Lineární programování – jaro 2017 – 1. termín

1. **(15 bodů)** Nechť $\varphi\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ je afinní zobrazení prostorů řádkových vektorů definované předpisem $\varphi(x) = xA + u$. Nechť dále C je konvexní kužel generovaný vektory $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^m$ a nechť α je kladné reálné číslo. Formulujte Farkasovo lemma udávající nutnou a postačující podmínku na matici A, vektory u, v_1, …, v_k a číslo α, aby existoval v kuželu C bod takový, že se každá složka jeho φ-obrazu liší od 1 nejvýše o hodnotu α.

2. **(20 bodů)** Určete funkci f vektoru proměnných z, matici F a vektor a takové, že úloha lineárního programování

$$\max\{\, f \mid zF = a,\ z \leq 1 \,\}$$

je duální k úloze

$$\min\{\, cx \mid (y+1)A = p,\ Bx \geq q,\ yb \leq dx \,\}.$$

Formulujte větu o dualitě pro tuto dvojici úloh.
(x je sloupcový vektor proměnných; y je řádkový vektor proměnných; A a B jsou matice; b, c, d, p a q jsou vektory; 1 značí vektor $(1, \ldots, 1)$)

3. **(25 bodů)** Definujte dimenzi polyedru. Charakterizujte maximální stěny polyedrů algebraicky pomocí systémů nerovnic a tuto charakterizaci dokažte. Uveďte, jak je možné pomocí lineárního programování určit, zda je nerovnice v systému nadbytečná. Dejte příklad systému nerovnic zadávajícího polyedr v prostoru dimenze 3, který má jedinou maximální stěnu dimenze 1.

4. **(30 bodů)** Vytvořte simplexovou tabulku odpovídající bazické množině indexů $\{3, 1, 2\}$ (v tomto pořadí) pro úlohu lineárního programování maximalizovat

$$x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 + 2x_5$$

při omezeních $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \geq 0$ a

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 3 &= x_3 + x_4 + 2x_5, \\ x_1 + 2x_4 + 5 &= x_3 + 2x_5, \\ x_2 + 2x_3 + x_4 &= 13 \end{aligned}$$

a s touto počáteční tabulkou vyřešte úlohu primární simplexovou metodou. Po jejím vyřešení přidejte další omezení

$$x_4 + 1 \geq x_1 + 2x_2 + 3x_3$$

a úlohu dořešte duální simplexovou metodou.