První cvičení – matice lineárního zobrazení, matice přechodu

Úloha 1. *Je dáno zobrazení π a lineární zobrazení φ, ψ, τ:*

- $\pi : V_3 \to V_2$
  $\pi((x_1, x_2, x_3)) = (2x_1 + x_2, x_2 - x_3)$;
- $\varphi : V_3 \to V_3$
  $\varphi((1,0,0)) = (2,-1,3)$
  $\varphi((0,1,0)) = (-1,2,0)$
  $\varphi((0,0,1)) = (0,2,-1)$;
- $\psi : V_3 \to V_3$
  $\psi((2,2,-1)) = (2,-1,3)$
  $\psi((1,0,1)) = (-1,2,0)$
  $\psi((4,2,0)) = (0,3,3)$;
- $\tau : V_2 \to V_3$
  $\tau((2,1)) = (0,0,0)$
  $\tau((3,2)) = (1,3,-1)$.

Ukažte, že je π lineární zobrazení vektorových prostorů. Určete všem zobrazením matici (vůči standardním bázím), jádro, obraz a hodnost.

Úloha 2. *Nalezněte matici přechodu od báze $\mathcal{U}$ k bázi $\mathcal{V}$ ve V_3, je-li:*

(a) $\mathcal{U} = \langle (1,0,0); (0,1,0); (0,0,1) \rangle$;
$\mathcal{V} = \langle (2,-1,3); (-1,2,0); (0,2,-1) \rangle$

(b) $\mathcal{U} = \langle (2,-1,3); (-1,2,0); (0,2,-1) \rangle$;
$\mathcal{V} = \langle (7,2,10); (-5,1,0); (-1,2,0) \rangle$

Úloha 3. *Ve V_3 je dána báze $\mathcal{B} = \langle (-2,1,1); (3,-1,2); (3,2,-1) \rangle$ a ve V_2 je dána báze $\mathcal{C} = \langle (1,3); (1,4) \rangle$. Vyjádřete matici zobrazení π (z první úlohy) vzhledem k bázím $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$.*

Řešení

1.
   - $A_\pi = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; $\operatorname{Ker}\pi = L((1,-2,-2))$; $\operatorname{Im}\pi = V_2$; $h(\pi) = 2$
   - $A_\varphi = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; $\operatorname{Ker}\varphi = (0,0,0)$; $\operatorname{Im}\varphi = V_3$; $h(\varphi) = 3$
   - $A_\psi = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -\frac{5}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix}$; $\operatorname{Ker}\psi = L((0,0,1))$; $\operatorname{Im}\psi = L((-1,2,0);(4,-5,3))$; $h(\psi) = 2$
   - $A_\tau = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$; $\operatorname{Ker}\tau = L((2,1))$; $\operatorname{Im}\tau = L((1,3,-1))$; $h(\tau) = 1$

2. (a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

   (b) $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

3. $A_\pi = \begin{pmatrix} -12 & 23 & 29 \\ 9 & -18 & -21 \end{pmatrix}$