Druhé cvičení – invariantní podprostory lineární transformace

Úloha 1. *Určete charakteristický polynom a nalezněte vlastní čísla a vlastní vektory příslušné lineární transformaci $\varphi : V_3 \to V_3$ zadané maticí A_φ (vzhledem ke standardní bázi). Nalezněte bázi, ve které bude mít matice „co možná nejjednodušší“ (tj. horní trojúhelníkový, nebo diagonální tvar) a matici ztransformujte.*

(a) $A_\varphi = \begin{pmatrix} 4 & -12 & -5 \\ 1 & -9 & -5 \\ -2 & 12 & 7 \end{pmatrix}$

(b) $A_\varphi = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ -6 & 4 & 2 \\ -6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

(c) $A_\varphi = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 3 \\ 6 & -13 & 6 \\ 12 & -24 & 11 \end{pmatrix}$

(d) $A_\varphi = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -6 & -3 & 4 \\ -8 & -10 & 9 \end{pmatrix}$

(e) $A_\varphi = \begin{pmatrix} -10 & 4 & 5 \\ -8 & 3 & 4 \\ -13 & 6 & 6 \end{pmatrix}$

Řešení

(a) $\lambda^3 - 2\lambda^2 - 9\lambda + 18$
$\lambda_1 = -3, \mathbf{u}_1 = (1, 1, -1)$
$\lambda_2 = 2, \mathbf{u}_2 = (1, 1, -2)$
$\lambda_3 = 3, \mathbf{u}_3 = (2, 1, -2)$
Bázi tvoří vektory $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$, matice má pak tvar
$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(b) $\lambda^3 - 4\lambda^2 + 4\lambda$
$\lambda_{1,2} = 2, \mathbf{u}_1 = (1, 3, 0), \mathbf{u}_2 = (0, -1, 1)$
$\lambda_3 = 0, \mathbf{u}_3 = (1, 1, 1)$
Bázi tvoří vektory $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$, matice má pak tvar
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(c) $\lambda^3 - 3\lambda - 2$
$\lambda_{1,2} = -1, \mathbf{u}_1 = (-1, 0, 1), \mathbf{u}_2 = (2, 1, 0)$
$\lambda_3 = 2, \mathbf{u}_3 = (1, 2, 4)$
Bázi tvoří vektory $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$, matice má pak tvar
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(d) $\lambda^3 - 4\lambda^2 + 9\lambda - 10$
$\lambda_{1,2} = 1 \pm 2\mathrm{i}, \mathbf{w}_{1,2} = \mathbf{v}_1 \pm \mathrm{i}\mathbf{v}_2 = (1, 2, 3) \pm \mathrm{i}(0, 1, 2)$
$\lambda_3 = 2, \mathbf{u}_1 = (1, 2, 4)$
Bázi tvoří vektory $\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$, matice má pak tvar
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

(e) $\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 1$
$\lambda_{1,2} = \pm\mathrm{i}, \mathbf{w}_{1,2} = \mathbf{v}_1 \pm \mathrm{i}\mathbf{v}_2 = (5, 4, 7) \pm \mathrm{i}(-1, 0, -1)$
$\lambda_3 = -1, \mathbf{u}_1 = (1, 1, 1)$
Bázi tvoří vektory $\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$, matice má pak tvar
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$