Lineární programování – jaro 2017 – 3. termín

1. (15 bodů) Formulujte Farkasovo lemma udávající nutnou a postačující podmínku na řádkové vektory $a^1, \dots, a^k, b^1, \dots, b^\ell \in \mathbb{R}^n$, aby polytop generovaný body $a^1, \dots, a^k$ obsahoval bod u, konvexní kužel generovaný vektory $b^1, \dots, b^\ell$ obsahoval bod v a přitom tyto body splňovaly podmínku, že každá složka v je alespoň o 1 větší než největší složka u.

2. (20 bodů) Určete funkci f vektoru proměnných z, matici B a vektor a takové, že úloha lineárního programování

$$\min \{ f \mid Bz + a = 0,\ z \le 0 \}$$

je duální k úloze

$$\max \{ x_1 + \cdots + x_m \mid x \le y_1 \cdot d,\ Ax = b,\ yC \ge c,\ |x_1| + |x_2| \le 1 \},$$

kde $x = (x_1, \dots, x_m)^{\mathrm{T}}$ a $y = (y_1, \dots, y_n)$ jsou vektory proměnných, b, c, d konstantní vektory a A, C matice. Formulujte větu o dualitě pro tuto dvojici úloh.

3. (25 bodů) Definujte polyedry a polytopy a uveďte, jaký je mezi těmito pojmy vztah. Zdůvodněte, že každý neprázdný polytop je bodovaný. Popište konstrukci, která z polytopů a polyedrálních kuželů vytvoří právě všechny polyedry. Dokažte, že každý polyedr je opravdu možné touto konstrukcí získat. V souladu s definicí polyedru dejte příklad nebodovaného polyedru takového, že nejmenší počet vrcholů příslušného polytopu je 3. Dokažte, že každý polyedrální kužel má nejmenší stěnu.

4. (30 bodů) Mějme dvě úlohy lineárního programování:

$$\begin{aligned} &\text{minimalizovat} && 3x - y + z \\ &\text{maximalizovat} && -2y - z \end{aligned}$$

při stejných omezeních $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$ a

$$\begin{aligned} 4x - y - 2z &\ge -1, \\ x - 2y - z &\le -2, \\ y - 2z &\ge 3. \end{aligned}$$

Vyřešte jednu z těchto úloh duální simplexovou metodou a poté využijte získanou závěrečnou simplexovou tabulku k dořešení druhé úlohy primární simplexovou metodou.