Zadání příkladů – Statistická inference II – 2017

Příklad 1. Směs dvou normálních rozdělení Nechť náhodná veličina X pochází ze směsi dvou normálních rozdělení $X \sim [pN(\mu_1, \sigma_1^2) + (1-p)N(\mu_2, \sigma_2^2)]$. Potom marginální hustota náhodné veličina X má tvar

$$f(x_i, \boldsymbol{\theta}) = \sum_{b_i \in \{0,1\}} f(x_i, b_i, \boldsymbol{\theta}) = f(x_i, 1, \boldsymbol{\theta}_1) + f(x_i, 0, \boldsymbol{\theta}_2),$$

kde

$$f(x_i, 1, \boldsymbol{\theta}_1) = \frac{p}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp\left(-\frac{(x_i - \mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right)$$

je sdružená hustota za podmínky, že data pochází z první skupiny a

$$f(x_i, 0, \boldsymbol{\theta}_2) = \frac{1-p}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} \exp\left(-\frac{(x_i - \mu_2)^2}{2\sigma_2^2}\right)$$

je sdružená hustota za podmínky, že data pochází z druhé skupiny.

Logaritmická věrohodnostní funkce náhodné veličiny X má tvar

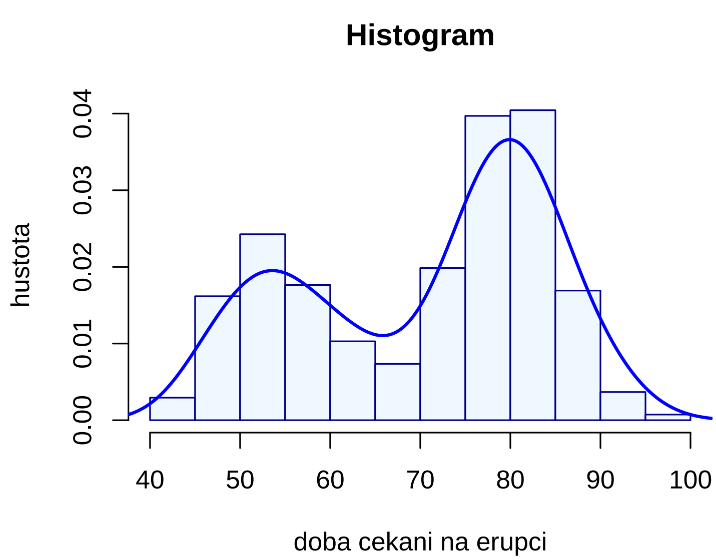
$$L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \boldsymbol{\theta}).$$

Příklad 2. Odhad parametrů směsi dvou normálních rozdělení

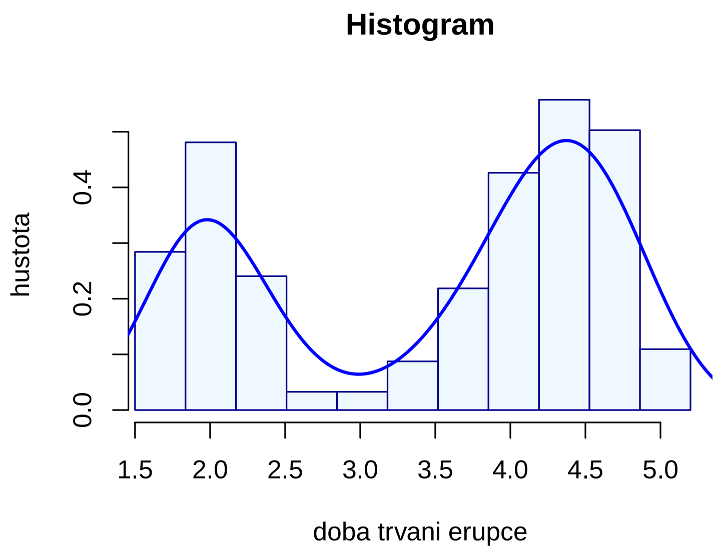
1. Načtěte datový soubor `faithful` obsahující údaje o době čekání na erupci (`waiting`) a o době trvání erupce (`eruption`), přičemž se zaměřte na proměnnou `waiting`.
2. Nakreslete histogram doby čekání na erupci a superponujte jej křivkou jádrového odhadu.
3. Pomocí funkce `optim()` odhadněte parametry p, μ_1, μ_2, σ_1^2, σ_2^2 smíšeného rozdělení $[pN(\mu_1, \sigma_1^2)+(1-p)N(\mu_2, \sigma_2^2)]$ náhodné proměnné `waiting`.
4. Pomocí funkce `optim()` nalezněte rozptyly odhadů parametrů $\widehat{p}$, $\widehat{\mu_1}$, $\widehat{\mu_2}$, $\widehat{\sigma_1^2}$, $\widehat{\sigma_2^2}$.

Body 1.–3. aplikujte také na proměnnou `eruption`.

a)
```
##          p     mu1 sigma1     mu2 sigma2
## MLE 0.3609 54.6145 5.8698 80.0908 5.8682
## Var 0.0010  0.4893 0.2884  0.2547 0.1608
```



b)
```
##          p    mu1 sigma1    mu2 sigma2
## MLE 0.3482 2.0183 0.2356 4.2733 0.4370
## Var 0.0009 0.0007 0.0005 0.0012 0.0007
```



Příklad 3. Dvourozměrná Newton-Raphsonova metoda Nechť náhodná veličina X pochází z normálního rozdělení se střední hodnotou μ a rozptylem σ^2, tj. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Hustota náhodné veličiny X má tvar

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right).$$

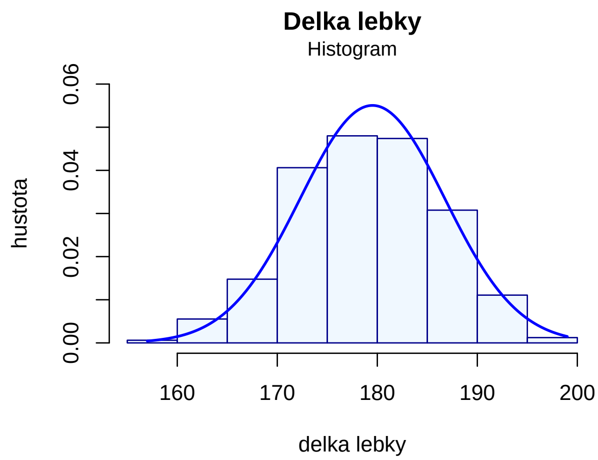
1. Odvoďte tvar věrohodnostní a logaritmické věrohodnostní funkce pro $N(\mu, \sigma^2)$.
2. Odvoďte tvar skóre funkce pro parametr μ a pro parametr σ (ne σ^2!!!).
3. Odvoďte tvary druhých parciálních derivací logaritmické věrohodnostní funkce podle parametrů μ a σ (celkem 4).
4. Naprogramujte v R dvourozměrnou Newton-Raphsonovu metodu pro normální rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$. Funkci pojmenujte `NMnorm`.

Naprogramovanou funkci nyní vyzkoušíme na reálných datech.

5. Načtěte datový soubor *one-sample-mean-skull-mf.txt*.
6. Vykreslete histogram proměnné délka lebky (`skull.L`).
7. Pomocí naprogramované funkce `NMnorm` odhadněte parametr μ a σ proměnné `skull.L`.
8. Odhady získané pomocí funkce `NMnorm` porovnejte s bodovými odhady parametrů μ a σ.
9. Body 6–8 aplikujte také na proměnnou šířka lebky (`skull.B`).

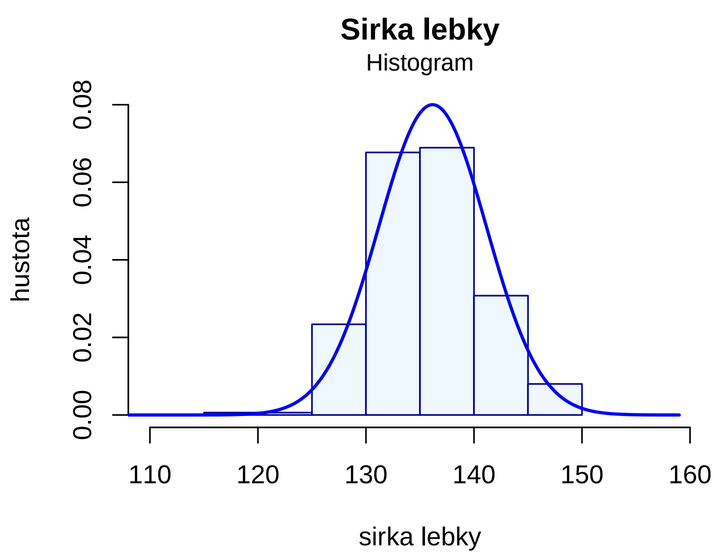
a) Délka lebky

```
##                         mu  sigma
## Newtonova metoda 179.5169 7.1390
## exaktni vypocet  179.5169 7.2249
```



b) Šířka lebky

```
##                         mu  sigma
## Newtonova metoda 136.1662 4.9247
## exaktni vypocet  136.1662 4.9708
```



Příklad 4. Broydenova metoda

1. Naprogramujte v R Broydenovu metodu (dvourozměrnou metodu sečen) pro normální rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$. Funkci pojmenujte BrMnorm().
2. Načtěte datový soubor *one-sample-mean-skull-mf.txt*.
3. Pomocí funkce BrMnorm() získejte odhady parametrů μ a σ délky lebky skull.L.
4. Pomocí funkce BrMnorm() získejte odhady parametrů μ a σ šířky lebky skull.B.

3. Broydenova metoda aplikovaná na proměnnou skull.L

```
##                         mu  sigma
## Broydenova metoda 179.5174 7.2333
## exaktni vypocet   179.5169 7.2249
```

4. Broydenova metoda aplikovaná na proměnnou skull.B

```
##                         mu  sigma
## Broydenova metoda 136.1481 5.0360
## exaktni vypocet   136.1662 4.9708
```

Příklad 5. MC experiment pro Waldovy empirické intervaly spolehlivosti Nechť

(a) $X \sim N(0,1)$;

(b) $X \sim pN(0,1) + (1-p)N(0,4)$, kde $p = 0.9$, tedy jde o směs dvou normálních rozdělení $X \sim N(0,1)$ a $X \sim N(0,4)$ v poměru $9:1$.

Pro obě části (a) i (b) Vygenerujte $M = 100$ náhodných výběrů s rozsahem $n = 500$ a vypočítejte:

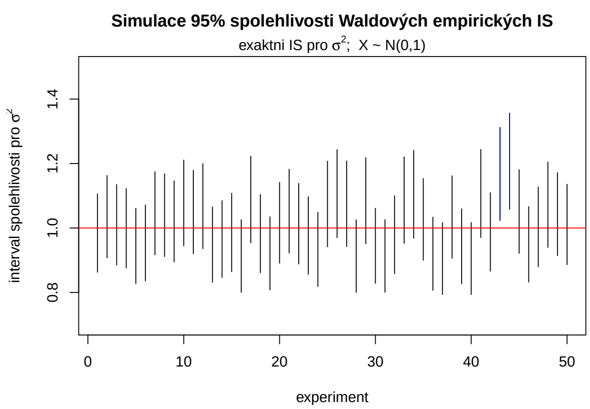
1. Waldovy exaktní empirické $100(1-\alpha)\,\%$ IS pro rozptyl σ^2, když μ neznáme.
2. Waldovy asymptotické empirické $100(1-\alpha)\,\%$ IS pro rozptyl σ^2, když μ neznáme.
3. Waldovy asymptotické empirické $100(1-\alpha)\,\%$ IS pro směrodatnou odchylkul σ, když μ neznáme.

Vždy spočítejte, kolik IS obsahuje rozptyl $\sigma^2 = 1$ (resp. směrodatnou odchylku $\sigma = 1$). Toto číslo podělené hodnotou M představuje simulovanou hladinu významnosti α.

a) $X \sim N(0,1)$

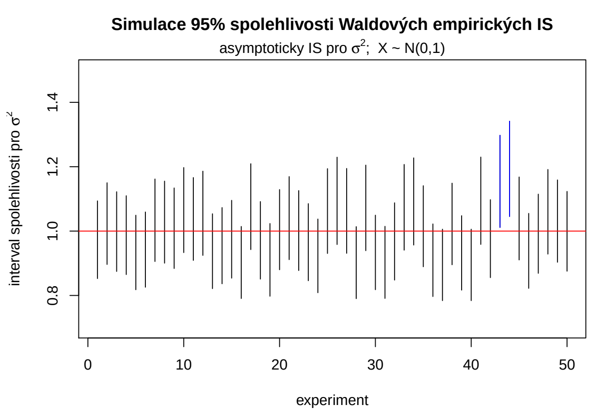
1. Waldovy exaktní empirické $100(1-\alpha)\,\%$ IS pro rozptyl σ^2, když μ neznáme.

```
##                      n
## simulovany pocet 48.0
## presny pocet     47.5
```



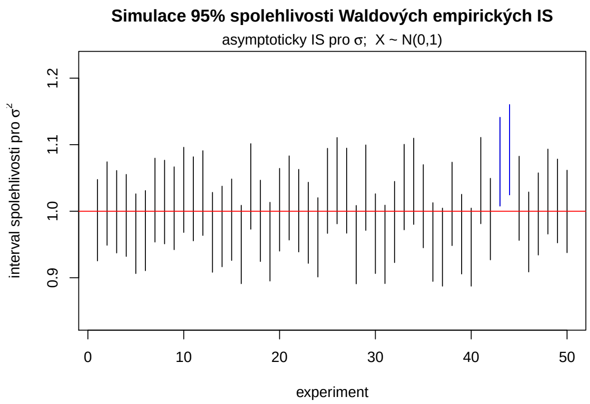
2. Waldovy asymptotické empirické $100(1-\alpha)\,\%$ IS pro rozptyl σ^2, když μ neznáme.

```
##                      n
## simulovany pocet 48.0
## presny pocet     47.5
```



3. Waldovy asymptotické empirické $100(1-\alpha)\,\%$ IS pro směrodatnou odchylkul σ, když μ neznáme.

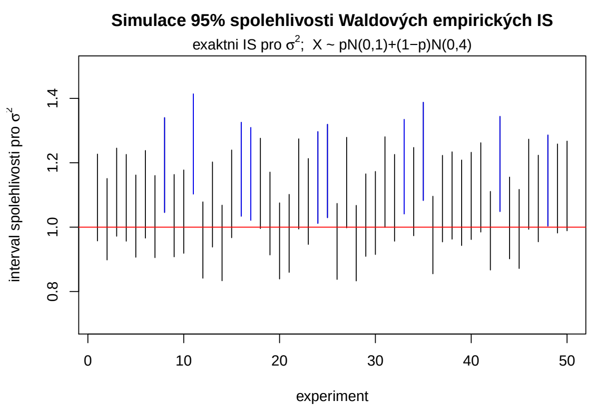
```
##                      n
## simulovany pocet 48.0
## presny pocet     47.5
```



b) $X \sim pN(0,1) + (1-p)N(0,4)$

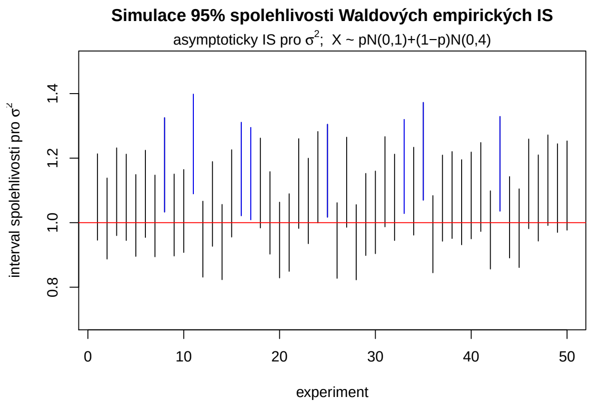
1. Waldovy exaktní empirické $100(1-\alpha)\,\%$ IS pro rozptyl σ^2, když μ neznáme.

```
##                      n
## simulovany pocet 40.0
## presny pocet     47.5
```



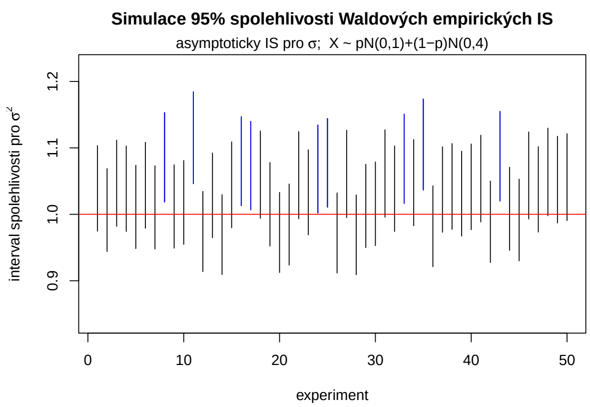
2. Waldovy asymptotické empirické $100(1-\alpha)\,\%$ IS pro rozptyl σ^2, když μ neznáme.

```
##                      n
## simulovany pocet 42.0
## presny pocet     47.5
```



3. Waldovy asymptotické empirické $100(1-\alpha)\,\%$ IS pro směrodatnou odchylkul σ, když μ neznáme.

```
##                     n
## simulovany pocet 41.0
## presny pocet     47.5
```



Příklad 6. Simultánní oblasti spolehlivosti + elipsa spolehlivosti pro střední hodnotu a rozptyl (resp. směrodatnou odchylku)) Empirické $100(1-\alpha)\,\%$ asymptotické intervaly spolehlivosti Waldova typu pro μ, σ^2 a σ jsou pro neznámé σ definovány následujícím způsobem:

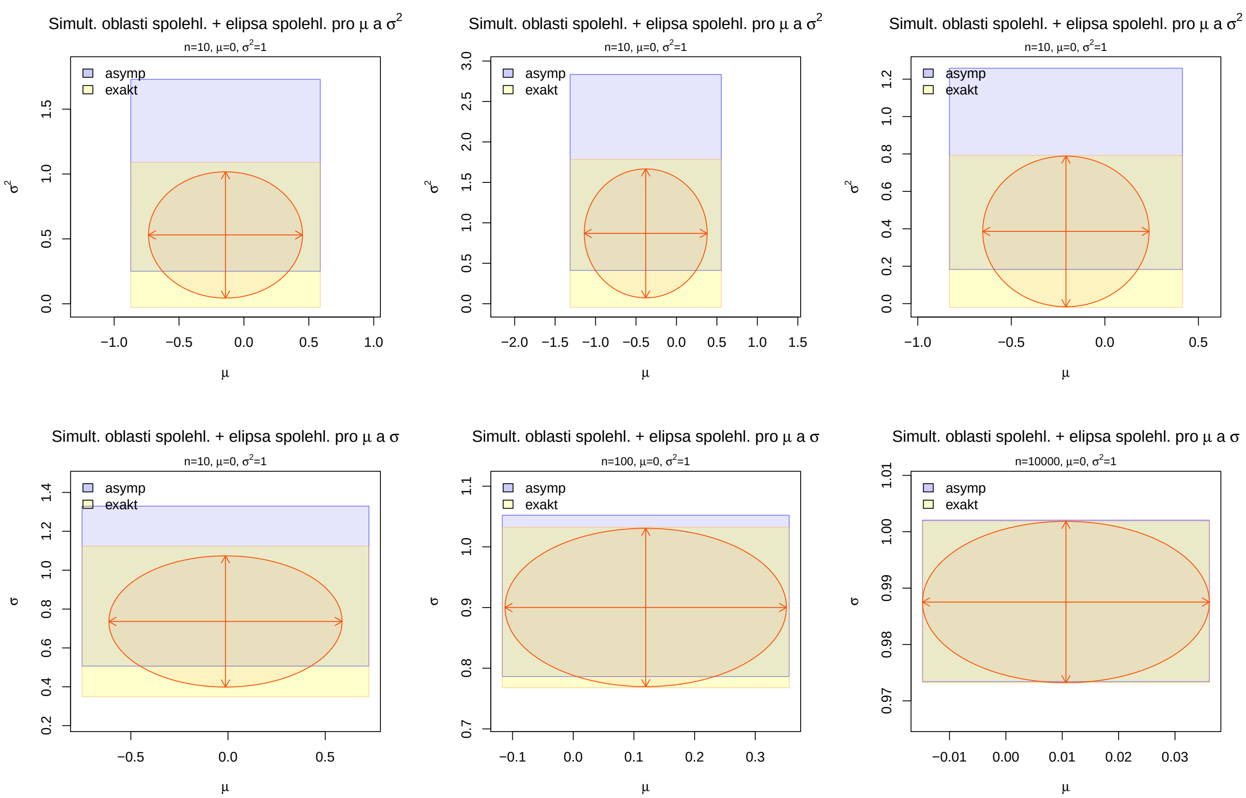
$$\Pr\left(\bar{x} - u_{1-\alpha/2}\sqrt{\widehat{\sigma}^2/n} \;<\; \mu \;<\; \bar{x} - u_{\alpha/2}\sqrt{\widehat{\sigma}^2/n}\right) = 1-\alpha$$

$$\Pr\left(\widehat{\sigma}^2 - u_{1-\alpha/2}\sqrt{2\widehat{\sigma}^4/n} \;<\; \sigma^2 \;<\; \widehat{\sigma}^2 - u_{\alpha/2}\sqrt{2\widehat{\sigma}^4/n}\right) = 1-\alpha$$

$$\Pr\left(\widehat{\sigma} - u_{1-\alpha/2}\sqrt{\widehat{\sigma}^2/2n} \;<\; \sigma \;<\; \widehat{\sigma} - u_{\alpha/2}\sqrt{\widehat{\sigma}^2/2n}\right) = 1-\alpha$$

1. (a) Nakreslete simultánní množinu spolehlivosti pro $\theta = (\mu, \sigma^2)^T$ použitím exaktních intervalů spolehlivosti pro μ a pro σ^2.
   (b) Nakreslete simultánní množinu spolehlivosti pro $\theta = (\mu, \sigma^2)^T$ použitím asymptotických intervalů spolehlivosti pro μ a pro σ^2.
   (c) Do obrázku dokreslete $100(1-\alpha)\,\%$ elipsu spolehlivosti pro $\theta = (\mu, \sigma^2)^T$ použitím asymptotických intervalů spolehlivosti pro μ a pro σ^2.
2. (a) Nakreslete simultánní množinu spolehlivosti pro $\theta = (\mu, \sigma)^T$ použitím exaktních intervalů spolehlivosti pro μ a pro σ.
   (b) Nakreslete simultánní množinu spolehlivosti pro $\theta = (\mu, \sigma)^T$ použitím asymptotických intervalů spolehlivosti pro μ a pro σ.
   (c) Do obrázku dokreslete $100(1-\alpha)\,\%$ elipsu spolehlivosti pro $\theta = (\mu, \sigma)^T$ použitím asymptotických intervalů spolehlivosti pro μ a pro σ.

Použijte (1) $n = 10$, (2) $n = 100$, (3) $n = 10000$. V (1), (2) a (3) zvolte $\mu = 0$ a $\sigma^2 = 1$ resp. $\sigma^2 = 4$. Koeficient spolehlivosti simultánní množiny zvolte zvolte $1-\alpha = 0.95$.



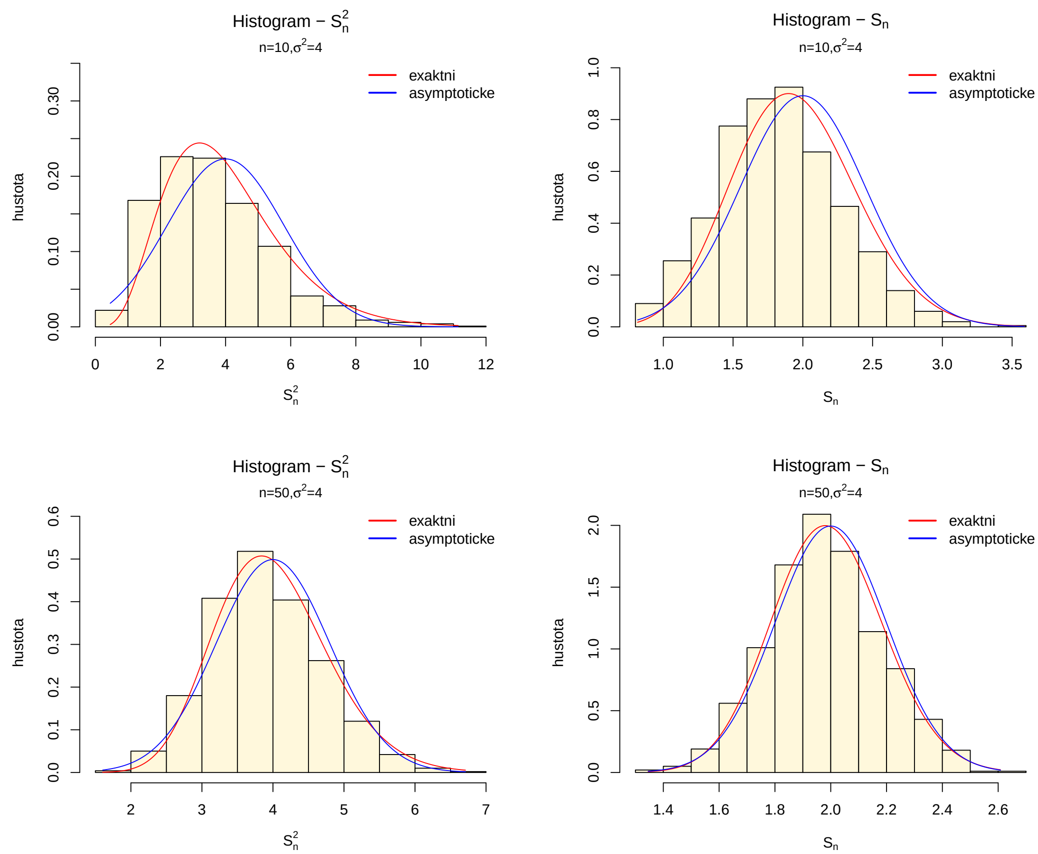
Příklad 7. Rozdělení výběrového rozptylu a výběrové směrodatné odchylky: simulační studie Nechť $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, potom

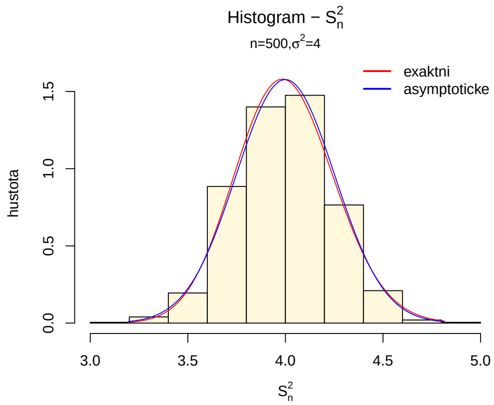
1. výběrový rozptyl $S_n^2 \sim N(\sigma^2, \frac{2\sigma^4}{n})$;
2. výběrová směrodatná odchylka $S_n \sim N(\sigma, \frac{\sigma^2}{2n})$.
3. testovací statistika $\frac{nS_n^2}{\sigma^2}$ pochází z χ^2 rozdělení o n stupních volnosti, tj. $\frac{nS_n^2}{\sigma^2} \sim \chi_n^2$.

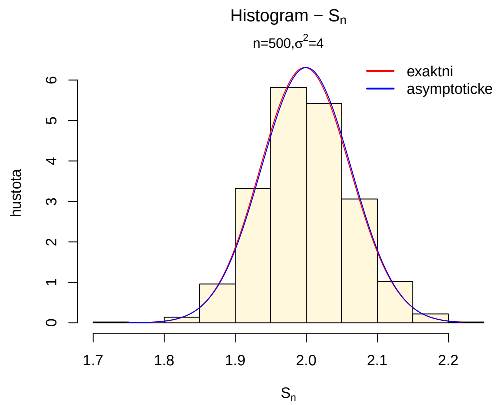
Vygenerujte $M = 1000$ náhodných výběrů z normálního rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$ o rozsahu n, kde $\mu = 0$ a $\sigma^2 = 4$, resp. $\sigma^2 = 1$. Použijte (i) $n = 10$, (ii) $n = 50$ a (iii) $n = 500$.

(a) Pro každý náhodný výběr vypočítejte statistiku $S_{n_i}^2$, $i = 1, \dots, M$ a statistiky $S_{n_i}^2$ zobrazte pomocí histogramu. Histogram superponujte křivkami hustoty asymptotického a exaktního rozdělení statistiky S_n^2.

(b) Pro každý náhodný výběr vypočítejte statistiku S_{n_i}, $i = 1, \dots, M$ a statistiky $S_{n,i}$ zobrazte pomocí histogramu. Histogram superponujte křivkami hustoty asymptotického a exaktního rozdělení statistiky S_n.




Histogram − S_n^2
n=500,σ²=4
exaktni
asymptoticke
hustota
S_n^2
0.0
0.5
1.0
1.5
3.0
3.5
4.0
4.5
5.0


Histogram − S_n
n=500,σ²=4
exaktni
asymptoticke
hustota
S_n
0
1
2
3
4
5
6
1.7
1.8
1.9
2.0
2.1
2.2

Příklad 8. P Předpokládejme, že $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, kde σ^2 známe. Nechť $\theta = \mu$. Testujeme všechny tři typy hypotéz

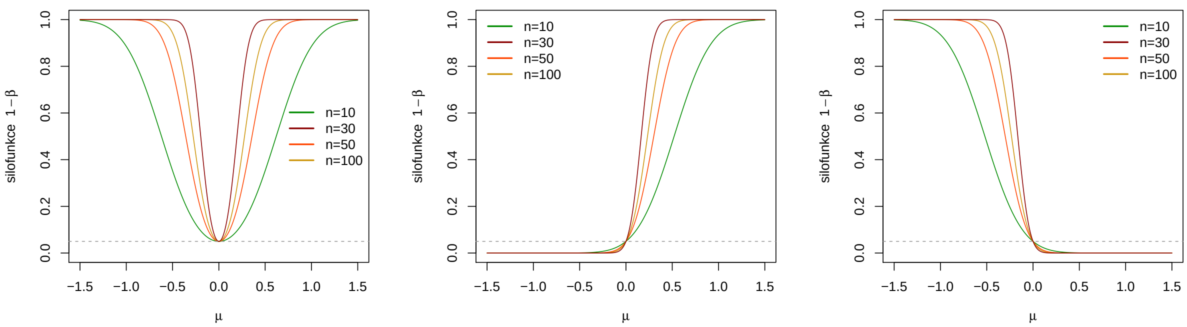
a) $H_{01} : \mu = \mu_0$ oproti $H_{11} : \mu \neq \mu_0$ (oboustranná);

b) $H_{02} : \mu \leq \mu_0$ oproti $H_{12:}$ $\mu > \mu_0$ (pravostranná);

c) $H_{03} : \mu \geq \mu_0$ oproti $H_{13} : \mu < \mu_0$ (levostranná).

1. Odvoďte tvary silofunkcí pro všechny tři typy hypotéz (a)–(c), t.j. tvary $\beta^*_{11}(\mu)$, $\beta^*_{12}(\mu)$ a $\beta^*_{13}(\mu)$.

2. Nakreslete silofunkce pro všechny tři typy hypotéz (a)–(c), kde $\mu_0 = 0$, a $\sigma^2 = 1$. Do jednoho obrázku zakreslete vždy tvary silofunkcí pro $n = 10$, $n = 30$, $n = 50$ a $n = 100$. Hladinu významnosti α zvolte 0.05. Hodnoty μ volte rozumně, např. v intervalu $\langle -1.5\,; 1.5 \rangle$.

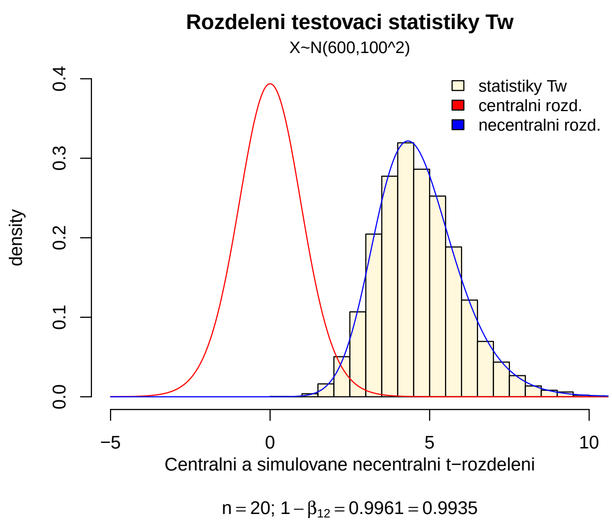


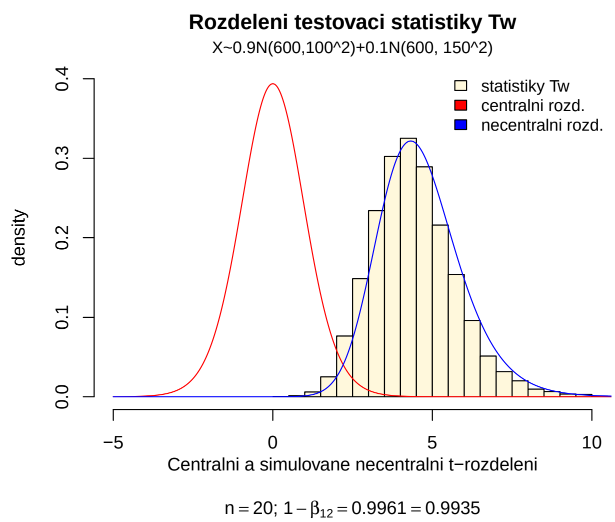
Příklad 9. Rozdělení testovací statistiky pro test o střední hodnotě μ, když σ^2 neznáme

1. Nechť náhodný výběr X pochází z normálního rozdělení, t.j. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, kde $\mu = 600$ a $\sigma^2 = 100^2$. Rozsah náhodného výběru $n = 20$. Pomocí simulační studie v R porovnejte rozdělení testovací statistiky pro test 'nepřesně zvolené' nulové hypotézy H_0: $\mu \leq 500$ (alternativní hypotéza H_1: $\mu > 500$), když rozptyl σ^2 neznáme, s rozdělením testovací statistiky nulové hypotézy H_0: $\mu \leq 600$ (alternativní hypotéza H_1: $\mu > 600$), opět když σ^2 neznáme.

   Nasimulujte M pseudonáhodných výběrů, M=1,...,10 000 a pro každý vypočítejte realizaci testovací statistiky $t_{W,\lambda}^{(m)} = \frac{\bar{x}_m - \mu_0}{s_m}\sqrt{n}$ pro nulovou hypotézu H_0: $\mu \leq 500$ oproti H_1: $\mu > 500$. Histogram superponujte jednak křivkou hustoty necentrálního t-rozdělení s $n-1$ stupni volnosti a parametrem necentrality λ ($\lambda = \frac{\mu_1 - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$, kde μ_1 je vzatá z alternativní hypotézy) a jednak křivkou hustoty centrálního studentova rozdělení. Obě křivky potom vzájemně okometricky porovnejte.

2. Nechť nyní X pochází ze směsi dvou normálních rozdělení, t.j. $X \sim [pN(\mu, 100^2) + (1-p)N(\mu, 150^2)]$, kde $p = 0.9$ a $\mu = 600$. Proveďte simulační studii popsanou v bodě (1) pro tento náhodný výběr.

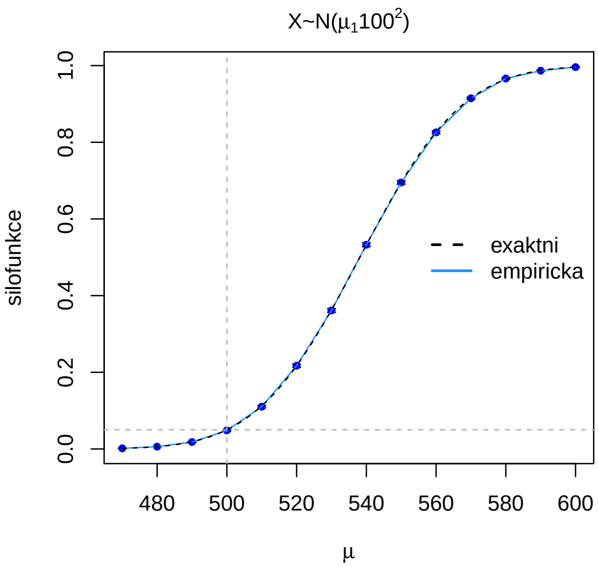


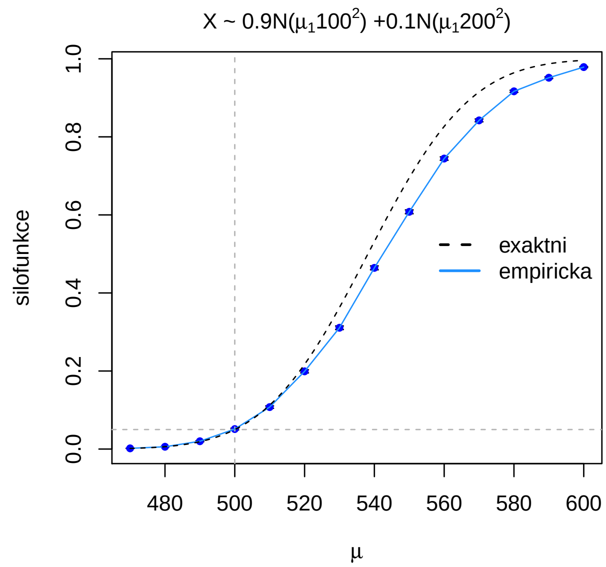


Příklad 10. empirická a exaktní silofunkce testu; pokračování příkladu č.9

1. Nechť náhodný výběr X pochází z normálního rozdělení, t.j. $X \sim N(\mu_1, \sigma^2)$, kde $\mu_1 = 470, 480, \ldots, 590, 600$ a $\sigma^2 = 100^2$. Rozsah náhodného výběru $n = 20$. Použijte R na simulaci empirické silofunkce pro jednovýběrový Studentův t-test nulové hypotézy H_0: $\mu \leq 500$ oproti H_1: $\mu > 500$. Vygenerujte $M = 1\,000$ pseudonáhodných výběrů a pro každý stanovte hodnotu testovací statistiky t_m, $m = 1, \ldots, 1\,000$. Dále vypočítejte p-hodnotu korespondující s t_m a porovnejte ji s hladinou významnosti $\alpha = 0.05$. Tak získáte empirickou silofunkci $1 - \widehat{\beta}(\mu_1)$ pro zvolenou alternativní hypotézu. Do grafu zakreslete $1 - \widehat{\beta}(\mu_1)$ i její standardizované chyby $SE[\widehat{1 - \widehat{\beta}(\mu_1)}] = \sqrt{\frac{(1-\widehat{\beta}(\mu_1))\widehat{\beta}(\mu_1)}{M}}$ v podobě chybové úsečky $1 - \widehat{\beta}(\mu_1) \pm SE[\widehat{1 - \widehat{\beta}(\mu_1)}]$. Do grafu vkreslete také teoretickou silofunkci $1 - \beta(\mu_1)$, $\mu_1 \in \langle 470\,;\, 600\rangle$ (na její výpočet použijte funkci `power.t.test()`).

2. Nechť nyní X pochází ze směsi dvou normálních rozdělení, t.j. $X \sim [pN(\mu_1, 100^2) + (1-p)N(\mu_1, 200^2)]$, kde $p = 0.9$ a $\mu_1 = 470, \ldots, 600$. Proveďte simulační studii popsanou v bodě (1) pro tento náhodný výběr.





Příklad 11. Přesná a přibližná silofunkce – Jednovýběrový Z-test o střední hodnotě Uveďte tvary přesné silofunkce $\widehat{\beta}^*_{12}$ a přibližné silofunkce $\tilde{\beta}^*_{12}$ pro test $H_0 : \mu = \mu_0$ oproti $H_1 : \mu \neq \mu_0$ když σ^2 známe. Nakreslete křivky obou silofunkcí do jednoho grafu, kde na ose x budou různé hodnoty parametru μ na ose y vynesená silofunkce, a porovnejte jejich tvary. Výsledek slovně okomentujte. Hodnotu n zvolte 20, $\mu_0 = 0$ a $\sigma^2 = 4$. Rozsah osy x volte rozumně, pro globální pohled např. $\langle -1.5\,; 1.5\rangle$, pro lokální zaměření rozdílů zvolte rozsah osy x $\langle -0.8\,; 0.8\rangle$.