Lineárne štatistické modely II

Modely analýzy rozptylu

Stanislav Katina[1]

[1]Ústav matematiky a statistiky
Přírodovědecká fakulta
Masarykova univerzita

jarný semester 2017
Verzia 12. apríla 2017

Asymptotické testy o stredných hodnotách

Homogenita a nehomogenita rozptylov

Nech $Y_{ji} \sim N(\mu_j, \sigma_j^2)$, kde $j = 1, 2, \ldots, J$ a $i = 1, 2, \ldots, n_j$, sú nezávislé náhodné premenné. Budeme rozlišovať dve situácie

1. $Y_{ji} \sim N(\mu_j, \sigma_j^2)$, kde $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \ldots = \sigma_J^2 = \sigma_e^2$ (**homogenita rozptylov**), σ_j^2 sú neznáme a
2. $Y_{ji} \sim N(\mu_j, \sigma_j^2)$, kde existuje aspoň jedna dvojica $i \neq j$ taká, že $\sigma_i^2 \neq \sigma_j^2$ (**nehomogenita rozptylov**), σ_j^2 sú neznáme.

Asymptotické testy o stredných hodnotách

Jednofaktorový ANOVA model s fixnými efektami pri rovnakých rozptyloch

Nech $Y_{ji} \sim N(\mu_j, \sigma_j^2)$, kde $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \ldots = \sigma_J^2 = \sigma_e^2$ a zároveň σ_j^2 sú neznáme. Majme **jednofaktorový model analýzy rozptylu (ANOVA) s fixnými (pevnými) efektami**, ozn. $\mathcal{F}_{H_1}$, definovaný ako

$$Y_{ji} = \mu_j + \varepsilon_{ji} = \mu + \alpha_j + \varepsilon_{ji},$$

kde $\mu = \sum_{j=1}^{J} \mu_j / J$, $\mu_j = \mu + \alpha_j$, $\sum_{j=1}^{J} n_j \alpha_j = 0$ (**podmienka identifikovateľnosti** zaručuje odhadnuteľnosť μ a α_j), μ je **celková (spoločná) úroveň spoločná všetkým populáciám** (alebo **celková stredná hodnota**), α_j je ***j*-ta úroveň faktora *A*** (***j*-ty efekt faktora *A***) a znamená odchýlku strednej hodnoty j-tej populácie od μ. Pre iid chyby ε_{ji} platí $\varepsilon_{ji} \sim N\left(0, \sigma_e^2\right)$. Model $Y_{ji} \sim N(\mu + \alpha_j, \sigma_e^2)$ sa nazýva aj **model podmieneného normálneho rozdelenia**.
Majme dvojicu hypotéz H_0: $\mu_1 = \mu_2 = ... = \mu_J = \mu$ oproti H_1: existuje aspoň jedno $i < j$ také, že $\mu_i \neq \mu_j$ ($i = 1, 2, \ldots, J-1$; $j = 1, 2, \ldots, J$).
Ak H_0 platí, potom $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_J = 0$, dostaneme submodel, ozn. $\mathcal{F}_{H_0}$, definovaný ako

$$Y_{ji} = \mu + \varepsilon_{ji}.$$

Asymptotické testy o stredných hodnotách

Jednofaktorový ANOVA model s fixnými efektami pri rovnakých rozptyloch

Ak H_0 platí,

$$F_W = \frac{\frac{SS_A}{df_A}}{\frac{SS_e}{df_e}} \overset{\mathcal{D}}{\sim} F_{df_A, df_e},$$

kde $df_A = J - 1$, $df_e = (n-1) - (J-1) = n - J$ sú stupne voľnosti, $n = \sum_{j=1}^{J} n_j$ je celkový rozsah, n_j sú rozsahy jednotlivých výberov.
Nech $\widehat{\mu} = \overline{Y}_{..} = Y_{..}/n$ je maximálne vierohodný odhad μ, $Y_{..} = \sum_{j=1}^{J} \sum_{i=1}^{n_j} Y_{ji}$, $\widehat{\mu}_j = \overline{Y}_{j.} = Y_{j.}/n$ je maximálne vierohodný odhad μ_j, $Y_{j.} = \sum_{i=1}^{n_j} Y_{ji}$, $\widehat{\alpha}_j = \overline{Y}_{j.} - \overline{Y}_{..}$. Ak máme vyvážené triedenie, podmienka identifikovateľnosti $\sum_{j=1}^{J} n_j \alpha_j = 0$ sa redukuje na $\sum_{j=1}^{J} \alpha_j = 0$.

SS_A je **výberový súčet štvorcov rozdielov medzi súbormi** a je definovaný ako

$$SS_A = \sum_{j=1}^{J} n_j \left(\overline{Y}_{j.} - \overline{Y}_{..}\right)^2 = \sum_{j=1}^{J} \frac{Y_{j.}^2}{n_j} - \frac{1}{n} Y_{..}^2.$$

SS_e je **výberový súčet štvorcov rozdielov vnútri súborov** a je definovaný ako

$$SS_e = \sum_{j=1}^{J}\sum_{i=1}^{n_j}\left(Y_{ji} - \overline{Y}_{j.}\right)^2 = \sum_{j=1}^{J}\sum_{i=1}^{n_j} Y_{ji}^2 - \sum_{j=1}^{J}\frac{Y_{j.}^2}{n_j}.$$

Súčet SS_A a SS_e sa rovná SS_T, čo je **celkový výberový súčet štvorcov rozdielov** a je definovaný ako

$$SS_T = \sum_{j=1}^{J}\sum_{i=1}^{n_j}\left(Y_{ji} - \overline{Y}_{..}\right)^2 = \sum_{j=1}^{J}\sum_{i=1}^{n_j} Y_{ji}^2 - \frac{1}{n}Y_{..}^2,$$

Rovnosti $SS_T = SS_A + SS_e$ hovoríme aj *rozklad celkovej sumy štvorcov*. Pre stupne voľnosti potom platí $df_T = df_A + df_e$, kde $df_T = n-1, df_A = J-1, df_e = n-J$.

Sumy štvorcov sa najčastejšie zapisujú do **ANOVA tabuľky**:

zdroj variability	suma štvorcov	df	priemerné štvorce
medzi súbormi	$SS_{A,\mathrm{obs}}$	df_A	$MS_{A,\mathrm{obs}} = SS_{A,\mathrm{obs}}/df_A$
vnútri súborov	$SS_{e,\mathrm{obs}}$	df_e	$MS_{e,\mathrm{obs}} = SS_{e,\mathrm{obs}}/df_e$
celkovo	$SS_{T,\mathrm{obs}}$	df_T	

$$MS_{e,\mathrm{obs}} = \widehat{\sigma}_e^2 = s^2$$

F_W sa nazýva **Fisherova testovacia štatistika** (alebo **ANOVA F-štatistika**) a test **viacvýberový F-test o rovnosti stredných hodnôt** $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_J$ (alebo **ANOVA F-test**). Realizáciou F_W je F_{obs} a p-hodnota = $\Pr(F_W \geq F_{\mathrm{obs}}|H_0)$.

Interpretácia: Úlohu môžeme interpretovať tak, že stredná hodnota μ_j náhodnej veličiny Y_{ji} závisí na **faktore** A, čo je premenná v nominálnej škále. Jednotlivým **úrovniam** (hladinám) tejto premennej zodpovedajú **fixné efekty** $\alpha_j = \mu_j - \mu$. Úrovne premennej volí experimentátor, sú teda nenáhodné, dopredu dané (fixné). Potom chápeme α_j ako neznáme parametre, ktorých maximálne vierohodné odhady definujeme ako $\widehat{\alpha}_j = \overline{y}_{j.} - \overline{y}_{..}$. Samotné rozhodovanie o H_0 bude založené na porovnaní priemerných súm štvorcov $SS_{A,\mathrm{obs}}/df_A$ a $SS_{e,\mathrm{obs}}/df_e$. Väčšie rozdiely $\overline{y}_{j.}$ a $\overline{y}_{..}$ (v absolútnej hodnote) sa prejavia vo väčšej hodnote štatistiky $SS_{A,\mathrm{obs}}$. Štatistika $SS_{e,\mathrm{obs}}$ zasa umožňuje odhadnúť rozptyl σ_e^2 a súčasne dáva mieru pre hodnotenie veľkosti variability medzi súbormi.

Modely $\mathcal{F}_{H_1}$ a $\mathcal{F}_{H_0}$ sú lineárnymi regresnými modelmi a môžeme ich všeobecne zapísať v tvare $\mathbf{Y} = \mathbf{X}\beta + \varepsilon$, kde $\mathbf{Y}$ je n-rozmerný náhodný vektor, $\mathbf{X}$ je **matica plánu** s rozmermi $n \times (J+1)$ a ε je n-rozmerný **vektor chýb**. Potom model $\mathcal{F}_{H_1}$ bude mať tvar

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_1 \\ \mathbf{Y}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{Y}_J \end{pmatrix} = \mathbf{X}\beta + \varepsilon = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{n_1} & \mathbf{1}_{n_1} & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{0} \\ \mathbf{1}_{n_2} & \mathbf{0} & \mathbf{1}_{n_2} & \ldots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ \mathbf{1}_{n_J} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{1}_{n_J} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_J \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_J \end{pmatrix},$$

kde $\mathbf{Y}_j = (Y_{j1}, Y_{j2}, \ldots, Y_{jn_j})^T$ je n_j-rozmerný vektor, $\mathbf{1}_{n_j}$ je n_j-rozmerný vektor jednotiek a ε_j je n_j-rozmerný vektor chýb. Potom $\mathbf{Y}_j \sim N_{n_j}(\beta_j \mathbf{1}_{n_j}, \sigma_e^2 \mathbf{I}_{n_j \times n_j})$, vektor chýb $\varepsilon_j \sim N_{n_j}(\mathbf{0}_{n_j}, \sigma_e^2 \mathbf{I}_{n_j \times n_j})$, vektor parametrov $\widehat{\beta} \sim N_{J+1}(\beta, \sigma_e^2(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^-)$, kde maximálne vierohodný odhad $\widehat{\beta}$ vypočítame pomocou **metódy najmenších štvorcov**, t.j. $\widehat{\beta} = (\mathbf{X}^T\mathbf{X})^-\mathbf{X}^T\mathbf{Y}$. Ďalej, ak nebude uvedené inak, $\mathbf{X}$ bude **matica plánu** s rozmermi $n \times J$ (teda pôvodná matica $\mathbf{X}$ bez prvého stĺpca).

Model $\mathcal{F}_{H_0}$ bude mať tvar

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_1 \\ \mathbf{Y}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{Y}_J \end{pmatrix} = \mathbf{X}\beta + \varepsilon = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{n_1} \\ \mathbf{1}_{n_2} \\ \vdots \\ \mathbf{1}_{n_J} \end{pmatrix} \mu + \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_J \end{pmatrix}.$$

Argumenty (vstupy) funkcie `aov()`:

1. ANOVA model `formula` v podobe `y~x`;
2. dátová tabuľka `data`;
3. nastavenie výstupu v podobe tabuľky s rozmermi $n \times 3$ obsahujúcej odhady $\widehat{\mu}$, $\widehat{\alpha}_j$ a reziduály (chyby) ε_{ji}, `projections=FALSE` (prednastavené);.

Výstupy funkcie `aov()`:

1. tabuľky s rozmermi $n \times 3$ obsahujúca odhady $\widehat{\mu}$, $\widehat{\alpha}_j$ a reziduály ε_{ji}, `projections`;
2. odhady $\widehat{y}_{ji}$ `fitted.values`;
3. reziduály ε_{ji} `residuals`.

Výstupy funkcie `summary(aov())`:

1. ANOVA tabuľka, kde
   - stupne voľnosti df_A a df_e `summary(MODEL)[[1]][,1]`,
   - sumy štvorcov $SS_{A,\text{obs}}$ a $SS_{e,\text{obs}}$ `summary(MODEL)[[1]][,2]`,
   - priemerné štvorce $MS_{A,\text{obs}}$ a $MS_{e,\text{obs}}$ `summary(MODEL)[[1]][,3]`;
2. realizáciu testovacej štatistiky F_{obs} `summary(MODEL)[[1]][1,4]`;
3. p-hodnota `summary(aov())[[1]][1,5]`.

Funkcia `aov()` používa na výpočty funkciu lineárny regresný model `lm()`. Pri priamom použití fukcie `lm()` dostaneme ANOVA tabuľku ako `anova(lm())`. Odmocninu z rozptylu $\widehat{\sigma}^2_e$ dostaneme pomocou `summary(lm())$sig`. Alternatívne je možné použiť funkciu `oneway.test()`, ktorej vstupom je ANOVA model `formula` v podobe `y~x`, dátová tabuľka `data` a nastavenie rovnosti rozptylov `var.equal=TRUE`. Výstupom sú realizácia testovacej štatistiky F_{obs}, stupne voľnosti df_A a df_e a p-hodnota.

Príklad (ANOVA F-test)

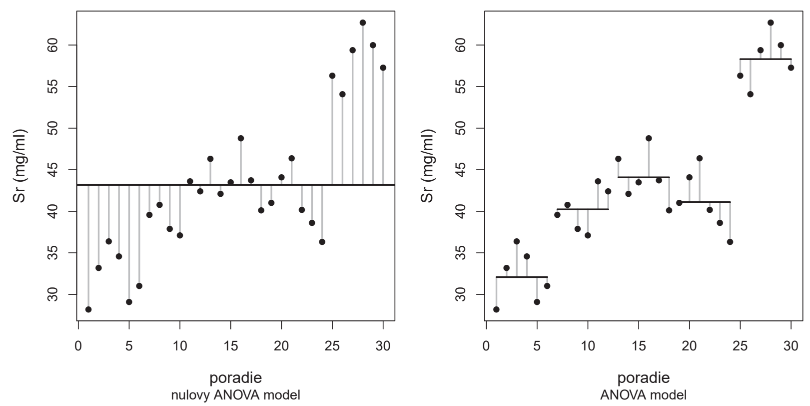
Majme koncentráciu stroncia Sr (mg/ml) v piatich vodných celkoch (pozri tabuľku). Otestujte rovnosť stredných hodnôt ANOVA F-testom pomocou funkcií (1) `aov()` (2) `oneway.test()` a (3) `lm()`.

Tabuľka: Koncentrácia stroncia Sr (mg/ml) v piatich vodných celkoch

A (1)	B (2)	C (3)	D (4)	E (5)
28.2	39.6	46.3	41.0	56.3
33.2	40.8	42.1	44.1	54.1
36.4	37.9	43.5	46.4	59.4
34.6	37.1	48.8	40.2	62.7
29.1	43.6	43.7	38.6	60.0
31.0	42.4	40.1	36.3	57.3

Asymptotické testy o stredných hodnotách

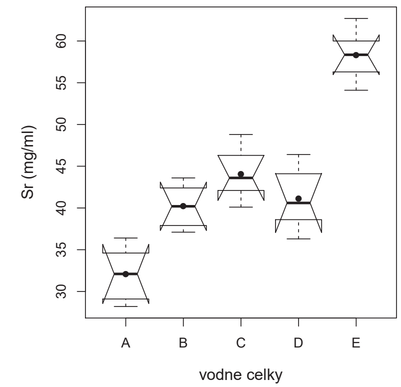
ANOVA model v R



Obr.: Rozptylové grafy ANOVA modelov – $\mathcal{F}_{H_0}$ (vľavo) a $\mathcal{F}_{H_1}$ (vpravo)

Asymptotické testy o stredných hodnotách

ANOVA model v R, funkcia `boxplot()`



Obr.: Krabicové diagramy pre ANOVA model $\mathcal{F}_{H_1}$

Asymptotické testy o stredných hodnotách

ANOVA model v R

Celkový aritmetický priemer je rovný $\overline{y} = 43.16$. Aritmetické priemery koncentrácií Sr v jednotlivých vodných celkoch sú nasledovné: $\overline{y}_{1.} = 32.08$, $\overline{y}_{2.} = 40.23$, $\overline{y}_{3.} = 44.08$, $\overline{y}_{4.} = 41.10$ a $\overline{y}_{5.} = 58.30$, pre $n_j = 6$, $j = 1, 2, \ldots, 6$. Centrované aritmetické priemery sú rovné – $\overline{y}_{1.} - \overline{y} = -11.08$, $\overline{y}_{2.} - \overline{y} = -2.93$, $\overline{y}_{3.} - \overline{y} = 0.92$, $\overline{y}_{4.} - \overline{y} = -2.06$ a $\overline{y}_{5.} - \overline{y} = 15.14$. Pre aritmetické priemery platí $\overline{y}_{1.} < \overline{y}_{2.} < \overline{y}_{4.} < \overline{y}_{3.} < \overline{y}_{5.}$. ANOVA tabuľka je nasledovná

zdroj variability	suma štvorcov	*df*	priemerné štvorce
medzi súbormi	$SS_{A,\mathrm{obs}} \doteq 2193.442$	$J - 1 = 4$	$MS_{A,\mathrm{obs}} \doteq 548.361$
vnútri súborov	$SS_{e,\mathrm{obs}} \doteq 244.130$	$n - J = 25$	$MS_{e,\mathrm{obs}} \doteq 9.765$
celkovo	$SS_{T,\mathrm{obs}} \doteq 2437.572$	$n - 1 = 29$	

Z ANOVA tabuľky vypočítame $F_W \doteq 56.2$, čo je väčšie ako $F_{J-1,n-J}(\alpha) = F_{4,25}(0.05) \doteq 2.76$ (p-hodnota $\ll 0.05$), t.j. H_0 zamietame na $\alpha = 0.05$.

Príklad (ANOVA *F*-test)

Majme koncentráciu stroncia Sr (mg/ml) v piatich vodných celkoch. Otestujte rovnosť stredných hodnôt ANOVA *F*-testom pomocou funkcií (1) `aov()` (2) `oneway.test()` a (3) `lm()`.

Asymptotické testy o stredných hodnotách

ANOVA model v R

```
K <- 6
J <- 5
VodCelk <- factor(rep(LETTERS[1:J],rep(K,J)))
ConcStr.1 <- c(28.2,33.2,36.4,34.6,29.1,31.0)
ConcStr.2 <- c(39.6,40.8,37.9,37.1,43.6,42.4)
ConcStr.3 <- c(46.3,42.1,43.5,48.8,43.7,40.1)
ConcStr.4 <- c(41.0,44.1,46.4,40.2,38.6,36.3)
ConcStr.5 <- c(56.3,54.1,59.4,62.7,60.0,57.3)
ConcStr <- c(ConcStr.1,ConcStr.2,ConcStr.3,ConcStr.4,ConcStr.5)
mean(ConcStr) # 43.16
PRIEM.ConcStr <- tapply(ConcStr,VodCelk,mean)
round(PRIEM.ConcStr,2)
#    A     B     C     D     E
#32.08 40.23 44.08 41.10 58.30
PRIEM.str <- tapply(ConcStr-mean(ConcStr),VodCelk,mean)
round(PRIEM.str,2)
#      A      B      C      D      E
# -11.08  -2.93   0.92  -2.06  15.14
```

```r
StrMOD01 <- aov(ConcStr~VodCelk)
summary(StrMOD01) # ANOVA tabulka
#             Df  Sum Sq Mean Sq F value    Pr(>F)
# VodCelk      4 2193.44  548.36  56.155 3.948e-12 ***
# Residuals   25  244.13    9.77
oneway.test(ConcStr~VodCelk,var.equal=TRUE) # vysl ANOVA F-testu
#        One-way analysis of means
# data:  ConcStr and VodCelk
# F = 56.1546, num df = 4, denom df = 25, p-value = 3.948e-12
## identicky ako
StrMOD02 <- lm(ConcStr~VodCelk)
anova(StrMOD02) # ANOVA tabulka
# Analysis of Variance Table
# Response: ConcStr
#          Df  Sum Sq Mean Sq F value    Pr(>F)
# VodCelk    4 2193.44  548.36  56.155 3.948e-12 ***
```



```r
summary(StrMOD02) # vysledky ANOVA F-testu
# Residuals:
#     Min      1Q  Median      3Q     Max
# -4.8000 -2.2500 -0.4833  2.2042  5.3000
#Coefficients:
#            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
#(Intercept)   32.083      1.276  25.149  < 2e-16 ***
#VodCelkB       8.150      1.804   4.517  0.00013 ***
#VodCelkC      12.000      1.804   6.651 5.72e-07 ***
#VodCelkD       9.017      1.804   4.998 3.75e-05 ***
#VodCelkE      26.217      1.804  14.531 1.07e-13 ***
#Residual standard error: 3.125 on 25 degrees of freedom
#Multiple R-squared:  0.8998,    Adjusted R-squared:  0.8838
#F-statistic: 56.15 on 4 and 25 DF,  p-value: 3.948e-12
```


Pozor, týmto spôsobom dostaneme inú F-štatistiku a teda aj inú p-hodnotu !

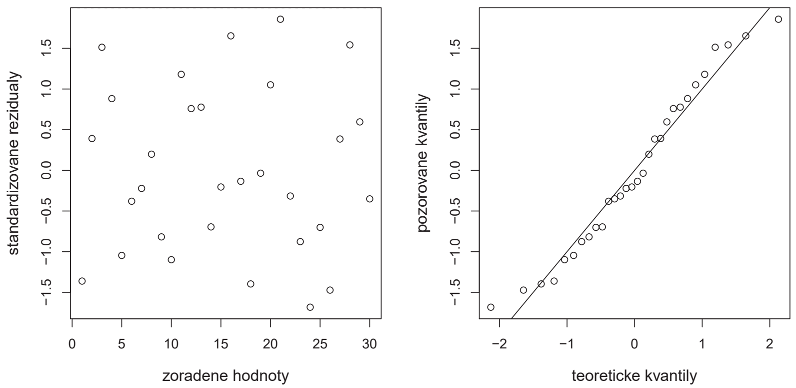
```r
StrMOD03 <- lm(ConcStr-mean(ConcStr)~VodCelk-1)
summary(StrMOD03)
# Residuals:
#     Min      1Q  Median      3Q     Max
# -4.8000 -2.2500 -0.4833  2.2042  5.3000
# Coefficients:
#          Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
# VodCelkA -11.0767     1.2757  -8.682 5.12e-09 ***
# VodCelkB  -2.9267     1.2757  -2.294   0.0305 *
# VodCelkC   0.9233     1.2757   0.724   0.4759
# VodCelkD  -2.0600     1.2757  -1.615   0.1189
# VodCelkE  15.1400     1.2757  11.868 9.11e-12 ***
# Residual standard error: 3.125 on 25 degrees of freedom
# Multiple R-Squared: 0.8998,     Adjusted R-squared: 0.8798
# F-statistic: 44.92 on 5 and 25 DF,  p-value: 1.068e-11
(summary(StrMOD03)$sig)^2 # 9.7652; MSe
summary(StrMOD03)$coef # efekty faktora VodCelk (cela tabulka)
sqrt((summary(StrMOD03)$sig)^2/K) # 1.27575; odmocnina z (MSe/K)
2*pt(summary(StrMOD03)$coeff[2,3],df=K*J-J) # 0.03046675
2*pt(-2.294,df=K*J-J) # 0.03046675
```



```r
anova(StrMOD03) # ANOVA tabulka
#Analysis of Variance Table
#Response: ConcStr - mean(ConcStr)
#          Df  Sum Sq Mean Sq F value    Pr(>F)
#VodCelk    5 2193.44  438.69  44.924 1.068e-11 ***
#Residuals 25  244.13    9.77
```

Asymptotické testy o stredných hodnotách

Regresná diagnostika v R, funkcia `stdres()` a iné



Obr.: Regresná diagnostika v ANOVA modeli

Asymptotické testy o stredných hodnotách

Metódy mnohonásobného porovnávania

Ak ANOVA F-test zamietne H_0, potom je potrebné zistiť, ktoré rozdiely dvojíc stredných hodnôt sú štatisticky signifikantné na nominálnej hladine významnosti α. Môžeme tak urobiť pomocou **post-hoc testov**. Základným predpokladom ich použitia je, rovnako ako pre ANOVA model, splnenie podmienky homogenity rozptylov a normality Y_{ji} a chýb ε_{ji}. Ekvivalentnou H_0 je nasledovná hypotéza $H_0 : \mu_i = \mu_j$ pre $\forall i, j;\, i < j$. Prepíšme H_0 do všeobecnejšieho tvaru

$$H_0 : \sum_{j=1}^{J} a_j \mu_j = \sum_{j=1}^{J} a_j \mu_{0j} \text{ oproti } \sum_{j=1}^{J} a_j \mu_j \neq \sum_{j=1}^{J} a_j \mu_{0j} \text{ pre nejaké } \mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_J)^T \in \mathcal{A},$$

kde $\mathcal{A} = \{\mathbf{a} : \sum_{j=1}^{J} a_j = 0\}$ a $\mathbf{a}$ je **vektor kontrastov**.

Asymptotické testy o stredných hodnotách

Metódy mnohonásobného porovnávania

Vo všeobecnosti však môžeme prepokladať, že H_0 generuje podpriestor s hodnosťou h. Potom definujme $H_0 = \cap_{k=1}^{h} H_{0k}$, kde $h = \binom{J}{2} = J\,(J-1)\,/2$, ak ide o všetky párové porovnania.

V prípade, že J-ta z porovnavaných populácií je **kontrolná** (charakterizovaná μ_J) a ostatné majú byť porovnávané len s touto kontrolnou populáciou a nie medzi sebou, potom volíme $h = J - 1$ a zaujímame sa len napr. o rozdiely tvaru $\left|\overline{y}_{j.} - \overline{y}_{J.}\right|$, kde $j = 1, 2, \ldots, J-1$. Najprv testujeme H_0 viacvýberovým ANOVA F-testom na hladine významnosti α použitím ANOVA F-štatistiky. Ak H_0 nezamietame, nepokračujeme ďalej. Ak H_0 zamietame, chceme identifikovať, ktorú z hypotéz $\mathbf{a}^T \boldsymbol{\mu} = \mathbf{a}^T \boldsymbol{\mu}_0 = 0$, kde $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_J)^T$, zamietame (pre fixné $\mathbf{a}$). Počet hypotéz h poznáme vopred, ale množiny $\mathcal{H}_0 = \{k : H_{0k} = 0\}$ a $\mathcal{H}_1 = \{k : H_{0k} = 1\}$, t.j. množiny nezamietnutých a zamietnutých nulových hypotéz z množiny všetkých nulových hypotéz $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \cup \mathcal{H}_1 = \{1, 2, \ldots, h\}$, kde $h = h_0 + h_1$, $h_0 = \text{card}\,\{\mathcal{H}_0\}$ a $h_1 = \text{card}\,\{\mathcal{H}_1\}$, dopredu nepoznáme.

Asymptotické testy o stredných hodnotách

Metódy mnohonásobného porovnávania – matica kontrastov **A**

Pre $H_{0,ij} : \mu_i = \mu_j, i < j$ ($i = 1, 2, \ldots, J-1$; $j = 1, 2, \ldots, J$), bude **vektor (základných) kontrastov** $\mathbf{a}_k$ mať na i-tom mieste 1, na j-tom mieste -1, ostatné sú nuly, napr.

$$\mathbf{a}_1 = (1, -1, 0, \ldots, 0)^T, \mathbf{a}_2 = (0, 1, -1 \ldots, 0)^T, \ldots, \mathbf{a}_{J-1} = (0, 0, \ldots, 1, -1)^T,$$

z čoho vyplýva, že

$$\mathbf{a}_1 \Rightarrow \mu_1 = \mu_2, \mathbf{a}_2 \Rightarrow \mu_2 = \mu_3, \ldots, \mathbf{a}_{J-1} \Rightarrow \mu_{J-1} = \mu_J,$$

čo implikuje $\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_J = \mu$. V maticovej podobe dostaneme

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \ldots & 0 \\ 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} \mu \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_J \end{pmatrix}, \mathbf{A}\boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} \alpha_1 - \alpha_2 \\ \alpha_2 - \alpha_3 \\ \vdots \\ \alpha_{J-1} - \alpha_J \end{pmatrix},$$

kde $\mathbf{a}_k$, $k = 1, 2, \ldots, h = J - 1$, sú riadky matice **A**.

Preznačme $(J+1)$-rozmerný vektor $\boldsymbol{\beta} = (\mu, \boldsymbol{\alpha}^T)^T$, kde $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_J)^T$ na J-rozmerný vektor $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\mu}$. Označme $\mathbf{A}$ bez prvého stĺpca ako $\mathbf{A}$, t.j. ide o maticu $(J-1) \times J$. Potom $H_0 : \mathbf{A}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{a}_0 = \mathbf{0}$ oproti $H_1 : \mathbf{A}\boldsymbol{\beta} \neq \mathbf{a}_0 = \mathbf{0}$. Napr.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \mathbf{A}\boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} \mu_1 - \mu_2 \\ \mu_2 - \mu_3 \\ \vdots \\ \mu_{J-1} - \mu_J \end{pmatrix}.$$

Ďalším príkladom matice kontrastov $\mathbf{A}$ je

$$\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_J \end{pmatrix}, \mathbf{A}\boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} \mu_1 - \mu_J \\ \mu_2 - \mu_J \\ \vdots \\ \mu_{J-1} - \mu_J \end{pmatrix}.$$

V R sa matica $\mathbf{A}^T$ označuje ako `contr.sum(J)`.

Ďalším príkladom matice kontrastov $\mathbf{A}$ je

$$\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 0 & 2 & -1 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & J-1 \end{pmatrix}, \mathbf{A}\boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} -\alpha_1 + \alpha_2 \\ -\alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3 \\ \vdots \\ -\alpha_1 - \dots \alpha_{J-1} + (J-1)\alpha_J \end{pmatrix}.$$

V R sa matica $\mathbf{A}^T$ označuje ako `contr.helmert(J)`, t.j. **Helmertova matica**. Pre Helmertove kontrasty potom pre $j = 1, 2, \dots, J-1$ platí

$$\begin{aligned} \frac{1}{j(j+1)} \left(j\alpha_{j+1} - \sum_{t=1}^{j} \alpha_t \right) &= \frac{1}{j+1} \left(\alpha_{j+1} - \frac{1}{j} \sum_{t=1}^{j} \alpha_t \right) \\ &= \frac{1}{j+1} \left(\mu_{j+1} - \frac{1}{j} \sum_{t=1}^{j} \mu_t \right). \end{aligned}$$

Matica kontrastov $\mathbf{A}$ môže byť definovaná aj ako matica kontrastov pre rozdiely $\mu_1 - \mu_j$, t.j.

$$\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

V R sa matica $\mathbf{A}^T$ označuje ako `contr.treatment(J)`. Nie je to matica skutočných kontrastov. Prvý element $\boldsymbol{\beta}$ zodpovedá pôvodnej základnej strednej hodnote μ_1 a je nulový ($\beta_1 = \mu_1 - \mu_1$), ostatné úrovne sú $\beta_2 = \mu_2 - \mu_1 = \alpha_2 - \alpha_1, \dots, \beta_J = \mu_J - \mu_1 = \alpha_J - \alpha_1$. Pozor, ide o kódovanie v R a $\boldsymbol{\beta}$ vyššie nezodpovedá nami zavedenej $\boldsymbol{\beta}$ na slajde 24.

Preznačme $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}_*$ a $\mathbf{A}^T = (\mathbf{a}_0, \mathbf{A}_*)$, kde $\mathbf{a}_0$ je tzv. **(jednoduchý) priemerujúci vektor**, kde $\mathbf{a}_0^T \mathbf{1}_J = 1$. Platí $\widetilde{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{A}\boldsymbol{\beta}$, kde $\mathbf{A}\boldsymbol{\beta}$ je J-rozmerný vektor. $\mathbf{A}^{-1}\widetilde{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta}$, kde $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{B}$. Matica $\widetilde{\mathbf{X}} = \mathbf{XB}$ je nová matica plánu a $\widetilde{\boldsymbol{\beta}}$ sú nové regresné koeficienty s prvým stĺpcom pre **intercept** β_0, kde $\widetilde{\boldsymbol{\beta}} = \left(\beta_0, \widetilde{\boldsymbol{\beta}}_*^T\right)^T$. Nulová hypotéza $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_J$ je pravdivá vtedy a len vtedy, keď $\widetilde{\boldsymbol{\beta}}_* = \mathbf{0}_{J-1}$. Nech $\mathbf{B} = (\mathbf{1}_J, \mathbf{B}_*)$, kde $J \times (J-1)$ nesingulárna (regulárna) matica $\mathbf{B}_*$ sa nazýva **kódovacia matica** (*coding matrix*). R nesprávne pomenováva pojmom matica kontrastu `contrasts()` práve tieto matice $\mathbf{B}_*$. Platí nasledovné $\left(\mathbf{A}_*^T \mathbf{A}_*\right)^{-1} \mathbf{A}_*^T = \mathbf{B}_*^T$. a naviac $\mathbf{B}_* \widetilde{\boldsymbol{\beta}}_* = \boldsymbol{\alpha}$. Napr. pre Helmertove kontrasty $\mathbf{A}_*^T \mathbf{A}_*$ má na diagonále prvky $j(j+1) = j^2 + j$ a $\widetilde{\beta}_j = j\alpha_{j+1} - \sum_{t=1}^{j} \alpha_t$.

Asymptotické testy o stredných hodnotách

Metódy mnohonásobného porovnávania – matica kontrastov **A**

Nech $\mathbf{D} = \mathrm{diag}(n_1, n_2, \dots, n_J) = \mathbf{X}^T\mathbf{X}$ a $\mathbf{n} = (n_1, n_2, \dots, n_J)^T$.

$$\mathbf{a}^T\widehat{\beta} \sim N\left(\mathbf{a}^T\beta, \sigma_e^2\mathbf{a}^T\mathbf{D}^{-1}\mathbf{a}\right),\ \mathbf{a}^T\widehat{\beta} \sim N\left(\sum_{j=1}^{J} a_j\alpha_j, \sigma_e^2\sum_{j=1}^{J}\frac{a_j^2}{n_j}\right)$$

Nech $\mathbf{A}^T = (\mathbf{1}_J, \mathbf{A}_*)$. Potom

$$\widehat{Var}[\widehat{\widehat{\beta}}] = \widehat{\sigma}_e^2\left(\mathbf{A}^T\mathbf{D}\mathbf{A}\right)^{-1} = \sigma 2_e \begin{pmatrix} n & \mathbf{1}_J^T\mathbf{D}\mathbf{A}_* \\ \mathbf{A}_*^T\mathbf{D}\mathbf{1}_J & \mathbf{A}_*^T\mathbf{D}\mathbf{A}_* \end{pmatrix}^{\widehat{-1}} = \widehat{\sigma}_e^2 \begin{pmatrix} n & \mathbf{n}^T\mathbf{A}_* \\ \mathbf{A}_*^T\mathbf{n} & \mathbf{A}_*^T\mathbf{D}\mathbf{A}_* \end{pmatrix}^{-1}$$

Ak ide o **ortogonálne kontrasty**, potom $\mathbf{A}_*^T\mathbf{1}_J = \mathbf{0}$ a $\mathbf{A}_*^T\mathbf{A}_*$ je diagonálna. Ak $n_j = K$, potom $\mathbf{n} = K\mathbf{1}_J$ a $\mathbf{D} = K\mathbf{I}$.

Model $\mathcal{F}_{H_1}$ v tvare $\mathbf{Y} = \mathbf{X}\beta + \varepsilon$ sme prepísali (**reparametrizovali**) do tvaru $\mathbf{Y} = \widetilde{\mathbf{X}}\widetilde{\beta} + \varepsilon$, kde

$$\mathbf{X}\beta = \widetilde{\mathbf{X}}\widetilde{\beta} \text{ a } \mathbf{X}(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T = \widetilde{\mathbf{X}}(\widetilde{\mathbf{X}}^T\widetilde{\mathbf{X}})^{-1}\widetilde{\mathbf{X}}^T.$$

Príklad (Matice kontrastov)

Aplikujte vyššie spomínané matice kontrastov na ANOVA model pre dáta koncentrácia stroncia pomocou funkcie `contrasts()` a `aov()`.

Asymptotické testy o stredných hodnotách

ANOVA model v R – matica kontrastov **A**

$$\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 1/5 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1/5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_J \end{pmatrix}, \mathbf{A}\beta = \begin{pmatrix} \mu \\ \mu_2 - \mu_1 \\ \mu_3 - \mu_1 \\ \mu_4 - \mu_1 \\ \mu_5 - \mu_1 \end{pmatrix}.$$

```
tA <- rbind(rep(-1,4),diag(4))
tA <- cbind(rep(1/5,5),tA)
B <- solve(t(tA))
Bstar <- B[,2:5]
contrasts(VodCelk) <- Bstar
StrMOD02 <- aov(ConcStr~ VodCelk)
summary.lm(StrMOD02)
#             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
#  (Intercept)  43.1600     0.5705  75.649  < 2e-16 ***
#  VodCelk1      8.1500     1.8042   4.517  0.00013 ***
#  VodCelk2     12.0000     1.8042   6.651 5.72e-07 ***
#  VodCelk3      9.0167     1.8042   4.998 3.75e-05 ***
#  VodCelk4     26.2167     1.8042  14.531 1.07e-13 ***
```


Asymptotické testy o stredných hodnotách

ANOVA model v R – matica kontrastov **A**

$$\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 1/5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/5 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1/5 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_J \end{pmatrix}, \mathbf{A}\beta = \begin{pmatrix} \mu \\ \mu_1 - \mu_5 \\ \mu_2 - \mu_5 \\ \mu_3 - \mu_5 \\ \mu_4 - \mu_5 \end{pmatrix}.$$

```
tA <- rbind(diag(4),rep(-1,4)) # ekviv. contr.sum(5)
tA <- cbind(rep(1/5,5),tA)
B <- solve(t(tA)); Bstar <- B[,2:5]
contrasts(VodCelk) <- Bstar
StrMOD02 <- aov(ConcStr~ VodCelk)
summary.lm(StrMOD02)
#             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
#  (Intercept)  43.1600     0.5705  75.649  < 2e-16 ***
#  VodCelk1    -26.2167     1.8042 -14.531 1.07e-13 ***
#  VodCelk2    -18.0667     1.8042 -10.014 3.12e-10 ***
#  VodCelk3    -14.2167     1.8042  -7.880 3.09e-08 ***
#  VodCelk4    -17.2000     1.8042  -9.533 8.34e-10 ***
tA <- contr.sum(5); t(tA)%*%PRIEM.ConcStr
# -26.21667 -18.06667 -14.21667 -17.2
```


Asymptotické testy o stredných hodnotách

ANOVA model v R – matica kontrastov **A**

$$\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 1/5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/5 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1/5 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1/5 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1/5 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_J \end{pmatrix}, \mathbf{A}\beta = \begin{pmatrix} \mu \\ \mu_1 - \mu_2 \\ \mu_2 - \mu_3 \\ \mu_3 - \mu_4 \\ \mu_4 - \mu_5 \end{pmatrix}.$$

```
tA <- matrix(c(1,-1,0,0,0,0,1,-1,0,0,0,0,1,-1,0,0,0,0,1,-1),5,4)
tA <- cbind(rep(1/5,5),tA)
B <- solve(t(tA))
Bstar <- B[,2:5]
contrasts(VodCelk) <- Bstar
StrMOD02 <- aov(ConcStr~ VodCelk)
summary.lm(StrMOD02)
#             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
#  (Intercept)  43.1600     0.5705  75.649  < 2e-16 ***
#  VodCelk1     -8.1500     1.8042  -4.517  0.00013 ***
#  VodCelk2     -3.8500     1.8042  -2.134  0.04284 *
#  VodCelk3      2.9833     1.8042   1.654  0.11072
#  VodCelk4    -17.2000     1.8042  -9.533 8.34e-10 ***
```

Asymptotické testy o stredných hodnotách
ANOVA model v R – matica kontrastov **A**

```
tA <- contr.helmert(5)
tA <- cbind(rep(1/5,5),tA)
B <- solve(t(tA))
Bstar <- B[,2:5]
contrasts(VodCelk) <- Bstar
StrMOD02 <- aov(ConcStr~ VodCelk)
summary.lm(StrMOD02)
#                Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
#  (Intercept)  43.1600     0.5705  75.649  < 2e-16 ***
#  VodCelk1      8.1500     1.8042   4.517  0.00013 ***
#  VodCelk2     15.8500     3.1249   5.072 3.09e-05 ***
#  VodCelk3      6.9000     4.4193   1.561  0.13102
#  VodCelk4     75.7000     5.7053  13.268 8.09e-13 ***
tA <- contr.helmert(5)
t(tA)%*%PRIEM.ConcStr
# 8.15 15.85  6.9 75.7

# Poznamky
sqrt(MSe.obs/6) # sqrt(9.7652/6)=1.275748 (StrMOD03)
sqrt(MSe.obs*(1/6+1/6)) # sqrt(3.255067)=1.80418
sqrt(MSe.obs*(1/30)) # sqrt(0.3255067)=0.5705319
```


Asymptotické testy o stredných hodnotách
ANOVA model v R – matica kontrastov **A**

Nesprávny postup (dosadzujeme maticu kontrastov namiesto jej inverzie):

```
contrasts(VodCelk) <- contr.treatment(5)
StrMOD02 <- aov(ConcStr~ VodCelk)
summary.lm(StrMOD02)
#               Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
#  (Intercept)    32.083      1.276  25.149  < 2e-16 ***
#  VodCelk2        8.150      1.804   4.517  0.00013 ***
#  VodCelk3       12.000      1.804   6.651 5.72e-07 ***
#  VodCelk4        9.017      1.804   4.998 3.75e-05 ***
#  VodCelk5       26.217      1.804  14.531 1.07e-13 ***
contrasts(VodCelk) <- contr.sum(5)
StrMOD02 <- aov(ConcStr~ VodCelk)
summary.lm(StrMOD02) # odhady su prve styri urovne alfa
#                Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
#  (Intercept)  43.1600     0.5705  75.649  < 2e-16 ***
#  VodCelk1    -11.0767     1.1411  -9.707 5.82e-10 ***
#  VodCelk2     -2.9267     1.1411  -2.565   0.0167 *
#  VodCelk3      0.9233     1.1411   0.809   0.4260
#  VodCelk4     -2.0600     1.1411  -1.805   0.0831 .
round(PRIEM.str,4)
# A        B        C        D        E
# -11.0767  -2.9267   0.9233  -2.0600  15.1400
```


Asymptotické testy o stredných hodnotách
ANOVA model v R – matica kontrastov **A**

Nesprávny postup (dosadzujeme maticu kontrastov namiesto jej inverzie):

```
contrasts(VodCelk) <- contr.helmert(5)
StrMOD02 <- aov(ConcStr~ VodCelk)
summary.lm(StrMOD02) # dostaneme skutocne Helmertove kontrasty
#                Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
#  (Intercept)  43.1600     0.5705  75.649  < 2e-16 ***
#  VodCelk1      4.0750     0.9021   4.517  0.00013 ***
#  VodCelk2      2.6417     0.5208   5.072 3.09e-05 ***
#  VodCelk3      0.5750     0.3683   1.561  0.13102
#  VodCelk4      3.7850     0.2853  13.268 8.09e-13 ***
## dostaneme skutocne Helmertove kontrasty
## Preco?
tA <- contr.helmert(5)
solve(t(tA)%*%tA)%*%t(tA)%*%PRIEM.str
# 4.075 2.641667 0.575 3.785
```


Asymptotické testy o stredných hodnotách
Metódy mnohonásobného porovnávania – testovacie štatistiky

Pre nejaký vektor **a** je stredná hodnota $E[\sum_{j=1}^{J} a_j \overline{Y}_{j\cdot}] = \sum_{j=1}^{J} a_j \mu_j$ a rozptyl $Var[\sum_{j=1}^{J} a_j \overline{Y}_{j\cdot}] = \sigma_e^2 \sum_{j=1}^{J} \frac{a_j^2}{n_j}$. Potom

$$Z_W = \frac{\sum_{j=1}^{J} a_j \overline{Y}_{j\cdot} - \sum_{j=1}^{J} a_j \mu_{j0}}{\sqrt{\sigma_e^2 \sum_{j=1}^{J} \frac{a_j^2}{n_j}}} \overset{\mathcal{D}}{\approx} N(0,1).$$

Rozptyl σ_e^2 nepoznáme a musíme ho odhadnúť. Výberový rozptyl v j-tej populácii je rovný $S_j^2 = \frac{1}{n_j-1}\sum_{i=1}^{n_j}(Y_{ji} - \overline{Y}_{j\cdot})^2$, kde $j = 1, 2, \ldots, J$, sú nezávislé. Potom platí $(n_j - 1)S_j^2/\sigma_e^2 \sim \chi^2_{n_j-1}$. Keďže v modeloch $\mathcal{F}_{H_0}$ a $\mathcal{F}_{H_1}$ predpokladáme rovnosť rozptylov, potom môžeme písať $\widehat{\sigma}_e^2$ ako $s^2 = \frac{1}{n-J}\sum_{j=1}^{J}(n_j - 1)s_j^2 = \frac{1}{n-J}\sum_{j=1}^{J}\sum_{i=1}^{n_j}\left(y_{ji} - \overline{y}_{j\cdot}\right)^2 = \frac{1}{n-J}SS_{e,\mathrm{obs}}$, kde $n - J = \sum_{j=1}^{J}(n_j - 1)$. Potom $(n-J)S^2/\sigma_e^2 \sim \chi^2_{n-J}$. Navyše S^2 je nezávislé na $\overline{Y}_{j\cdot}$, a teda môžeme písať

$$T_{\mathbf{a}} = \frac{\mathbf{a}^T\widehat{\boldsymbol{\mu}} - \mathbf{a}^T\boldsymbol{\mu}_0}{\sqrt{S^2\mathbf{a}^T(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{a}}} = \frac{\sum_{j=1}^{J}a_j\overline{Y}_{j\cdot} - \sum_{j=1}^{J}a_j\mu_{j0}}{\sqrt{S^2\sum_{j=1}^{J}\frac{a_j^2}{n_j}}} \overset{\mathcal{D}}{\approx} t_{n-J},$$

kde je matica plánu $\mathbf{X}$ použitá bez prvého stĺpca (charakterizujúceho celkovú strednú hodnotu μ) a má preto rozmery $n \times J$. Realizáciou $T_{\mathbf{a}}$ je $t_{\mathbf{a}}$, p-hodnota $= 2\Pr(T_{\mathbf{a}} \geq |t_{\mathbf{a}}||H_0)$ a H_0 zamietame, ak $|t_{\mathbf{a}}| \geq t_{n-J}(\alpha/2)$; $t_{n-J}(\alpha/2)$ je kritická hodnota t rozdelenia s $n - J$ stupňami voľnosti.

$T_{\mathbf{a}} = T_{LSD}$ je **Waldova testovacia štatistika**, často nazývaná aj **Fisherova LSD štatistika** (z angl. *least significant difference*, t.j. najmenší signifikantný rozdiel). Test **viacvýberový Fisherov LSD test o lineárnom kontraste** $\sum_{j=1}^{J}a_j\mu_j$.

Potom môžeme definovať **Waldov** $100 \times (1-\alpha)\%$ **empirický IS pre nejakú lineárnu kombináciu** $\sum_{j=1}^{J}a_j\mu_j$ (nazývaný aj **empirický IS Fisherovho typu**) ako

$$\left(\sum_{j=1}^{J}a_j\overline{y}_{j\cdot} - t_{n-J}(\alpha/2)\sqrt{s^2\sum_{j=1}^{J}\frac{a_j^2}{n_j}}, \sum_{j=1}^{J}a_j\overline{y}_{j\cdot} + t_{n-J}(\alpha/2)\sqrt{s^2\sum_{j=1}^{J}\frac{a_j^2}{n_j}}\right).$$

Označme

$$T_{\mathbf{a}}^2 = \frac{\left(\mathbf{a}^T\widehat{\boldsymbol{\mu}} - \mathbf{a}^T\boldsymbol{\mu}_0\right)^2}{S^2\mathbf{a}^T(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{a}} = \frac{\left(\sum_{j=1}^{J}a_j\overline{Y}_{j\cdot} - \sum_{j=1}^{J}a_j\mu_{j0}\right)^2}{S^2\sum_{j=1}^{J}\frac{a_j^2}{n_j}} = \frac{\left(\sum_{j=1}^{J}a_j(\overline{Y}_{j\cdot} - \mu_{j0})\right)^2}{S^2\sum_{j=1}^{J}\frac{a_j^2}{n_j}}.$$

Potom

$$\sup_{\mathbf{a}:\sum_{j=1}^{J}a_j=0} T_{\mathbf{a}}^2 = \frac{\sum_{j=1}^{J}n_j\left((\overline{Y}_{j\cdot} - \overline{Y}_{\cdot\cdot}) - (\mu_{j0} - \mu)\right)^2}{S^2} = (J-1)F_W,$$

kde $\overline{Y}_{\cdot\cdot} = \frac{\sum_{j=1}^{J}n_j\overline{Y}_{j\cdot}}{\sum_{j=1}^{J}n_j}$ a $\mu = \frac{\sum_{j=1}^{J}n_j\mu_J}{\sum_{j=1}^{J}n_j}$. Navyše

$$\sup_{\mathbf{a}:\sum_{j=1}^{J}a_j=0} T_{\mathbf{a}}^2 \overset{\mathcal{D}}{\approx} (J-1)F_{J-1,n-J}.$$

Čitateľ a menovateľ $(J-1)F_W$ sú nezávislé. Tiež platí $S^2 \sim \sigma_e^2\frac{\chi^2_{n-J}}{n-J}$ a

$$\frac{1}{\sigma_e^2}\left(\sum_{j=1}^{J}n_j\left((\overline{Y}_{j\cdot} - \overline{Y}_{\cdot\cdot}) - (\mu_{j0} - \mu)\right)^2\right) \sim \chi^2_{J-1}.$$

Scheffé ukázal, že

$$F_{\mathbf{a}} = \frac{\left(\mathbf{a}^T\widehat{\boldsymbol{\mu}} - \mathbf{a}^T\boldsymbol{\mu}_0\right)^2}{S^2\mathbf{a}^T(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{a}} = \frac{\left(\sum_{j=1}^{J}a_j\overline{Y}_{j\cdot} - \sum_{j=1}^{J}a_j\mu_{j0}\right)^2}{S^2\sum_{j=1}^{J}a_j^2/n_j} \overset{\mathcal{D}}{\approx} (J-1)F_{J-1,n-J},$$

kde H_0 zamietame, ak $F_{\mathbf{a}} \geq (J-1)F_{J-1,n-J}(\alpha)$, kde $F_{J-1,n-J}(\alpha)$ je kritická hodnota F rozdelenia s $J-1$ a $n-J$ stupňami voľnosti. Je potrebné zdôrazniť, že H_0 musí platiť pre všetky kontrasty $\mathbf{a}$ simultánne a H_0 zamietame, ak zamietame hypotézu o supréme $T_{\mathbf{a}}^2$, t.j. zamietame H_0 v ANOVA F-teste. $F_{\mathbf{a}}$ sa nazýva **Waldova testovacia štatistika**, často nazývaná aj **Schefféého štatistika** a test **viacvýberový Schefféého test nulovosti všetkých kontrastov**. Realizáciou $F_{\mathbf{a}}$ je $F_{\mathbf{a},\mathrm{obs}}$ a (adjustovaná) p-hodnota = $\Pr(F_{\mathbf{a}} \geq F_{\mathbf{a},\mathrm{obs}}|H_0)$.

Asymptotické testy o stredných hodnotách
Metódy mnohonásobného porovnávania – Scheffého metóda

Waldove simultánne $100 \times (1-\alpha)\%$ **empirické intervaly spoľahlivosti Scheffého typu** definujeme ako

$$\left(\mathbf{a}^T\widehat{\boldsymbol\mu} - \sqrt{(J-1)F_{J-1,n-J}(\alpha)}\sqrt{\widehat{\sigma}_e^2\mathbf{a}^T(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{a}}\;,\right.$$

$$\left.\mathbf{a}^T\widehat{\boldsymbol\mu} + \sqrt{(J-1)F_{J-1,n-J}(\alpha)}\sqrt{\widehat{\sigma}_e^2\mathbf{a}^T(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{a}}\right),$$

kde pravdepodobnosť pokrytia všetkých IS (simultánne) je rovná $1-\alpha$. Za simultánnu inferenciu (t.j. testovanie H_{0k}) platíme dĺžkou simultánnych IS Scheffého typu oproti IS Fisherovho typu, t.j. keďže garantujeme simultánny koeficient spoľahlivosti $1-\alpha$, simultánne IS Scheffého typu môžu byť dosť široké (platí $t_{n-J}(\alpha/2) \leq \sqrt{(J-1)F_{J-1,n-J}(\alpha)}$). Z čoho vyplýva, že Scheffého testy majú menšiu silu ako t-testy.

Asymptotické testy o stredných hodnotách
Metódy mnohonásobného porovnávania – Tukeyho HSD metóda

Tukey ukázal, že

$$\sup_{\mathbf{a}:\sum_{j=1}^J a_j=0} T_{\mathbf{a}} = \frac{\overline{Y}_{\max\cdot} - \overline{Y}_{\min\cdot}}{S\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n_{\max}\overline{Y}_{\max\cdot}} + \frac{1}{n_{\min}\overline{Y}_{\min\cdot}}\right)}} \overset{\mathcal{D}}{\sim} q_{J,n-J},$$

kde $\overline{Y}_{\max\cdot} = \max_{\forall j}\overline{Y}_{j\cdot}$ a jemu prislúchajúci rozsah $n_{\max}$, $\overline{Y}_{\min\cdot} = \min_{\forall j}\overline{Y}_{j\cdot}$ a jemu prislúchajúci rozsah $n_{\min}$. Potom

$$F_{\mathbf{a}} = \frac{\left(\mathbf{a}^T\widehat{\boldsymbol\mu} - \mathbf{a}^T\boldsymbol\mu_0\right)^2}{S^2\mathbf{a}^T(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{a}} \overset{\mathcal{D}}{\sim} \frac{1}{2}q^2_{J,n-J},$$

kde H_0 zamietame, ak $F_{\mathbf{a}} \geq \frac{1}{2}q^2_{J,n-J}(\alpha)$, kde $q_{J,n-J}(\alpha)$ je kritická hodnota **studentizovaného rozpätia** s J a $n-J$ stupňami voľnosti. Je potrebné opäť zdôrazniť, že H_0 musí platiť pre všetky kontrasty $\mathbf{a}$ simultánne a H_0 zamietame, ak zamietame hypotézu o supréme $T_{\mathbf{a}}$.

Asymptotické testy o stredných hodnotách
Metódy mnohonásobného porovnávania – Tukeyho HSD metóda

$F_{\mathbf{a}}$ sa nazýva **Waldova testovacia štatistika**, často nazývaná aj **Tukeyho HSD štatistika** (alebo **Tukey-Kramerova štatistika**; HSD z angl. *honest significant difference*, t.j. skutočný signifikantný rozdiel) a test **viacvýberový Tukeyho HSD test nulovosti všetkých kontrastov**. Realizáciou $F_{\mathbf{a}}$ je $F_{\mathbf{a},\mathrm{obs}}$ a (adjustovaná) p-hodnota = $\Pr(F_{\mathbf{a}} \geq F_{\mathbf{a},\mathrm{obs}}|H_0)$.

Waldove simultánne $100 \times (1-\alpha)\%$ **empirické intervaly spoľahlivosti Tukeyho typu** definujeme ako

$$\left(\mathbf{a}^T\widehat{\boldsymbol\mu} - q_{J,n-J}(\alpha)\sqrt{\frac{1}{2}\widehat{\sigma}_e^2\mathbf{a}^T(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{a}}, \mathbf{a}^T\widehat{\boldsymbol\mu} + q_{J,n-J}(\alpha)\sqrt{\frac{1}{2}\widehat{\sigma}_e^2\mathbf{a}^T(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{a}}\right).$$

Príklad (Metódy mnohonásobného porovnávania)

Majme koncentráciu stroncia Sr (mg/ml) v piatich vodných celkoch. (1) po náhľade na dáta vhodne zadefinujte kontrasty a aplikujte na ne Schefféha metódu; (2) použite Tukeyho HSD metódu (T_{HSD} štatistiku), vypočítajte adjustované p-hodnoty, simultánne 95% empirické IS Tukeyho typu pre všetky párové porovnania rozdielov stredných hodnôt a zobrazte ich graficky.

Asymptotické testy o stredných hodnotách
Metódy mnohonásobného porovnávania v R – Scheffého metóda

Po náhľade na dáta použijeme nasledovné tri vektory kontrastov $\mathbf{a}_k$, nim prislúchajúce odhady efektov $\mathbf{a}_k^T\widehat{\boldsymbol\mu} = \sum_{j=1}^J a_{kj}\overline{y}_{j\cdot}$, ich rozptyly $s^2\mathbf{a}_k^T(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{a}_k = s^2\sum_{j=1}^J a_{kj}^2/n_j$ a Schefféha testovacie štatistiky $\sqrt{F_{\mathbf{a}_k,\mathrm{obs}}} = |\mathbf{a}_k^T\widehat{\boldsymbol\mu}| / \sqrt{s^2\mathbf{a}_k^T(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{a}_k}$, kde $k = 1,2$ a 3:

- $\mathbf{a}_1 = (0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -1)^T$, $\mathbf{a}_1^T\widehat{\boldsymbol\mu} \doteq -16.5$, $s^2\mathbf{a}_1^T(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{a}_1 = 1.47^2$, $\sqrt{F_{\mathbf{a}_1,\mathrm{obs}}} \doteq 11.20$,
- $\mathbf{a}_2 = (1, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 0)^T$, $\mathbf{a}_2^T\widehat{\boldsymbol\mu} \doteq -9.7$, $s^2\mathbf{a}_2^T(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{a}_2 = 1.47^2$, $\sqrt{F_{\mathbf{a}_2,\mathrm{obs}}} \doteq 6.60$,
- $\mathbf{a}_3 = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{2})^T$, $\mathbf{a}_3^T\widehat{\boldsymbol\mu} \doteq 3.4$, $s^2\mathbf{a}_3^T(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{a}_3 = 1.16^2$, $\sqrt{F_{\mathbf{a}_3,\mathrm{obs}}} \doteq 2.91$.

Schefféha kritická hodnota je rovná $\sqrt{(J-1)F_{J-1,n-J}(\alpha)} = \sqrt{4F_{4,25}(0.05)} \doteq 1.34$. Potom $H_{0k}: \mathbf{a}_k^T\boldsymbol\mu = 0$ oproti $H_{1k}: \mathbf{a}_k^T\boldsymbol\mu \neq 0$ zamietame, ak $k = 1,2,3$.

Asymptotické testy o stredných hodnotách
Metódy mnohonásobného porovnávania v R – Scheffého metóda

```
K <- 6; J <- 5
X  <- model.matrix(StrMOD03)
a1 <- c(0,1/3,1/3,1/3,-1)
a2 <- c(1,-1/3,-1/3,-1/3,0)
a3 <- c(1/2,-1/3,-1/3,-1/3,1/2)
matA <- rbind(a1,a2,a3)
t(a1)%*%PRIEM.ConcStr # -16.49444
t(a2)%*%PRIEM.ConcStr # -9.722222
t(a3)%*%PRIEM.ConcStr # 3.386111
MSe.obs  <-  (summary(StrMOD03)$sig)^2
rozptyl.a1 <- MSe.obs*t(a1)%*%solve(t(X)%*%X)%*%a1 # 2.17=1.47^2
rozptyl.a2 <- MSe.obs*t(a2)%*%solve(t(X)%*%X)%*%a2 # 2.17=1.47^2
rozptyl.a3 <- MSe.obs*t(a3)%*%solve(t(X)%*%X)%*%a3 # 1.36=1.16^2
kh.F <- sqrt((J-1) * (1-pf(0.95,J-1,K*J-J))) # 1.344368
abs(t(a1)%*%PRIEM.ConcStr)/sqrt(rozptyl.a1) # 11.19704
abs(t(a2)%*%PRIEM.ConcStr)/sqrt(rozptyl.a2) # 6.599807
abs(t(a3)%*%PRIEM.ConcStr)/sqrt(rozptyl.a3) # 2.907548
IS.a1 <- t(a1)%*%PRIEM.ConcStr + c(-1,1)*kh.F*sqrt(rozptyl.a1) #
     -18.47484 -14.51405
IS.a2 <- t(a2)%*%PRIEM.ConcStr + c(-1,1)*kh.F*sqrt(rozptyl.a2) #
     -11.702620  -7.741825
IS.a3 <- t(a3)%*%PRIEM.ConcStr + c(-1,1)*kh.F*sqrt(rozptyl.a3) #
     1.820470 4.951753
```


Asymptotické testy o stredných hodnotách
Metódy mnohonásobného porovnávania v R – Tukeyho HSD metóda

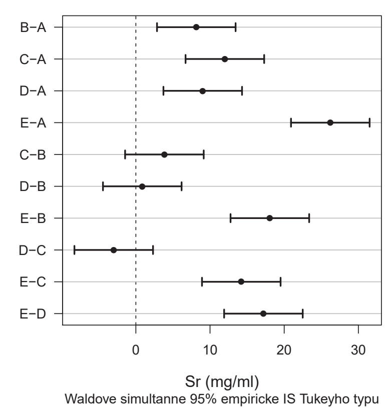
```
# Tukeyho HSD metoda pre vybrany kontrast B-A
a.AB     <- c(-1,1,0,0,0)
cit.AB   <- sum(a.AB*PRIEM.ConcStr) # 8.15
MSe.obs  <-  (summary(StrMOD03)$sig)^2 # 9.7652
menov.AB <- sqrt(MSe.obs/2*sum(a.AB^2/K)) # 1.275748
tLSD.AB  <- citatel.AB/menovatel.AB # 6.388408
qtukey(0.95,J,K*J-J) # 4.153363
p.hodn   <- 1-ptukey(tLSD.AB,J,K*J-J) # 0.001129311
IS.AB    <- citatel.AB+c(-1,1)*qtukey(0.95,J,K*J-J)*menov.AB
# 2.851355 13.448645
mp.Tukey <- TukeyHSD(aov(ConcStr~VodCelk),ordered=FALSE) # tab.
mp.Tukey$VodCelk
```


Asymptotické testy o stredných hodnotách
Metódy mnohonásobného porovnávania v R

Tabuľka: Výsledky Tukey HSD metódy – rozdiely aritmetických priemerov $\overline{y}_{i.} - \overline{y}_{j.}$, dolná a horná hranica Waldových simultánnych 95% empirických IS Tukeyho typu pre $\mu_i - \mu_j$ (DH a HH), adjustované p-hodnoty $\widetilde{p}_k$

	$\overline{y}_{i.} - \overline{y}_{j.}$	DH	HH	$\widetilde{p}_k$
B-A	8.15	2.85	13.45	0.00112931
C-A	12.00	6.70	17.30	0.00000534
D-A	9.02	3.72	14.32	0.00033392
E-A	26.22	20.92	31.52	$<$0.00000001
C-B	3.85	–1.45	9.15	0.23762175
D-B	0.87	–4.43	6.17	0.98848032
E-B	18.07	12.77	23.37	$<$0.00000001
D-C	–2.98	–8.28	2.32	0.47910996
E-C	14.22	8.92	19.52	0.00000029
E-D	17.20	11.90	22.50	0.00000001

Asymptotické testy o stredných hodnotách
Metódy mnohonásobného porovnávania v R



Obr.: Waldove simultánne 95% empirické IS Tukeyho typu pre rozdiely stredných hodnôt

Nech **CHPD** znamená **chyba prvého druhu** (testu jednej H_0). Potom

$$\Pr(\text{CHPD}) = \Pr(\text{zamietni } H_0 | H_0 \text{ neplatí}) \leq \alpha.$$

Definícia (chyba porovnávania α_c)

Chyba porovnávania (*comparison-wise error*, CWER) α_c je pravdepodobnosť zamietnutia práve jednej H_{0k}, keď táto H_{0k} je pravdivá, t.j. ide o pravdepodobnosť, že nastane práve jedna CHPD v jednom párovom porovnaní.

Definícia (experimentálna chyba α_e)

Experimentálna chyba (*experiment-wise error*, EWER) α_e je pravdepodobnosť zamietnutia aspoň jednej H_{0k}, keď všetky H_{0k} sú pravdivé, t.j. ide o pravdepodobnosť, že nastane aspoň jedna CHPD medzi všetkými h nezávislými párovými porovnávaniami. Táto chyba je kontrolovaná na nominálnej hladine významnosti α.

Z definícií vyplýva, že Pr(CHPD) jedného testu je rovná α_c a pravdepodobnosť správneho rozhodnutia je $1-\alpha_c$. Za predpokladu, že máme h nezávislých párových porovnávaní, bude mať náhodná premenná V (počet CHPD) binomické rozdelenie, t.j. $V \sim Bin(h, \alpha_c)$. Keďže α_e je pravdepodobnosť, že nastane aspoň jedna CHPD medzi všetkými h nezávislými párovými porovnávaniami, môžeme ju definovať nasledovne

$$\alpha = \alpha_e = \Pr(V \geq 1) = 1 - \Pr(V = 0) = 1 - \alpha_c^0(1-\alpha_c)^h = 1 - (1-\alpha_c)^h.$$

Z tejto rovnosti vyplýva, že ak sa počet párových porovnávaní zväčšuje, α_e sa blíži k jednotke (pozri tabuľku). Ak $h = 1$ (dvojvýberový prípad), potom $\alpha = \alpha_e = \alpha_c$.

Tabuľka: Experimentálna chyba α_e ako funkcia α_c a h

α_c/h	2	5	10	20	50
0.01	0.0199	0.0490	0.0956	0.1821	0.3950
0.05	0.0975	0.2262	0.4013	0.6415	0.9231
0.10	0.1900	0.4095	0.6513	0.8784	0.9948

Zamerajme sa na hodnotenie **zovšeobecnenej pravdepodobnosti CHPD** v podobe

1. **pravdepodobnosti najmenej jednej CHPD**, kde V je počet zamietnutých pravdivých H_{0k} (*family-wise error rate*, FWER: metódy napr. Fisherova LSD metóda, Tukeyho HSD metóda, Schefféh metóda, Bonferroniho metóda, Šidákova metóda, Holmova metóda, Hochbergova metóda); FWER $= \Pr(V \geq 1)$; **FWER adjustované (upravené) p-hodnoty** sú definované nasledovne
$$\widetilde{p}_k = \inf\{\alpha : H_{0k} \text{ zamietame na FWER } = \alpha\};$$
2. **očakávanej hodnoty podielu CHPD medzi zamietnutými hypotézami**, FDR $= E[V/R]$, ak $R > 0$ alebo 0, ak $R = 0$, kde R je počet zamietnutých pravdivých a nepravdivých H_0, FDP $= V/R$ (*false discovery rate*, FDR, *false discovery proportion*, FDP: metódy napr. Benjamini-Hochbergova metóda, Benjamini-Yekutieliho metóda); **FDR adjustované p-hodnoty** sú definované nasledovne
$$\widetilde{p}_k = \inf\{\alpha : H_{0k} \text{ zamietame na FDR } = \alpha\};$$

Kontrola FWER a FDR znamená nasledovné: FWER $\leq \alpha$ a $\Pr(\text{FDP} > \gamma) \leq \alpha$, kde $\gamma, \alpha \in (0,1)$.

Aby bolo možné robiť simultánnu inferenciu, je potrebné modifikovať kritickú hodnotu $t_{n-J}(\alpha/2)$ rozdelenia Fisherovej LSD štatistiky pomocou substitúcie $\alpha/2$ použitím jedno- a viackrokových metód. **(Jednokroková) Bonferroniho**, resp. **Šidákova metóda** sú založené na princípe zmenšenia argumentu $\alpha/2$ kritickej hodnoty t-rozdelenia s $n-J$ stupňami voľnosti (obojstranný test) na základe *Bonferroniho*, resp. *Šidákovej nerovnosti*,
$\Pr\left(\cup_{k=1}^h A_k\right) \leq \sum_{k=1}^h \Pr(A_k)$, $\Pr\left(\cup_{k=1}^h A_k\right) \leq 1-\alpha$, resp.
$\Pr\left(\cap_{k=1}^h A_k\right) \geq \prod_{k=1}^h \Pr(A_k)$, $\Pr\left(\cap_{k=1}^h A_k\right) \geq 1-\alpha$, na $\alpha/(2h)$, resp. $\dfrac{1-(1-\alpha)^{1/h}}{2}$, kde A_k je najaká udalosť. V druhej nerovnosti platí rovnosť ak sú A_k nezávislé.

Bonferroniho metóda je *konzervatívnejšia* ako Šidákova (vedie ku menšiemu počtu zamietnutí, t.j. kritické hodnoty sú väčšie), lebo platí $(1-\alpha)^{1/h} < 1-\alpha/h$ pre všetky $\alpha > 0, h > 1$, teda $t_{n-J}(\alpha/h) > t_{n-J}(1-(1-\alpha)^{1/h})$. Rozdiel je ale zanedbateľný.

V súvislosti s kontrolou FWER a adjustovanými p-hodnotami platí pre Bonferroniho nerovnosť

$$\begin{aligned} \text{FWER} &= \Pr(V>0) = \Pr\left(\cup_{k=1}^{h_0}\left(\widetilde{P}_k \le \alpha\right)\right) \le \sum_{k=1}^{h_0} \Pr\left(\widetilde{P}_k \le \alpha\right) \\ &\le \sum_{k=1}^{h_0} \frac{\alpha}{h} = h_0 \frac{\alpha}{h} \le \alpha. \end{aligned}$$

Pre Šidákovu nerovnosť

$$\begin{aligned} \Pr(V=0) &= \Pr\left(\cap_{k=1}^{h_0}\left(\widetilde{P}_k \ge \alpha\right)\right) = \prod_{k=1}^{h_0} \Pr\left(\widetilde{P}_k \ge \alpha\right) \\ &= \prod_{k=1}^{h_0} \Pr\left(\widetilde{P}_k \ge 1-(1-\alpha)^{1/h}\right) = (1-\alpha)^{h_0/h} \ge 1-\alpha, \end{aligned}$$

z ktorej vyplýva, že FWER $= \Pr(V>0) = 1 - \Pr(V=0) = (1-\alpha)^{h_0/h} \le \alpha$.

Ak použijeme vyššie uvedené postupy na h párových porovnaní, potom pravdepodobnosť, že aspoň raz chybne zamietneme jednu z rovností $\mu_i = \mu_j$, ktorá platí, nie je väčšia ako α, t.j. ak sú všetky hypotézy pravdivé, pravdepodobnosť identifikácie, že niektorá z nich je nepravdivá, nie je viac ako α, pretože α je pravdepodobnosť zamietnutia ANOVA F-testu. Taktiež ANOVA F-test je test všetkých $\mathbf{a}_k^T\boldsymbol{\mu} = 0$, $k = 1, 2, \dots, h$, a ak je tento test zamietnutý, ešte nemusí nastať situácia, že niektorá z vyššie spomenutých metód zamietne nejakú hypotézu. Práve pre túto vlastnosť je experimentálna chyba menšia ako α. Ale ak ANOVA F-test zamieta nulovú hypotézu, potom Scheffého metóda bude zamietať H_0 aspoň pre jeden kontrast.

Adjustované hladiny významnosti α_k sú definované nasledovne

- Bonferroniho $\alpha_k = \frac{\alpha}{2h}$,
- Šidákove $\alpha_k = \frac{1-(1-\alpha)^{1/h}}{2}$,

Argument $\alpha/2$ kritickej hodnoty $t_{n-J}(\alpha/2)$ sa substituuje α_k. Potom budú **Waldove simultánne** $100\times(1-\alpha)$% **empirické intervaly spoľahlivosti Fisherovho typu** definované nasledovne

$$\left(\mathbf{a}^T\widehat{\boldsymbol{\mu}} - t_{n-J}(\alpha_k)\sqrt{\widehat{\sigma}_e^2\mathbf{a}^T(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{a}}, \mathbf{a}^T\widehat{\boldsymbol{\mu}} + t_{n-J}(\alpha_k)\sqrt{\widehat{\sigma}_e^2\mathbf{a}^T(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{a}}\right).$$

Adjustované p-hodnoty p_k sú definované nasledovne

- Bonferroniho $\widetilde{p}_k = \min\{hp_k, 1\}$,
- Šidákove $\widetilde{p}_k = 1-(1-p_k)^h$,

Asymptotické testy o stredných hodnotách
Mnohonásobné porovnávania v R

Mnohonásobné porovnávania v R
Na Tukeyho HSD metódu použijeme funkciu `TukeyHSD(aov(),ordered=FALSE)`, kde argument `ordered` ponechá pôvodné poradie hypotéz H_{0k}. Výstupom je tabuľka obsahujúca odhady rozdielov stredných hodnôt $\overline{y}_{i.} - \overline{y}_{j.}$, dolné a horné hranice Waldových simultánnych $100 \times (1-\alpha)\%$ empirických IS Tukeyho typu a adjustované p-hodnoty $\widetilde{p}_k$. Na jednokrokové a viackrokové metódy (výpočet adjustovaných p-hodnôt) použijeme funkciu `pairwise.t.test(y,x,p.adjust="metoda",pool.sd=TRUE)`, kde argument `pool.sd=TRUE` predstavuje použitie $\widehat{\sigma}_e^2$ a argument `p.adjust="metoda"` špecifikuje metódu, napr. Bonferroniho `p.adjust="bonferroni"`.

Funkcia `lm()` má prednastavené kontrasty párových porovnaní s prvou populáciou, $\alpha_j - \alpha_1$, kde $J > 1$, kedy použijeme vstupné argumenty `y` a `x`. Pokiaľ by sme chceli testovať nulovosť jednotlivých α_j, použijeme vstupné argumenty `y-mean(y)` a `x-1` (argument `x-1` znamená model bez interceptu μ).

Asymptotické testy o stredných hodnotách
Metódy mnohonásobného porovnávania v R

Príklad (Metódy mnohonásobného porovnávania)

Majme koncentráciu stroncia Sr (mg/ml) v piatich vodných celkoch. Otestujte rovnosť stredných hodnôt ANOVA F-testom pomocou funkcií (1) `aov()` (2) `oneway.test()` a (3) `lm()`. Ak je H_0 zamietnutá na $\alpha = 0.05$, potom vypočítajte adjustované p-hodnoty a Waldove simultánne 95% empirické IS Fisherovho typu pre všetky párové porovnania rozdielov stredných hodnôt Bonferroniho metódou.

Asymptotické testy o stredných hodnotách
Metódy mnohonásobného porovnávania v R

```
# parove porovnavania
mp.Bonf <- pairwise.t.test(ConcStr,VodCelk,
           p.adjust="bonferroni",pool.sd=TRUE)
```


Asymptotické testy o stredných hodnotách
Jednofaktorový ANOVA model s fixnými efektami pri rôznych rozptyloch

Nech $Y_{ji}(\mu_j, \sigma_j^2)$, kde existuje aspoň jedna dvojica $i \neq j$ $(i, j = 1, 2, \ldots, J)$ taká, že $\sigma_i^2 \neq \sigma_j^2$ a zároveň σ_j^2 sú neznáme. Potom F_W štatistika nemá F rozdelenie s $J-1$ a $n-J$ stupňami voľnosti a musí byť modifikovaná nasledovne (Welch 1951)

$$F_W = \frac{\frac{1}{J-1}\sum_{j=1}^J \widehat{w}_j \left(\overline{Y}_{j.} - \overline{Y}_{..}^{(w)}\right)^2}{1 + 2\frac{J-2}{J^2-1}\sum_{j=1}^J \frac{(1-\widehat{h}_j)^2}{n_j-1}} = \frac{\sum_{j=1}^J \widehat{w}_j \left(\overline{Y}_{j.} - \overline{Y}_{..}^{(w)}\right)^2}{J-1 + 2\frac{J-2}{J+1}\sum_{j=1}^J \frac{(1-\widehat{h}_j)^2}{n_j-1}} \overset{\mathcal{D}}{\sim} F_{J-1, df_w},$$

$\widehat{w}_j = n_j / s_j^2$, $\widehat{h}_j = \frac{\widehat{w}_j}{\sum_{i=1}^J \widehat{w}_i}$, $j = 1, 2, \ldots, J$ a $\widehat{\mu} = \overline{Y}_{..}^{(w)} = \sum_{j=1}^J \widehat{h}_j \overline{Y}_{j.}$. Počet stupňov voľnosti

$$df_{w_1} = \frac{J^2 - 1}{3\sum_{j=1}^J \frac{(1-\widehat{h}_j)^2}{n_j-1}},$$

čo zaokrúhlime na najbližšie nižšie celé číslo, t.j. $df_w = \lfloor df_{w_1} \rfloor$.

Príklad (homogenita vs nehomogenita rozptylov)

Čomu je rovné (A) $\overline{Y}_{..}^{(w)}$, (B) df_{w_1} a (C) F_W ak sú rozptyly homogénne?

F_W sa nazýva **Fisherova testovacia štatistika** (alebo presnejšie **Welchova ANOVA F-štatistika**) a test **viacvýberový F-test s Welchovou aproximáciou stupňov voľnosti o rovnosti stredných hodnôt** $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_J$ (alebo **Welchov ANOVA F-test**). Realizáciou F_W je F_{obs} a p-hodnota = $\Pr(F_W \geq F_{\text{obs}}|H_0)$. Na porovnanie ANOVA modelu pri rôznych rozptyloch s ANOVA modelom pri rovnakých rozptyloch – s^2 definujeme ako vážený priemer výberových rozptylov $s_j^2, j = 1, 2, \ldots, J$, teda

$$s^2 = \frac{\sum_{j=1}^J (n_j - 1)\, s_j^2}{\sum_{j=1}^J (n_j - 1)} = \frac{\sum_{j=1}^J (n_j - 1)\, s_j^2}{n - J}, \text{ kde } s_j^2 = \frac{1}{n_j - 1} \sum_{i=1}^{n_j} (y_{ji} - \bar{y}_{j.})^2.$$

Potom $\mathbf{Y}_j \sim N_{n_j}(\beta_j \mathbf{1}_{n_j}, \boldsymbol{\Sigma}_j)$, kde $\boldsymbol{\Sigma}_j = \sigma_j^2 \mathbf{I}_{n_j \times n_j}$, vektor chýb $\varepsilon_j \sim N_{n_j}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}_j)$, vektor parametrov $\widehat{\beta} \sim N_J(\beta, (\mathbf{X}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{X})^{-1})$, kde $\boldsymbol{\Sigma} = \text{diag}(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_J^2)$ a maximálne vierohodný odhad $\widehat{\beta}$ vypočítame pomocou **váženej metódy najmenších štvorcov**, t.j. $\widehat{\beta} = (\mathbf{X}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{Y}$. Pozor, $\mathbf{X}$ je **matica plánu** s rozmermi $n \times J$ (t.j. blokovo diagonálna matica jednotiek s blokmi $\mathbf{1}_{n_j}$).

Waldov $100 \times (1 - \alpha)\%$ **empirický IS pre nejakú lineárnu kombináciu** $\sum_{j=1}^J a_j \mu_j$ (nazývaný aj **empirický IS Fisherovho typu**) ako

$$\left(\sum_{j=1}^J a_j \bar{y}_{j.} - t_{df_W}(\alpha/2) \sqrt{\sum_{j=1}^J \frac{a_j^2 s_j^2}{n_j}}, \sum_{j=1}^J a_j \bar{y}_{j.} + t_{df_W}(\alpha/2) \sqrt{\sum_{j=1}^J \frac{a_j^2 s_j^2}{n_j}} \right).$$

Waldove simultánne $100 \times (1 - \alpha)\%$ **empirické intervaly spoľahlivosti Scheffého typu** definujeme ako

$$\left(\mathbf{a}^T \widehat{\boldsymbol{\mu}} - \sqrt{(J-1) F_{J-1, df_W}(\alpha)} \sqrt{\mathbf{a}^T (\mathbf{X}^T \mathbf{S}^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{a}}\, , \right.$$
$$\left. \mathbf{a}^T \widehat{\boldsymbol{\mu}} + \sqrt{(J-1) F_{J-1, df_W}(\alpha)} \sqrt{\mathbf{a}^T (\mathbf{X}^T \mathbf{S}^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{a}} \right),$$

kde $\widehat{\boldsymbol{\Sigma}} = \mathbf{S} = \text{diag}(s_1^2, s_2^2, \ldots, s_J^2)$.

Waldove simultánne $100 \times (1 - \alpha)\%$ **empirické intervaly spoľahlivosti Tukeyho typu** definujeme ako

$$\left(\mathbf{a}^T \widehat{\boldsymbol{\mu}} - q_{J, df_W}(\alpha) \sqrt{\frac{1}{2} \mathbf{a}^T (\mathbf{X}^T \mathbf{S}^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{a}}, \mathbf{a}^T \widehat{\boldsymbol{\mu}} + q_{J, df_W}(\alpha) \sqrt{\frac{1}{2} \mathbf{a}^T (\mathbf{X}^T \mathbf{S}^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{a}} \right).$$

Waldove simultánne $100 \times (1 - \alpha)\%$ **empirické intervaly spoľahlivosti Fisherovho typu** definované nasledovne

$$\left(\mathbf{a}^T \widehat{\boldsymbol{\mu}} - t_{df_W}(\alpha_k) \sqrt{\mathbf{a}^T (\mathbf{X}^T \mathbf{S}^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{a}}, \mathbf{a}^T \widehat{\boldsymbol{\mu}} + t_{df_W}(\alpha_k) \sqrt{\mathbf{a}^T (\mathbf{X}^T \mathbf{S}^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{a}} \right).$$

Stupne voľnosti df_W sa pri intervaloch spoľahlivosti často stubstituujú Welch-Satterthwaitovými **efektívnymi stupňami voľnosti** zadefinovanými nasledovne (Welch 1947, Satterthwaite 1946)

$$df_W = \frac{\left(\sum_{j=1}^J \frac{s_j^2}{n_j} \right)^2}{\sum_{j=1}^J \frac{\left(\frac{s_j^2}{n_j} \right)^2}{n_j - 1}}.$$

Funkciu `oneway.test()` je možné použiť aj v prípade, že rozptyly nie sú rovnaké, ak nastavíme argument `var.equal=FALSE`.

Mnohonásobné porovnávania v R

Na jednokrokové a viackrokové metódy (výpočet adjustovaných p-hodnôt) použijeme podobne ako predtým funkciu `pairwise.t.test(y,x,p.adjust="metoda")`, avšak argument `pool.sd=FALSE`.

Príklad (ANOVA F-test a Tukeyho HSD metóda)

Naprogramujte v R (A) ANOVA F-test za predpokladu nerovnosti rozptylov a (B) Tukeyho HSD metódu za predpokladu nerovnosti rozptylov.

Asymptotické testy o stredných hodnotách
Metódy mnohonásobného porovnávania v R – Scheffého a Tukeyho HSD metóda

Príklad (Metódy mnohonásobného porovnávania)

Majme koncentráciu stroncia Sr (mg/ml) v piatich vodných celkoch. Otestujte rovnosť stredných hodnôt ANOVA F-testom za predpokladu nerovnosti rozptylov pomocou funkcie `oneway.test()`. Ak je H_0 zamietnutá na $\alpha = 0.05$, potom (1) po náhľade na dáta vhodne zadefinujte kontrasty a aplikujte na ne Scheffého metódu; (2) použite Tukeyho HSD metódu (T_{HSD} štatistiku), vypočítajte adjustované p-hodnoty, simultánne 95% empirické IS Tukeyho typu pre všetky párové porovnania rozdielov stredných hodnôt a zobrazte ich graficky.

Pozn.: Ide o identický príklad ako za predpokladu rovnosti rozptylov.

Asymptotické testy o stredných hodnotách
Test pomerom vierohodnosti o rovnosti stredných hodnôt

Nech $Y_j \sim N(\mu_j, \sigma^2)$, kde $j = 1, 2, \ldots, J$ a σ^2 je neznáma. Logaritmus funkcie vierohodnosti má tvar

$$l(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_J) = -\frac{n}{2}\ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{j=1}^{J}\sum_{i=1}^{n_j}(y_{ji} - \mu_j)^2,$$

kde $n = \sum_{j=1}^{J} n_j$. MLE $\boldsymbol{\theta}$ je rovný $\widehat{\boldsymbol{\theta}} = (\widehat{\mu}_1, \widehat{\mu}_2, \ldots, \widehat{\mu}_J, \widetilde{\sigma}^2)^T$, kde

$$\widehat{\mu}_j = \overline{y}_j, \widetilde{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{J}\sum_{i=1}^{n_j}(y_{ji} - \overline{y}_j)^2,$$

t.j. $\Theta_1 = \{\boldsymbol{\theta} : \mu_i \neq \mu_j; i < j, i = 1, 2, \ldots, J-1; j = 2, 3, \ldots, J\}$ pre aspoň jedno i a j. Za platnosti H_0 je $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_0 = (\widehat{\mu}, \widehat{\mu}, \ldots, \widehat{\mu}, \widetilde{\sigma}_0^2)^T$ platí

$$\overline{x} = \widehat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{J}\sum_{i=1}^{n_j} y_{ji}, \widetilde{\sigma}_0^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{J}\sum_{i=1}^{n_j}(y_{ji} - \widehat{\mu})^2.$$

Asymptotické testy o stredných hodnotách
Test pomerom vierohodnosti o rovnosti stredných hodnôt

Tiež platí $\Theta_0 = \{\boldsymbol{\theta} : \mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_J = \mu\}$. Potom -1 krát prirodzený logaritmus pomeru vierohodnosti bude rovný

$$-\ln(\lambda(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_J)) = \frac{n}{2}\ln\left(\frac{\widetilde{\sigma}_0^2}{\widetilde{\sigma}^2}\right)$$

Vieme, že **testovacia štatistika pomerom vierohodnosti** $U_{\mathrm{LR}} = -2\ln\left(\lambda\left(\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \ldots, \mathbf{Y}_J\right)\right) \overset{\mathcal{D}}{\approx} \chi^2_{J-1}$, kde H_0 bude zamietnutá pre veľké hodnoty podielu $\frac{\widetilde{\sigma}_0^2}{\widetilde{\sigma}^2}$. Dá sa ukázať, že $-\ln(\lambda(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_J))$ je rastúcou funkciou F_{obs}. Úpravou podielu $\widetilde{\sigma}_0^2/\widetilde{\sigma}^2$ dostaneme

$$\begin{aligned} -\ln(\lambda(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_J)) &= \frac{n}{2}\ln\left(\frac{\sum_{j=1}^{J}\sum_{i=1}^{n_j}(y_{ji} \pm \overline{y}_j - \widehat{\mu})^2}{\sum_{j=1}^{J}\sum_{i=1}^{n_j}(y_{ji} - \overline{y}_j)^2}\right) \\ &= \frac{n}{2}\ln\left(1 + \frac{J-1}{n-J}F_{\mathrm{obs}}\right). \end{aligned}$$

Potom môžeme U_{LR} prepísať

$$u_{\mathrm{LR}} = n\ln\left(1 + \frac{J-1}{n-J}F_{\mathrm{obs}}\right).$$

Asymptotické testy o stredných hodnotách
Test pomerom vierohodnosti o homogenite rozptylov

Hypotézy definujeme nasledovne $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \ldots = \sigma_J^2 = \sigma^2$ oproti $H_1 : \sigma_i^2 \neq \sigma_j^2 \neq \sigma^2$ pre aspoň jedno $i < j, i = 1, 2, \ldots, J-1; j = 2, 3, \ldots, J$.

Nech $Y_j \sim N(\mu_j, \sigma_j^2)$, kde $j = 1, 2, \ldots J$, $\boldsymbol{\theta} = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_J, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_J^2)^T$. Logaritmus funkcie vierohodnosti má tvar

$$l(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_J) = -\sum_{j=1}^{J}\frac{n_j}{2}\ln(2\pi\sigma_j^2) - \sum_{j=1}^{J}\frac{1}{2\sigma_j^2}\left(\sum_{i=1}^{n_j}(y_{ji} - \mu_j)^2\right).$$

MLE $\boldsymbol{\theta}$ je rovný $\widehat{\boldsymbol{\theta}} = (\widehat{\mu}_1, \widehat{\mu}_2, \ldots, \widehat{\mu}_J, \widehat{\sigma}_1^2, \widehat{\sigma}_2^2, \ldots, \widehat{\sigma}_J^2)^T$, kde

$$\widehat{\mu}_j = \overline{y}_j, \widehat{\sigma}_j^2 = \frac{1}{n_j}\sum_{i=1}^{n_j}(y_{ji} - \overline{y}_j)^2,$$

t.j. $\Theta_1 = \{\boldsymbol{\theta} : \sigma_i^2 \neq \sigma_j^2 \neq \sigma^2; i < j, i = 1, 2, \ldots, J-1; j = 2, 3, \ldots, J\}$ pre aspoň jedno i a j.

Asymptotické testy o stredných hodnotách

Test pomerom vierohodnosti o homogenite rozptylov

Za platnosti H_0 je $\boldsymbol{\theta}_0 = (\widehat{\mu}_1, \widehat{\mu}_2, \ldots, \widehat{\mu}_J, \widetilde{\sigma}^2, \widetilde{\sigma}^2, \ldots, \widetilde{\sigma}^2)^T$, kde

$$\widetilde{\sigma}^2 = \frac{\sum_{j=1}^J n_j \widehat{\sigma}_j^2}{\sum_{j=1}^J n_j},$$

t.j. $\Theta_0 = \{\boldsymbol{\theta} : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \ldots = \sigma_J^2 = \sigma^2\}$. Potom -1 krát prirodzený logaritmus pomeru vierohodnosti bude potom rovný

$$\begin{aligned} -\ln(\lambda(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_J)) &= l(\widehat{\boldsymbol{\theta}}|\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_J) - l(\boldsymbol{\theta}_0|\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_J) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^J n_j \ln\left(\frac{\sum_{i=1}^J n_i \widehat{\sigma}_i^2}{\widehat{\sigma}_j^2 \sum_{i=1}^J n_i}\right) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^J n_j \ln\left(\frac{\widetilde{\sigma}^2}{\widehat{\sigma}_j^2}\right). \end{aligned}$$

Vieme, že **testovacia štatistika pomerom vierohodnosti** $U_{\mathrm{LR}} = -2\ln(\lambda(\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \ldots, \mathbf{Y}_J)) \overset{\mathcal{D}}{\approx} \chi^2_{J-1}$. Realizáciou U_{LR} je u_{LR}.
Potom p-hodnota = $\Pr(U_{\mathrm{LR}} \geq u_{\mathrm{LR}}|H_0)$.

Asymptotické testy o stredných hodnotách

Bartlettova modifikácia testu pomerom vierohodnosti o homogenite rozptylov

Bartlett (1937) modifikoval testovaciu štatistiku pomerom vierohodnosti nasledovne

$$U_{\mathrm{B}} = \frac{U_{\mathrm{LR}}^{(\mathrm{alt})}}{C} \overset{\mathcal{D}}{\approx} \chi^2_{J-1},$$

kde

$$U_{\mathrm{LR}}^{(\mathrm{alt})} = \sum_{j=1}^J (n_j - 1)\ln\left(\frac{\widetilde{S}^2}{S_j^2}\right), \widetilde{s}^2 = \frac{\sum_{j=1}^J (n_j - 1)\, S_j^2}{\sum_{j=1}^J (n_j - 1)},$$

S_j^2 sú výberové rozptyly a

$$C = 1 + \frac{1}{3(J-1)}\left(\sum_{j=1}^J \frac{1}{n_j - 1} - \frac{1}{\sum_{j=1}^J (n_j - 1)}\right).$$

U_{B} konverguje ku χ^2_{J-1} rozdeleniu rýchlejšie ako U_{LR}. Realizáciou U_{B} je u_{B}.
Potom p-hodnota = $\Pr(U_{\mathrm{B}} \geq u_{\mathrm{B}}|H_0)$.

Asymptotické testy o stredných hodnotách

Bartlettova modifikácia testu pomerom vierohodnosti o homogenite rozptylov v R

Argumenty (vstupy) funkcie `bartlett.test()`:

1. `x` – objekt `lm(y~x)` alebo len vektor pozorovaní `y`;
2. `g` – vektor príslušnosti do skupín `x`, ak (1) je vektor pozorovaní `y`, inak nie je potrebné tento argument uvádzať;
3. `formula` v podobe `y~x`, ak nie je uvedené (1) a (2);
4. `data` v podobe dátovej tabuľky, ak (1) až (3) používajú stĺpce z dátovej tabuľky.

Výstupy funkcie `bartlett.test()`:

1. `statistic` – Bartlettova štatistika $U_{\mathrm{LR}}^{(\mathrm{alt})}$;
2. `df` – stupňe voľnosti $J-1$;
3. `p.value` – p-hodnota.

Príklad (Test pomerom vierohodnosti o homogenite rozptylov)

Naprogramujte v R testom pomerom vierohodnosti o homogenite rozptylov.

Príklad (Test homogenity rozptylov)

Majme koncentráciu stroncia Sr (mg/ml) v piatich vodných celkoch. Otestujte homogenitu rozptylov (A) testom pomerom vierohodnosti a (B) Bartlettovou modifikáciou testu pomerom vierohodnosti.

Asymptotické testy o stredných hodnotách

Dvojfaktorový ANOVA model s fixnými efektami

Nech $Y_{ijk} \sim N(\mu_{ij}, \sigma_{ij}^2)$, kde $i = 1, 2, \ldots, I$, $j = 1, 2, \ldots, J$ a $k = 1, 2, \ldots, n_{ij}$, sú nezávislé náhodné premenné. Budeme rozlišovať dve situácie

1. $Y_{ijk} \sim N(\mu_{ij}, \sigma^2)$, kde $\sigma_{11}^2 = \sigma_{12}^2 = \ldots = \sigma_{IJ}^2 = \sigma_e^2$ (**homogenita rozptylov**), σ_{ij}^2 sú neznáme a
2. $Y_{ijk} \sim N(\mu_{ij}, \sigma_{ij}^2)$, kde existuje aspoň jedna dvojica rozptylov, ktoré sa nerovnajú (**nehomogenita rozptylov**), σ_{ij}^2 sú neznáme.

V špeciálnom prípade $n_{ij} = K$, t.j. ide o situáciu, kde sú všetky **rozsahy homogénne**.

Asymptotické testy o stredných hodnotách
Dvojfaktorový ANOVA model s fixnými efektami

Nech $Y_{ijk} \sim N(\mu_{ij}, \sigma_{ij}^2)$, kde $\sigma_{11}^2 = \sigma_{12}^2 = \ldots = \sigma_{IJ}^2 = \sigma_e^2$ a zároveň σ_{ij}^2 sú neznáme. Majme **dvojfaktorový model analýzy rozptylu (ANOVA) s fixnými (pevnými) efektami**, ozn. $\mathcal{F}_{H_1}$, definovaný ako

$$Y_{ijk} = \mu_{ij} + \varepsilon_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{ijk},$$

kde $\mu = \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} \mu_{ij}/(IJ)$, $\mu_{i\cdot} = \mu + \alpha_i$, $\mu_{\cdot j} = \mu + \beta_j$, $\sum_{i=1}^{I} n_i \alpha_i = 0$, $\sum_{j=1}^{J} n_j \beta_j = 0$, μ je **celková (spoločná) úroveň spoločná všetkým populáciám** (alebo **celková stredná hodnota**), α_i je ***i*-ta úroveň faktora *A* (*i*-ty efekt faktora *A*)** a znamená odchýlku strednej hodnoty i-tej populácie od μ, β_j je ***j*-ta úroveň faktora *B* (*j*-ty efekt faktora *B*)** a znamená odchýlku strednej hodnoty j-tej populácie od μ. Pre chyby ε_{ijk} platí $\varepsilon_{ijk} \sim N\left(0, \sigma_e^2\right)$. Model $Y_{ijk} \sim N(\mu + \alpha_i + \beta_j, \sigma_e^2)$ sa nazýva aj **model podmieneného normálneho rozdelenia**.

Asymptotické testy o stredných hodnotách
Dvojfaktorový ANOVA model s fixnými efektami

Majme dvojicu hypotéz H_0: $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_I = 0$ oproti H_1: existuje aspoň jedno $i < j$ ($i = 1, 2, \ldots, J-1$; $j = 1, 2, \ldots, J$) také, že $\alpha_i \neq \alpha_j$. Ak H_0 platí,

$$F_{W,A} = \frac{\frac{SS_A}{df_A}}{\frac{SS_e}{df_e}} \overset{\mathcal{D}}{\sim} F_{df_A, df_e},$$

kde $df_A = I - 1$, $df_e = n - I - J + 1$ sú stupne voľnosti, $n = \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} n_{ij}$ (za platnosi homogenity rozsahov $n = IJK$) je celkový rozsah, n_{ij} sú rozsahy jednotlivých výberov.

Majme ďalšiu dvojicu hypotéz H_0: $\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_J = 0$ oproti H_1: existuje aspoň jedno $i < j$ ($i = 1, 2, \ldots, J-1$; $j = 1, 2, \ldots, J$) také, že $\beta_i \neq \beta_j$. Ak H_0 platí,

$$F_{W,B} = \frac{\frac{SS_B}{df_B}}{\frac{SS_e}{df_e}} \overset{\mathcal{D}}{\sim} F_{df_B, df_e},$$

kde $df_B = J - 1$.

Asymptotické testy o stredných hodnotách
Dvojfaktorový ANOVA model s fixnými efektami

Nech $\widehat{\mu}_{i\cdot} = \overline{Y}_{i\cdot\cdot} = Y_{i\cdot\cdot}/(JK)$, $\widehat{\mu}_{\cdot j} = \overline{Y}_{\cdot j\cdot} = Y_{\cdot j\cdot}/(IK)$, $\widehat{\mu} = \overline{Y}_{\ldots} = \frac{Y_{\ldots}}{IJK}$, $Y_{\ldots} = \sum_{j=1}^{J} Y_{\cdot j\cdot} = \sum_{i=1}^{I} Y_{I\cdot\cdot}$, $Y_{i\cdot\cdot} = \sum_{k=1}^{K} \sum_{j=1}^{J} Y_{ijk}$, $Y_{\cdot j\cdot} = \sum_{k=1}^{K} \sum_{i=1}^{I} Y_{ijk}$, $\forall i, j$. Ďalej dostaneme $\widehat{\mu}_{ij\cdot} = \overline{Y}_{ij\cdot} = \frac{Y_{ij\cdot}}{K}$, $Y_{ij\cdot} = \sum_{k=1}^{K} Y_{ijk}$. Potom $\widehat{\alpha}_i = \widehat{\mu}_{i\cdot} - \widehat{\mu}$, $\widehat{\beta}_j = \widehat{\mu}_{\cdot j} - \widehat{\mu}$.

SS_A je **výberový súčet štvorcov rozdielov medzi súbormi faktora** *A* a je definovaný ako

$$SS_A = JK \sum_{i=1}^{I} \left(\overline{Y}_{i\cdot\cdot} - \overline{Y}_{\ldots}\right)^2 = \sum_{i=1}^{I} \frac{Y_{i\cdot\cdot}^2}{JK} - \frac{Y_{\ldots}^2}{IJK},$$

SS_B je **výberový súčet štvorcov rozdielov medzi súbormi faktora** *B* a je definovaný ako

$$SS_B = IK \sum_{j=1}^{J} \left(\overline{Y}_{\cdot j\cdot} - \overline{Y}_{\ldots}\right)^2 = \sum_{j=1}^{J} \frac{Y_{\cdot j\cdot}^2}{IK} - \frac{Y_{\ldots}^2}{IJK},$$

Asymptotické testy o stredných hodnotách
Dvojfaktorový ANOVA model s fixnými efektami

SS_e je **výberový súčet štvorcov rozdielov vnútri súborov** a je definovaný ako

$$\begin{aligned} SS_e &= \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} \sum_{k=1}^{K} \left(Y_{ijk} - \overline{Y}_{i\cdot\cdot} - \overline{Y}_{\cdot j\cdot} + \overline{Y}_{\ldots}\right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} \sum_{k=1}^{K} Y_{ijk}^2 - \sum_{i=1}^{I} \frac{Y_{i\cdot\cdot}^2}{JK} - \sum_{j=1}^{J} \frac{Y_{\cdot j\cdot}^2}{IK} + \frac{Y_{\ldots}^2}{IJK}. \end{aligned}$$

Súčet SS_A, SS_B a SS_e sa rovná SS_T, čo je **celkový výberový súčet štvorcov rozdielov** a je definovaný ako

$$SS_T = \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} \sum_{k=1}^{K} \left(Y_{ijk} - \overline{Y}_{\ldots}\right)^2 = \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} \sum_{k=1}^{K} Y_{ijk}^2 - \frac{Y_{\ldots}^2}{IJK}.$$

Rovnosti $SS_T = SS_A + SS_B + SS_e$ hovoríme aj *rozklad celkovej sumy štvorcov*. Pre stupne voľnosti potom platí $df_T = df_A + df_B + df_e$, kde $df_T = n - 1$, $df_A = I - 1$, $df_B = J - 1$, $df_e = n - I - J + 1$.

Asymptotické testy o stredných hodnotách
Dvojfaktorový ANOVA model s fixnými efektami

Sumy štvorcov sa najčastejšie zapisujú do **ANOVA tabuľky**:

zdroj variability	suma štvorcov	df	priemerné štvorce
medzi súbormi A	$SS_{A,\text{obs}}$	df_A	$MS_A = SS_{A,\text{obs}}/df_A$
medzi súbormi B	$SS_{B,\text{obs}}$	df_B	$MS_B = SS_{B,\text{obs}}/df_B$
vnútri súborov	$SS_{e,\text{obs}}$	df_e	$MS_e = SS_{e,\text{obs}}/df_e$
celkovo	$SS_{T,\text{obs}}$	df_T	

$$MS_{e,\text{obs}} = \widehat{\sigma}_e^2 = s^2$$

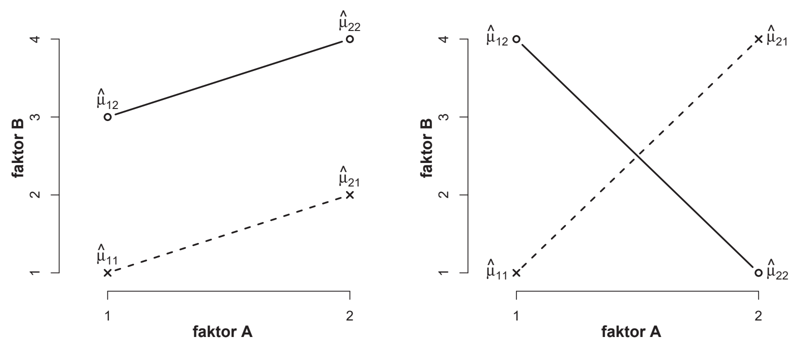
Asymptotické testy o stredných hodnotách
Dvojfaktorový ANOVA model s fixnými efektami s interakciou

Nech $Y_{ijk} \sim N(\mu_{ij}, \sigma_{ij}^2)$, kde $\sigma_{11}^2 = \sigma_{12}^2 = \ldots = \sigma_{IJ}^2 = \sigma_e^2$ a zároveň σ_{ij}^2 sú neznáme. Majme **dvojfaktorový model analýzy rozptylu (ANOVA) s fixnými (pevnými) efektami s interakciou**, ozn. $\mathcal{F}_{H_1}$, definovaný ako

$$Y_{ijk} = \mu_{ij} + \varepsilon_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk},$$

kde $\mu = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\mu_{ij}/(IJ)$, $\mu_{i.} = \mu + \alpha_i$, $\mu_{.j} = \mu + \beta_j$, $\gamma_{ij} = (\alpha\beta)_{ij}$, $\sum_{i=1}^{I} n_i\alpha_i = 0$, $\sum_{j=1}^{J} n_j\beta_j = 0$, $\sum_{i=1}^{I} n_{ij}(\alpha\beta)_{ij} = \sum_{j=1}^{J} n_{ij}(\alpha\beta)_{ij} = 0$, μ je **celková (spoločná) úroveň spoločná všetkým populáciám** (alebo **celková stredná hodnota**), α_i je **i-ta úroveň faktora A** (**i-ty efekt faktora A**) a znamená odchýlku strednej hodnoty i-tej populácie od μ, β_j je **j-ta úroveň faktora B** (**j-ty efekt faktora B**) a znamená odchýlku strednej hodnoty j-tej populácie od μ, $(\alpha\beta)_{ij}$ je **ij-ta úroveň interakcie faktora A a faktora B**. Pre chyby ε_{ijk} platí $\varepsilon_{ijk} \sim N\left(0, \sigma_e^2\right)$. Model $Y_{ijk} \sim N(\mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij}, \sigma_e^2)$ sa nazýva aj **model podmieneného normálneho rozdelenia**.

Asymptotické testy o stredných hodnotách
Dvojfaktorový ANOVA model s fixnými efektami s interakciou



Obr.: Grafické znázornenie interakcie faktora A a B

Asymptotické testy o stredných hodnotách
Dvojfaktorový ANOVA model s fixnými efektami s interakciou

Majme dvojicu hypotéz $H_0 : (\alpha\beta)_{ij} = 0$ pre $\forall i, j$ oproti H_1: existuje aspoň jedno i, j ($i = 1, 2, \ldots, I$; $j = 1, 2, \ldots, J$) také, že $(\alpha\beta)_{ij} \neq 0$. Ak H_0 platí,

$$F_{W,AB} = \frac{\frac{SS_{AB}}{df_{AB}}}{\frac{SS_e}{df_e}} \overset{\mathcal{D}}{\sim} F_{df_{AB}, df_e},$$

kde $df_{AB} = (I-1)(J-1)$, $df_e = n - IJ$ sú stupne voľnosti.

Nech $\widehat{(\alpha\beta)}_{ij} = \widehat{\mu}_{ij.} - \widehat{\mu}_{i.} - \widehat{\mu}_{.j} + \widehat{\mu}$.

SS_{AB} je **výberový súčet štvorcov pre interakciu faktora A a B** a je definovaný ako

$$\begin{aligned} SS_{AB} &= K\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\left(\overline{Y}_{ij.} - \overline{Y}_{i..} - \overline{Y}_{.j.} + \overline{Y}_{...}\right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\frac{Y_{ij.}^2}{K} - \sum_{i=1}^{I}\frac{Y_{i..}^2}{JK} - \sum_{j=1}^{J}\frac{Y_{.j.}^2}{IK} + \frac{Y_{...}^2}{IJK}. \end{aligned}$$

SS_e je **výberový súčet štvorcov rozdielov vnútri súborov** a je definovaný ako

$$SS_e = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K}\left(Y_{ijk} - \overline{Y}_{ij\cdot}\right)^2 = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K} Y_{ijk}^2 - \frac{Y_{ij\cdot}^2}{K}.$$

Rovnosti $SS_T = SS_A + SS_B + SS_{AB} + SS_e$ hovoríme aj *rozklad celkovej sumy štvorcov*. Pre stupne voľnosti potom platí $df_T = df_A + df_B + df_{AB} + df_e$, kde $df_T = n-1, df_A = I-1, df_B = J-1, df_{AB} = (I-1)(J-1), df_e = n - IJ$.

Sumy štvorcov sa najčastejšie zapisujú do **ANOVA tabuľky**:

zdroj variability	suma štvorcov	df	priemerné štvorce
medzi súbormi A	$SS_{A,\mathrm{obs}}$	df_A	$MS_A = SS_{A,\mathrm{obs}}/df_A$
medzi súbormi B	$SS_{B,\mathrm{obs}}$	df_B	$MS_B = SS_{B,\mathrm{obs}}/df_B$
interakcia AB	$SS_{AB,\mathrm{obs}}$	df_{AB}	$MS_{AB} = SS_{AB,\mathrm{obs}}/df_{AB}$
vnútri súborov	$SS_{e,\mathrm{obs}}$	df_e	$MS_e = SS_{e,\mathrm{obs}}/df_e$
celkovo	$SS_{T,\mathrm{obs}}$	df_T	

$$MS_{e,\mathrm{obs}} = \widehat{\sigma}_e^2 = s^2$$

Nech $Y_{ijk} \sim N(\mu_{ij}, \sigma_{ij}^2)$, kde $\sigma_{11}^2 = \sigma_{12}^2 = \ldots = \sigma_{IJ}^2 = \sigma_e^2$ a zároveň σ_{ij}^2 sú neznáme. Majme **hierarchický model analýzy rozptylu (ANOVA) s fixnými (pevnými) efektami**, ozn. $\mathcal{F}_{H_1}$, definovaný ako

$$Y_{ijk} = \mu_{ij} + \varepsilon_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_{j:i} + \varepsilon_{ijk},$$

kde $\mu = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\mu_{ij}/(IJ)$, $\mu_{i\cdot} = \mu + \alpha_i$, $\mu_{j:i} = \mu + \beta_{j:i}$, $\sum_{i=1}^{I} n_i\alpha_i = 0$, $\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J} n_{ij}\beta_{j:i} = 0$, μ je **celková (spoločná) úroveň spoločná všetkým populáciám** (alebo **celková stredná hodnota**), α_i je ***i*-ta úroveň faktora** A (***i*-ty efekt faktora** A) a znamená odchýlku strednej hodnoty i-tej populácie od μ, $\beta_{j:i} = \beta_{j|i}$ je ***j*-ta úroveň faktora** B (***j*-ty efekt faktora** B) **vnorená do *i*-tej úrovne faktora** A. Pre chyby ε_{ijk} platí $\varepsilon_{ijk} \sim N\left(0, \sigma_e^2\right)$. Model $Y_{ijk} \sim N(\mu + \alpha_i + \beta_{j:i}, \sigma_e^2)$ sa nazýva aj **model podmieneného normálneho rozdelenia.**

Majme ďalšiu dvojicu hypotéz $H_0: \beta_{j:i} = 0$ pre $\forall i, j$ oproti H_1: existuje aspoň jedno i, j také, že $\beta_{j:i} \neq 0$. Ak H_0 platí,

$$F_{W,B:A} = \frac{\frac{SS_{B:A}}{df_{B:A}}}{\frac{SS_e}{df_e}} \overset{\mathcal{D}}{\sim} F_{df_{B:A}, df_e},$$

kde $df_{B:A} = I(J-1)$.

$SS_{B:A}$ je **výberový súčet štvorcov rozdielov pre vnorený faktor** $B:A$ a je definovaný ako

$$SS_{B:A} = K\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\left(\overline{Y}_{ij\cdot} - \overline{Y}_{i\cdot\cdot}\right)^2 = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\frac{Y_{ij\cdot}^2}{K} - \frac{Y_{i\cdot\cdot}^2}{JK}.$$

SS_e je **výberový súčet štvorcov rozdielov vnútri súborov** a je definovaný ako

$$SS_e = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K}\left(Y_{ijk} - \overline{Y}_{ij\cdot}\right)^2 = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K} Y_{ijk}^2 - \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\frac{Y_{ij\cdot}^2}{K}.$$

Súčet SS_A, $SS_{B:A}$ a SS_e sa rovná SS_T. Rovnosti $SS_T = SS_A + SS_{B:A} + SS_e$ hovoríme aj *rozklad celkovej sumy štvorcov*. Pre stupne voľnosti potom platí $df_T = df_A + df_{B:A} + df_e$, kde $df_T = n-1, df_A = I-1, df_{B:A} = I(J-1), df_e = n - IJ$.

Sumy štvorcov sa najčastejšie zapisujú do **ANOVA tabuľky**:

zdroj variability	suma štvorcov	df	priemerné štvorce
medzi súbormi A	$SS_{A,\mathrm{obs}}$	df_A	$MS_A = SS_{A,\mathrm{obs}}/df_A$
medzi súbormi $B:A$	$SS_{B:A,\mathrm{obs}}$	$df_{B:A}$	$MS_{B:A} = SS_{B:A,\mathrm{obs}}/df_{B:A}$
vnútri súborov	$SS_{e,\mathrm{obs}}$	df_e	$MS_e = SS_{e,\mathrm{obs}}/df_e$
celkovo	$SS_{T,\mathrm{obs}}$	df_T	

$$MS_{e,\mathrm{obs}} = \widehat{\sigma}_e^2 = s^2$$

V praxi môže nastať situácia, že máme rôzne počty podtried B, t.j. $j = 1, 2, ...b_i$ úrovní v rámci triedy A_i, teda $b = \sum_{i=1}^{I} b_i$ a nevyvážený model, kedy máme namiesto K pozorovaní v každej podtriede n_{ij} pozorovaní, teda $n = \sum_{i=1}^{I} n_i = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J} n_{ij}, n_i = \sum_{j=1}^{J} n_{ij}$.

SS_A je **výberový súčet štvorcov rozdielov medzi súbormi faktora** A a je definovaný ako

$$SS_A = \sum_{i=1}^{I} n_i \left(\overline{Y}_{i..} - \overline{Y}_{...}\right)^2 = \sum_{i=1}^{I} \frac{Y_{i..}^2}{n_i} - \frac{Y_{...}^2}{n}.$$

$SS_{B:A}$ je **výberový súčet štvorcov rozdielov pre vnorený faktor** $B : A$ a je definovaný ako

$$SS_{B:A} = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J} n_{ij} \left(\overline{Y}_{ij.} - \overline{Y}_{i..}\right)^2 = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J} \frac{Y_{ij.}^2}{n_{ij}} - \frac{Y_{i..}^2}{n_i}.$$

SS_e je **výberový súčet štvorcov rozdielov vnútri súborov** a je definovaný ako

$$SS_e = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{n_{ij}} \left(Y_{ijk} - \overline{Y}_{ij.}\right)^2 = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{n_{ij}} Y_{ijk}^2 - \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J} \frac{Y_{ij.}^2}{n_{ij}}.$$

Súčet SS_A, $SS_{B:A}$ a SS_e sa rovná SS_T, čo je **celkový výberový súčet štvorcov rozdielov** a je definovaný ako

$$SS_T = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{n_{ij}} \left(Y_{ijk} - \overline{Y}_{...}\right)^2 = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{n_{ij}} Y_{ijk}^2 - \frac{Y_{...}^2}{n}.$$

Pre stupne voľnosti potom platí $df_T = df_A + df_{B:A} + df_e$, kde $df_T = n - 1, df_A = I - 1, df_{B:A} = b - I, df_e = n - b$.

Sumy štvorcov sa najčastejšie zapisujú do **ANOVA tabuľky**:

zdroj variability	suma štvorcov	df	priemerné štvorce
medzi súbormi A	$SS_{A,\mathrm{obs}}$	df_A	$MS_A = SS_{A,\mathrm{obs}}/df_A$
medzi súbormi $B : A$	$SS_{B:A,\mathrm{obs}}$	$df_{B:A}$	$MS_{B:A} = SS_{B:A,\mathrm{obs}}/df_{B:A}$
vnútri súborov	$SS_{e,\mathrm{obs}}$	df_e	$MS_e = SS_{e,\mathrm{obs}}/df_e$
celkovo	$SS_{T,\mathrm{obs}}$	df_T	

$$MS_{e,\mathrm{obs}} = \widehat{\sigma}_e^2 = s^2$$

Príklad (Tuk v mlieku)

Sledujeme percento tuku v mlieku dcér pochádzajúcich od rôznych býkov a matiek, kde percento tuku budeme označovať ako Y_{ijk} (upravené podľa Grofík a Fľak 1990). Býci budú predstavovať faktor A (tu $A_i, i = 1, 2, 3$), matky budú predstavovať faktor B (tu B_{ij_i}, kde B_{ij_i} sú matky pripárované býkom A_i, $j_1 = 3$, $j_2 = 2$, $j_3 = 3$. Testujte $H_0 : \beta_{j:i} = 0$ pre $\forall i, j$ oproti H_1: existuje aspoň jedno i, j také, že $\beta_{j:i} \neq 0$, t.j., že stredné hodnoty percenta tuku v mlieku dcér rôznych matiek od rovnakého otca sa nelíšia.

Asymptotické testy o stredných hodnotách

Hierarchický ANOVA model s fixnými efektami – príklad tuk v mlieku

A_i	A_1			A_2		A_3		
B_{ij_i}	B_{11}	B_{12}	B_{13}	B_{21}	B_{22}	B_{31}	B_{32}	B_{33}
Y_{ijk}	4.20	4.05	4.15	3.90	4.20	4.15	4.00	3.95
	4.05	4.15	4.25	3.95	4.15	4.05	4.10	4.10
	4.00	4.10	4.20	4.10	3.95	4.20	4.15	4.00
	4.10	4.25	4.25	4.00	4.00	4.00	3.95	3.85
	4.05	4.10	4.10		4.05		4.00	
	4.15							
n_{ij}	6	5	5	4	5	4	5	4
n_i	16			9		13		
$Y_{ij\cdot}$	24.52	20.65	20.95	15.95	20.35	16.40	20.20	15.90
$\overline{Y}_{ij\cdot}$	4.09	4.13	4.19	3.99	4.07	4.10	4.04	3.98
$Y_{i\cdot\cdot}$	66.12			36.30		52.50		
$Y_{\cdot\cdot\cdot}$	154.92							
S_{ij}	0.078	0.076	0.065	0.085	0.104	0.091	0.082	0.104

Asymptotické testy o stredných hodnotách

Hierarchický ANOVA model s fixnými efektami – príklad tuk v mlieku

ANOVA tabuľka:

zdroj variability	suma štvorcov	*df*	priemerné štvorce
medzi súbormi A	$SS_{A,\text{obs}} = 0.0855$	$df_A = 2$	$MS_A = 0.0429$
medzi súbormi $B:A$	$SS_{B:A,\text{obs}} = 0.0756$	$df_{B:A} = 5$	$MS_{B:A} = 0.0151$
vnútri súborov	$SS_{e,\text{obs}} = 0.2197$	$df_e = 30$	$MS_e = \widehat{\sigma}_e^2 = 0.0073$
celkovo	$SS_{T,\text{obs}} = 0.3810$	$df_T = 37$	

$$F_{W,B:A,\text{obs}} = \frac{\frac{SS_{B:A}}{df_{B:A}}}{\frac{SS_e}{df_e}} = \frac{\frac{0.0756}{5}}{\frac{0.2197}{30}} = \frac{0.0151}{0.0073} = 2.0635$$

$F_{df_{B:A},df_e}(\alpha) = F_{5,30}(0.05) = 2.5335$

p-hodnota = 0.098.

Asymptotické testy o stredných hodnotách

Kroneckerov súčin a jeho vlastnosti

Kroneckerov súčin. Nech $\mathbf{A}$ je matica $m \times n$, a $\mathbf{B}$ je matica $p \times q$. Potom $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ je matica $mp \times nq$, ktorej (i,j)-ty blok je rovný $a_{ij}\mathbf{B}$, teda

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{11}\mathbf{B} & a_{12}\mathbf{B} & \dots & a_{1n}\mathbf{B} \\ a_{21}\mathbf{B} & a_{22}\mathbf{B} & \dots & a_{2n}\mathbf{B} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}\mathbf{B} & a_{m2}\mathbf{B} & \dots & a_{mn}\mathbf{B} \end{pmatrix}$$

Pre Kroneckerov súčin platí

$$\mathbf{0} \otimes \mathbf{A} = \mathbf{A} \otimes \mathbf{0}$$
$$(\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2) \otimes \mathbf{B} = (\mathbf{A}_1 \otimes \mathbf{B}) + (\mathbf{A}_2 \otimes \mathbf{B})$$
$$\mathbf{A} \otimes (\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2) = (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}_1) + (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}_2)$$
$$c\mathbf{A} \otimes d\mathbf{B} = cd(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})$$
$$\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 \otimes \mathbf{B}_1\mathbf{B}_2 = (\mathbf{A}_1 \otimes \mathbf{B}_1)(\mathbf{A}_2 \otimes \mathbf{B}_2)$$
$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \otimes \mathbf{B}^{-1}, \text{ ak inverzie existujú}$$
$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T \otimes \mathbf{B}^T$$
$$(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \otimes \mathbf{C} = (\mathbf{A} \otimes \mathbf{C}, \mathbf{B} \otimes \mathbf{C})$$

Asymptotické testy o stredných hodnotách

Kroneckerov súčin v jednofaktorovom ANOVA modeli

Model $\mathcal{F}_{H_1}$ má tvar

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\beta + \varepsilon, \text{ kde } \mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_K & \mathbf{1}_K & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{1}_K & \mathbf{0} & \mathbf{1}_K & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \mathbf{1}_K & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{1}_K \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} \mu \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_J \end{pmatrix}, \varepsilon \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_J \end{pmatrix}.$$

Model $\mathcal{F}_{H_1}$ zapísaný pomocou Kroneckerovho súčinu má tvar

$$\mathbf{Y} = (\mathbf{1}_J \otimes \mathbf{1}_K)\mu + (\mathbf{I}_{J\times J} \otimes \mathbf{1}_K)\alpha + \varepsilon = (\mathbf{1}_J \otimes \mathbf{1}_K, \mathbf{I}_{J\times J} \otimes \mathbf{1}_K)\beta + \varepsilon.$$

Nech $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_J)^T$ a $\beta = (\mu, \alpha^T)^T$. Zápis vektora $\boldsymbol{\mu}$ pomocou Kroneckerovho súčinu je nasledovný

$$\boldsymbol{\mu} = (\mathbf{1}_J \otimes 1, \mathbf{I}_{J\times J} \otimes 1)\beta.$$

Vieme, že $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{B}$ a $\mathbf{B}\widetilde{\beta} = \beta$. Potom platí nasledovné

$$\boldsymbol{\mu} = (\mathbf{1}_J \otimes 1, \mathbf{I}_{J\times J} \otimes 1) \begin{pmatrix} (1 \otimes 1)\mu \\ (\mathbf{B} \otimes 1)\widetilde{\alpha} \end{pmatrix} = (\mathbf{1}_J \otimes 1, \mathbf{B} \otimes 1)\widetilde{\beta}.$$

Asymptotické testy o stredných hodnotách
Kroneckerov súčin v dvojfaktorovom ANOVA modeli bez interakcie

Preznačme vektor parametrov faktora $A = A_1$ na $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}_1$ a vektor parametrov faktora $B = A_2$ na $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha}_2$. Potom $\boldsymbol{\beta} = (\mu, \boldsymbol{\alpha}_1^T, \boldsymbol{\alpha}_2^T)^T$. Nech $\boldsymbol{\mu} = (\mu_{11}, \mu_{12}, \dots, \mu_{1I}, \mu_{21}, \dots, \mu_{2J})^T$. Zápis vektora $\boldsymbol{\mu}$ pomocou Kroneckerovho súčinu je nasledovný

$$\boldsymbol{\mu} = (\mathbf{1}_I \otimes \mathbf{1}_J, \mathbf{I}_{I\times I} \otimes \mathbf{1}_J, \mathbf{I}_{J\times J} \otimes \mathbf{1}_I)\boldsymbol{\beta}.$$

Nech matica kontrastov pre faktor A_j je $\mathbf{A}_j$ a jej inverzia $\mathbf{A}_j^{-1} = \mathbf{B}_j$, $j = 1, 2$. Potom platí nasledovné

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mu} &= (\mathbf{1}_I \otimes \mathbf{1}_J, \mathbf{I}_{I\times I} \otimes \mathbf{1}_J, \mathbf{I}_{J\times J} \otimes \mathbf{1}_I) \begin{pmatrix} (1 \otimes 1)\mu \\ (\mathbf{B}_1 \otimes 1)\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_1 \\ (1 \otimes \mathbf{B}_2)\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_2 \end{pmatrix} \\ &= (\mathbf{1}_I \otimes \mathbf{1}_J, \mathbf{B}_1 \otimes \mathbf{1}_J, \mathbf{1}_I \otimes \mathbf{B}_2)\widetilde{\boldsymbol{\beta}}. \end{aligned}$$

Asymptotické testy o stredných hodnotách
Kroneckerov súčin v dvojfaktorovom ANOVA modeli s interakciou

Preznačme vektor parametrov faktora $A = A_1$ na $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}_1$ a vektor parametrov faktora $B = A_2$ na $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\alpha}_{12}$. Potom $\boldsymbol{\beta} = (\mu, \boldsymbol{\alpha}_1^T, \boldsymbol{\alpha}_2^T, \boldsymbol{\alpha}_{12}^T)^T$. Nech $\boldsymbol{\mu} = (\mu_{11}, \mu_{12}, \dots, \mu_{1I}, \mu_{21}, \dots, \mu_{IJ})^T$. Zápis vektora $\boldsymbol{\mu}$ pomocou Kroneckerovho súčinu je nasledovný

$$\boldsymbol{\mu} = (\mathbf{1}_I \otimes \mathbf{1}_J, \mathbf{I}_{I\times I} \otimes \mathbf{1}_J, \mathbf{I}_{J\times J} \otimes \mathbf{1}_I, \mathbf{I}_{I\times I} \otimes \mathbf{I}_{J\times J})\boldsymbol{\beta}.$$

Nech matica kontrastov pre faktor A_j je $\mathbf{A}_j$ a jej inverzia $\mathbf{A}_j^{-1} = \mathbf{B}_j$, $j = 1, 2$. Nech matica kontrastov pre interakciu A_{12} je $\mathbf{A}_{12}$ a jej inverzia $\mathbf{A}_{12}^{-1} = \mathbf{B}_{12}$. Potom platí nasledovné

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mu} &= (\mathbf{1}_I \otimes \mathbf{1}_J, \mathbf{I}_{I\times I} \otimes \mathbf{1}_J, \mathbf{I}_{J\times J} \otimes \mathbf{1}_I, \mathbf{I}_{I\times I} \otimes \mathbf{I}_{J\times J}) \begin{pmatrix} (1 \otimes 1)\mu \\ (\mathbf{B}_1 \otimes 1)\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_1 \\ (1 \otimes \mathbf{B}_2)\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_2 \\ (\mathbf{B}_1 \otimes \mathbf{B}_2)\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_{12} \end{pmatrix} \\ &= (\mathbf{1}_I \otimes \mathbf{1}_J, \mathbf{B}_1 \otimes \mathbf{1}_J, \mathbf{1}_I \otimes \mathbf{B}_2, \mathbf{B}_1 \otimes \mathbf{B}_2)\widetilde{\boldsymbol{\beta}}. \end{aligned}$$

Asymptotické testy o stredných hodnotách
Testovanie submodelov v ANOVA – súhrn modelov

Majme nasledovné modely

$$\begin{aligned} \text{Model } \mathcal{F}_F &: Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk}, \\ \text{Model } \mathcal{F}_{AB} &: Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{ijk}, \\ \text{Model } \mathcal{F}_B &: Y_{ijk} = \mu + \beta_j + \varepsilon_{ijk}, \\ \text{Model } \mathcal{F}_A &: Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ijk}, \\ \text{Model } \mathcal{F}_N &: Y_{ijk} = \mu + \varepsilon_{ijk}, \end{aligned}$$

kde dolný index F znamená **plný model** (angl. *full*) a N **nulový model** (angl. *null*). Z vyššie uvedeného zoznamu modelov vždy bude pri testovaní nejakej H_0 oproti H_1 jeden model $\mathcal{F}_{H_0}$ a druhý $\mathcal{F}_{H_1}$. Ak sú modely **vyvážené**, t.j. $n_{ij} = K$, potom je situácia jednoduchá. Obe postupnosti testovania:

1. $\mathcal{F}_F \to \mathcal{F}_{AB} \to \mathcal{F}_B \to \mathcal{F}_N$ a
2. $\mathcal{F}_F \to \mathcal{F}_{AB} \to \mathcal{F}_A \to \mathcal{F}_N$,

sa líšia len zámenou I a J v SS. Ak je **model nevyvážený**, dostaneme výsledok pre každú postupnosť modelov iný.

Asymptotické testy o stredných hodnotách
Testovanie submodelov v ANOVA – sumy štvorcov

Majme nasledovné výberové sumy štvorcov v tzv. **R-notácii**

$$\mathcal{R}(\mathbf{1}, \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{AB}) = (\mathbf{Y} - \widehat{\boldsymbol{\mu}})^T(\mathbf{Y} - \widehat{\boldsymbol{\mu}}) = SS_e = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{n_{ij}} \left(Y_{ijk} - \overline{Y}_{ij\cdot}\right)^2$$

$$\mathcal{R}(\mathbf{1}, \mathbf{A}, \mathbf{B}) = (\mathbf{Y} - \widehat{\boldsymbol{\mu}}_{AB})^T(\mathbf{Y} - \widehat{\boldsymbol{\mu}}_{AB}) = SS_{AB} = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{n_{ij}} \left(Y_{ijk} - \overline{Y}_{i\cdot\cdot} - \overline{Y}_{\cdot j\cdot} + \overline{Y}_{\cdots}\right)^2$$

$$\mathcal{R}(\mathbf{1}, \mathbf{B}) = (\mathbf{Y} - \widehat{\boldsymbol{\mu}}_{B})^T(\mathbf{Y} - \widehat{\boldsymbol{\mu}}_{B}) = SS_{B} = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{n_{ij}} \left(Y_{ijk} - \overline{Y}_{\cdot j\cdot}\right)^2$$

$$\mathcal{R}(\mathbf{1}, \mathbf{A}) = (\mathbf{Y} - \widehat{\boldsymbol{\mu}}_{A})^T(\mathbf{Y} - \widehat{\boldsymbol{\mu}}_{A}) = SS_{A} = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{n_{ij}} \left(Y_{ijk} - \overline{Y}_{i\cdot\cdot}\right)^2$$

$$\mathcal{R}(\mathbf{1}) = (\mathbf{Y} - \widehat{\boldsymbol{\mu}}_{0})^T(\mathbf{Y} - \widehat{\boldsymbol{\mu}}_{0}) = SS_{T} = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{n_{ij}} \left(Y_{ijk} - \overline{Y}_{\cdots}\right)^2$$

Modely prislúchajúce daným výberovým sumám štvorcov sú v poradí $\mathcal{M} = \mathcal{M}_F, \mathcal{M}_{AB}, \mathcal{M}_B, \mathcal{M}_A$ a $\mathcal{M}_0 = \mathcal{M}_N$.

Asymptotické testy o stredných hodnotách

Testovanie submodelov v ANOVA – rozdiely súm štvorcov a tri typy rozkladov

Majme nasledovné sumy výberové štvorcov v tzv. **redukovanej R-notácii**

$$\mathcal{R}(\mathbf{AB}|\mathbf{1},\mathbf{A},\mathbf{B}) = \mathcal{R}(\mathbf{1},\mathbf{A},\mathbf{B}) - \mathcal{R}(\mathbf{1},\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{AB}) = (\widehat{\boldsymbol{\mu}} - \widehat{\boldsymbol{\mu}}_{AB})^T(\widehat{\boldsymbol{\mu}} - \widehat{\boldsymbol{\mu}}_{AB}) = SS_{AB} - SS_e$$

$$\mathcal{R}(\mathbf{A}|\mathbf{1},\mathbf{B}) = \mathcal{R}(\mathbf{1},\mathbf{B}) - \mathcal{R}(\mathbf{1},\mathbf{A},\mathbf{B}) = (\widehat{\boldsymbol{\mu}}_{AB} - \widehat{\boldsymbol{\mu}}_{B})^T(\widehat{\boldsymbol{\mu}}_{AB} - \widehat{\boldsymbol{\mu}}_{B}) = SS_{B} - SS_{AB}$$

$$\mathcal{R}(\mathbf{B}|\mathbf{1},\mathbf{A}) = \mathcal{R}(\mathbf{1},\mathbf{A}) - \mathcal{R}(\mathbf{1},\mathbf{A},\mathbf{B}) = (\widehat{\boldsymbol{\mu}}_{AB} - \widehat{\boldsymbol{\mu}}_{A})^T(\widehat{\boldsymbol{\mu}}_{AB} - \widehat{\boldsymbol{\mu}}_{A}) = SS_{A} - SS_{AB}$$

$$\mathcal{R}(\mathbf{B}|\mathbf{1}) = \mathcal{R}(\mathbf{1}) - \mathcal{R}(\mathbf{1},\mathbf{B}) = (\widehat{\boldsymbol{\mu}}_{B} - \widehat{\boldsymbol{\mu}}_{0})^T(\widehat{\boldsymbol{\mu}}_{B} - \widehat{\boldsymbol{\mu}}_{0}) = SS_{T} - SS_{B}$$

$$\mathcal{R}(\mathbf{A}|\mathbf{1}) = \mathcal{R}(\mathbf{1}) - \mathcal{R}(\mathbf{1},\mathbf{A}) = (\widehat{\boldsymbol{\mu}}_{A} - \widehat{\boldsymbol{\mu}}_{0})^T(\widehat{\boldsymbol{\mu}}_{A} - \widehat{\boldsymbol{\mu}}_{0}) = SS_{T} - SS_{A}$$

$$\mathcal{R}(\mathbf{B}|\mathbf{1},\mathbf{A},\mathbf{AB}) = \mathcal{R}(\mathbf{1},\mathbf{A},\mathbf{AB}) - \mathcal{R}(\mathbf{1},\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{AB})$$

$$\mathcal{R}(\mathbf{A}|\mathbf{1},\mathbf{B},\mathbf{AB}) = \mathcal{R}(\mathbf{1},\mathbf{B},\mathbf{AB}) - \mathcal{R}(\mathbf{1},\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{AB})$$

ANOVA tabuľku potom vytvárame pre tri rôzne rozklady sumy štvorcov (angl. *ANOVA Type I*, *ANOVA Type II*, *ANOVA Type III*)

	Rozklad typu I	Rozklad typu II	Rozklad typu III
AB	$\mathcal{R}(\mathbf{AB}\|\mathbf{1},\mathbf{A},\mathbf{B})$	$\mathcal{R}(\mathbf{AB}\|\mathbf{1},\mathbf{A},\mathbf{B})$	$\mathcal{R}(\mathbf{AB}\|\mathbf{1},\mathbf{A},\mathbf{B})$
B	$\mathcal{R}(\mathbf{B}\|\mathbf{1},\mathbf{A})$	$\mathcal{R}(\mathbf{B}\|\mathbf{1},\mathbf{A})$	$\mathcal{R}(\mathbf{B}\|\mathbf{1},\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{AB})$
A	$\mathcal{R}(\mathbf{A}\|\mathbf{1})$	$\mathcal{R}(\mathbf{A}\|\mathbf{1},\mathbf{B})$	$\mathcal{R}(\mathbf{A}\|\mathbf{1},\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{AB})$

Asymptotické testy o stredných hodnotách

Testovanie submodelov v ANOVA – submodel vs nadmodel, nulové hypotézy

Testujeme nasledovné **submodely** voči **nadmodelom**

	Rozklad typu I	Rozklad typu II	Rozklad typu III
AB	$\mathcal{F}_{AB}$ vs $\mathcal{F}_{F}$	$\mathcal{F}_{AB}$ vs $\mathcal{F}_{F}$	$\mathcal{F}_{AB}$ vs $\mathcal{F}_{F}$
B	$\mathcal{F}_{A}$ vs $\mathcal{F}_{AB}$	$\mathcal{F}_{A}$ vs $\mathcal{F}_{AB}$	$\mathcal{F}_{F-A}$ vs $\mathcal{F}_{F}$
A	$\mathcal{F}_{N}$ vs $\mathcal{F}_{A}$	$\mathcal{F}_{B}$ vs $\mathcal{F}_{AB}$	$\mathcal{F}_{F-B}$ vs $\mathcal{F}_{F}$

kde

$$\text{Model } \mathcal{F}_{F-A} : Y_{ijk} = \mu + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk},$$

$$\text{Model } \mathcal{F}_{F-B} : Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + (\alpha\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk}.$$

Testujeme nasledovné **nulové hypotézy**

	Rozklad typu I	Rozklad typu II	Rozklad typu III
AB	$(\alpha\beta)_{ij} = 0$ pre $\forall i,j$	$(\alpha\beta)_{ij} = 0$ pre $\forall i,j$	$(\alpha\beta)_{ij} = 0$ pre $\forall i,j$
B	$\beta_j = 0$ pre $\forall j$	$\beta_j = 0$ pre $\forall j$	$\beta_j = 0$ pre $\forall j$
A	$\alpha_i = 0$ pre $\forall i$	$\alpha_i = 0$ pre $\forall i$	$\alpha_i = 0$ pre $\forall i$

Ide teda o testy rovnakých nulových hypotéz, ktoré testujeme pomocou rôznych súm štvorcov, t.j. na testovanie používame rôzne submodely a nadmodely.

Asymptotické testy o stredných hodnotách

Literatúra

- Azzalini, A., 1996: *Statistical inference based on likelihood*. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC Press
- Casella, G., Berger, R.L., 2002: *Statistical Inference*. Pacific Grove: Duxbury Press
- Fisher, R.A., 1935: The Design of Experiments. London: Macmillan
- Fox, J. 2016: *Applied Regression Analysis and Generalised Linear Models*. Los Angeles: Sage
- Grofík, R., Fľak, P. 1990: *Štatistické modely v poľnohospodárstve*. Bratislava: Príroda
- Katina, S., Králík, M., Hupková, A., 2015: *Aplikovaná štatistická inferencia I. Biologická antropológia očami matematickej štatistiky*. Brno: Masarykova univerzita
- Kirk, R.E., 1982: Experimental Design: Procedures for the Behavioral Sciences. Belmont: Wadsworth
- Scheffé, 1953: *The Analysis of Variance*. Hoboken: John Wiley Sons
- Zvára, K., 2008: *Regrese*. Praha: Matfyzpress

Asymptotické testy o stredných hodnotách

Literatúra

- Bartlett, M.S. 1937: Properties of sufficiency and statistical tests. *Proceedings of the Royal Statistical Society, Series A* 160: 268−282
- Bonferroni, C.E., 1936: *Teoria statistica delle classi e calcolo delle probabilita*. Firenze: Libreria Internazionale Seeber
- Fisher, R.A., 1936, 1971: The use of multiple measurements in taxonomic problems. *Annals of Eugenics* 7: 179–188
- Satterthwaite, F.E., 1946: An Approximate Distribution of Estimates of Variance Components. *Biometrics Bulletin* 2,6: 110–114
- Šidák, Z., 1967: Rectangular Confidence Regions for the Means of Multivariate Normal Distributions. *Journal of the American Statistical Association* 62(318): 626–633
- Tukey, J.W., 1949: Comparing Individual Means in the Analysis of Variance. *Biometrics* 5(2): 99–114
- Tukey, J.W., 1953: The problem of multiple comparisons. Unpublished manuscript. In *The Collected Works of John W. Tukey VIII. Multiple Comparisons: 1948–1983*. New York: Chapman & Hall
- Welch, B.L., 1947: The generalization of Student's problem when several different population variances are involved. *Biometrika* 34(1–2): 28–35