Lineární programování – jaro 2015 – 3. termín

1. (15 bodů) Nechť

$$P = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq a,\ x \leq 0 \} \text{ a } Q = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid Bx \geq b,\ x \geq 0 \}$$

jsou dva polyedry. Formulujte Farkasovo lemma udávající nutnou a postačující podmínku na matice A a B a vektory a a b, aby existovaly body $y \in P$ a $z \in Q$, jejichž manhattanská vzdálenost je 1.

2. (20 bodů) Určete funkci f vektoru proměnných z, matici B a vektor a takové, že úloha lineárního programování

$$\min \{ f \mid Bz + a = 0,\ z \leq 0 \}$$

je duální k úloze

$$\max \{ x_1 + \cdots + x_m \mid x \geq y_1 \cdot d,\ Ax = b,\ yC \leq c,\ y_1 \geq y_2 \geq \cdots \geq y_n \},$$

kde $x = (x_1, \ldots, x_m)^{\mathrm{T}}$ a $y = (y_1, \ldots, y_n)$ jsou vektory proměnných, b, c, d konstantní vektory a A, C matice. Formulujte větu o dualitě pro tuto dvojici úloh.

3. (25 bodů) Formulujte algebraickou charakterizaci stěn polyedru pomocí systémů nerovnic. Charakterizujte polyedry P, které lze zadat systémem nerovnic takovým, že systém všech jeho implicitních rovnic zadává stěnu polyedru P; svoje tvrzení zdůvodněte. Charakterizujte minimální stěny polyedrů pomocí systémů nerovnic a tuto charakterizaci dokažte. Dejte příklad polyedru dimenze 3, který má právě jednu omezenou maximální stěnu.

4. (30 bodů) Mějme dvě úlohy lineárního programování:

$$\begin{array}{ll} \text{maximalizovat} & x + 2y + z \\ \text{minimalizovat} & x + 2y + z \end{array}$$

při stejných omezeních $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$, $t \geq 0$ a

$$\begin{aligned} x - y + 2z - t &\leq -1, \\ 3x + y - t &\leq 1, \\ 2x - y + 3z - t &\geq 2, \\ 2x + 2y - t &\geq 8. \end{aligned}$$

Vyřešte jednu z těchto úloh duální simplexovou metodou a poté využijte získanou závěrečnou simplexovou tabulku k dořešení druhé úlohy primární simplexovou metodou.