A, C matice. Formulujte větu o dualitě pro tuto dvojici úloh.

3. (25 bodů) Formulujte algebraickou charakterizaci stěn polyedru pomocí systémů nerovnic. Charakterizujte polyedry, které nemají žádné maximální stěny. Charakterizujte minimální stěny polyedrů pomocí systémů nerovnic a tuto charakterizaci dokažte. Definujte bodovaný polyedr. Dokažte, že průnik bodovaného polyedru s libovolným polyedrem, je-li neprázdný, je bodovaný polyedr. Dejte příklad dvou bodovaných polyedrů takových, že jejich průnik má o dva vrcholy více, než mají původní polyedry dohromady.

4. (30 bodů) Mějme dvě úlohy lineárního programování:

$$\begin{array}{ll} \text{minimalizovat} & 3x - y + z \\ \text{maximalizovat} & - 2y - z \end{array}$$

při stejných omezeních $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ a

$$\begin{aligned} 4x - y - 2z &\geq -1, \\ x - 2y - z &\leq -2, \\ y - 2z &\geq 3. \end{aligned}$$

Vyřešte jednu z těchto úloh duální simplexovou metodou a poté využijte získanou závěrečnou simplexovou tabulku k dořešení druhé úlohy primární simplexovou metodou.