Čtvrté cvičení – afinní transformace

Úloha 1. *Jsou dána afinní zobrazení f, g:*

- $f: \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -3 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix};$
- $g: \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$

Dokažte, že jsou f a g afinní transformace. Určete rovnice zobrazení $f \circ g$, $g \circ f$, f^{-1} a g^{-1}. U všech zobrazení spočítejte modul a určete, zda se jedná o přímou nebo nepřímou afinitu.

Úloha 2. *Určete samodružné body, vlastní čísla a vlastní vektory následujících afinit. Určete, zda se v jednotlivých případech jedná o základní afinitu nebo involuci:*

(a) $f: \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 4 \\ -4 & 1 & 4 \\ -4 & -2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

(b) $g: \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$

(c) $h: \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ -9 & -2 & -6 \\ -3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$

Úloha 3. *Určete rovnice základní afinity $f: \mathcal{A}_2 \to \mathcal{A}_2$ (resp. $g: \mathcal{A}_3 \to \mathcal{A}_3$) dané přímkou p (resp. rovinou ϱ) a dvojicí bodů A, A'.*

f : $A[1, 3]$;
$A'[-5, 3]$;
$p: X = [t, -7 + 4t]$

g : $A[2, 1, 1]$;
$A'[0, 0, 0]$;
$\varrho: y - 2 = 0$

Řešení

1.
   - $m(f) = 1$ (přímá afinita); $m(g) = -2$ (nepřímá afinita).
   - $f \circ g : \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 6 & -4 \\ 13 & -6 & 10 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 11 \\ -10 \\ -3 \end{pmatrix}$, $m(f \circ g) = -2$ (nepřímá afinita)
   - $g \circ f : \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 1 & 9 \\ 2 & 1 & -1 \\ 5 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $m(g \circ f) = -2$ (nepřímá afinita)
   - $f^{-1} : \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$; $m(f) = 1$ (přímá afinita)
   - $g^{-1} : \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{7}{2} & -1 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$; $m(g) = -\frac{1}{2}$ (nepřímá afinita)

2. (a) $X = [t, -\frac{1}{2} + t, t]$
   $\lambda^3 - 7\lambda^2 + 15\lambda - 9$
   $\lambda_{1,2} = 3, \mathbf{u}_1 = (0, 2, 1), \mathbf{u}_2 = (1, -2, 0)$
   $\lambda_3 = 1, \mathbf{u}_3 = (1, 1, 1)$
   není involucí ani zákl. afinitou

   (b) $\varrho_X : x + y + z - 6 = 0$
   $\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1$
   $\lambda_{1,2} = 1, \mathbf{u}_1 = (-1, 1, 0), \mathbf{u}_2 = (-1, 0, 1)$
   $\lambda_3 = -1, \mathbf{u}_3 = (1, 1, 1)$
   je involucí a zákl. afinitou

   (c) $\varrho_X : 3x + y + 2z + 3 = 0$
   $\lambda^3 + 5\lambda^2 - 13\lambda + 7$
   $\lambda_{1,2} = 1, \mathbf{u}_1 = (1, -3, 0), \mathbf{u}_2 = (0, -2, 1)$
   $\lambda_3 = -7, \mathbf{u}_3 = (1, 3, 1)$
   není involucí, je zákl. afinitou

3. $f : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \end{pmatrix}$

   $g : \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$