Ústav matematiky a statistiky
Přírodovědecká fakulta
Masarykova univerzita

Statistická inference II

Zadání domácího úkolu – rok 2017

1. část

Stanislav Katina, Veronika Bendová

katina@math.muni.cz, xbendovav@math.muni.cz

18. dubna 2017

Instrukce k domácímu úkolu: Odevzdává se jeden pdf soubor nazvaný prijmeni-jmeno-text-statinf-II-2017.pdf (obsahuje řešení příkladů, obrázky, R-kód napsaný v TeXu), jeden zdrojový soubor naprogramovaných funkcí prijmeni-jmeno–source-statinf-II-2017.R a jeden soubor R-kódu konkrétních zadání z DÚ prijmeni-jmeno-priklady-statinf-II-2017.R, který používá tento zdrojový kód. Dejte si záležet na přehlednosti programovaného kódu, na doplnění komentářů a vhodného užití zavedených pravidel, které máte k dispozici v prezentaci Standards of programming in R: R style guide. Také věnujte svou pozornost a čas dostatečným popisům vašich úvah a zvolených postupů a interpretacím výsledků, ať už slovních nebo grafických. I to bude součástí celkového hodnocení úkolu. Na psaní R-kódu doporučuji TeXovský balíček listings a vytvoření prostředí v hlavičce dokumentu pomocí následujícího kódu:

```
\lstset{language=R,                          % nastavenie jazyka R
basicstyle=\footnotesize\ttfamily,           % typ pisma R-kodu
commentstyle=\ttfamily\color{farba1},        % farba  komentara k funkciam
numberstyle=\color{farba2}\footnotesize,     % farba a velkost cislovania
numbers=left,                                % cislovanie vlavo
stepnumber=1,                                % cislovanie po krokoch jedna
frame=leftline,                              % vytvorenie lavej hranicnej ciary
breaklines=true}                             % zalomenie riadkov
```

V textu potom kód vkládáme do prostředí `\begin{lstlisting}` a `\end{lstlisting}`.

Kompletní řešení domácího úkolu je nutné nahrát do odevzdávárny v IS nejpozději 7 dní před termínem zkoušky, na který se přihlásíte.

Příklad 1. Vylepšená věrohodnost pomocí $g(\theta)$:

1. Nakreslete logaritmus relativní funkce věrohodnosti parametru p binomického rozdělení $\mathrm{Bin}(N, p)$, kde $N = 10$ a $n = 8$, superponovaný jeho kvadratickou aproximací.
2. Nakreslete logaritmus relativní funkce věrohodnosti $g(p) = logit(p) = \ln \frac{p}{1-p}$ (při stejném zadání N a n jako v (1)), superponovaný jeho kvadratickou aproximací.
3. Nakreslete graf porovnávající vzájemně logaritmus relativní funkce věrohodnosti s její kvadratickou aproximací získanou na základě parametru p (ad 1) a aproximací získanou za základě parametrické funkce $g(p)$ (ad 2).
4. Vypočítejte Waldův a věrohodnostní $100 \times (1 - \alpha)\%$ empirický DIS pro p.
5. Vypočítejte Waldův a věrohodnostní $100 \times (1 - \alpha)\%$ empirický DIS pro $g(p)$ z bodu (2) a transformujte jej zpět do originální škály.
6. Vzájemně porovnejte Waldovy empirické DIS pro p a pro $g(p)$ po zpětné transaformaci do originální škály a věrohodnostní empirické DIS pro p a pro $g(p)$ po zpětné transaformaci do originální škály. Který z intervalů vykazuje lepší vlastnosti a proč?
7. Naprogramujte dvě numerické metody: metodu bisekce (funkce `bisekce()`) a metodu sečen (funkce `metoda.secen()`) ke zpřesnění hranic věrohodnostních intervalů spolehlivosti.

Požadovaná forma výstupu příkladu:

- dvě samostatně použitelné funkce `bisekce()` a `metoda.secen()` s naimplementovanými iteračními metodami;
- trojice grafů:
  - (i) graf s parametrem p na ose x a log. rel. věroh. funkcí + její kvadratickou aproximací na ose y;
  - (ii) graf s param. funkcí $g(p)$ na ose x a příslušnou log. rel. věroh. funkcí + její kvadr. aproximací na ose y;
  - (iii) graf s parametrem p na ose x a log. rel. věrohodnostní funkcí + její kvadr. aproximací pomocí parametru p a pomocí param. funkce $g(p)$ na ose y (na základě tohoto grafu porovnejte kvalitu obou kvadr. aproximací);
- tabulka hranic intervalů spolehlivosti:

parametr/p.funkce	Waldův IS – dh	Waldův IS – hh	Věroh. IS – dh	Věroh. IS – hh
p				
$g(p)$				
$g(p)$ zpětně transf. do škály p				

- tabulka přesnějších hranic věrohodnostních intervalů spolehlivosti získaných pomocí vlastnoručně naprogramovaných funkcí `bisekce()` a `metoda.secen()`:

parametr/p.funkce	pův. – dh	pův. – hh	m.bisekce – dh	m.bisekce – hh	m.sečen – dh	m.sečen – hh
p						
$g(p)$						
$g(p)$ z.t. do šk.p						

Poznámka: Hodnoty ve výsledných tabulkách i textu zaokrouhlete na šest desetinných míst.

Příklad 2. Test o směrodatné odchylce σ: Z archivních materiálů máme k dispozici původní kraniometrické údaje o délce lebky mužů a žen ze starověké egyptské populace (soubor one-sample-mean-skull-mf.csv). Současně máme k dispozici průměrné hodnoty délky lebky a hodnoty směrodatných odchylek pro muže a ženy novověké egyptské populace (délka lebky mužů $x_m = 177.568$ mm se směrodatnou odchylkou $s_m = 7.526$ mm; délka lebky žen $x_f = 171.962$ mm se směrodatnou odchylkou $s_f = 7.052$ mm; rozsah datového souboru $n_m = 88$, $n_f = 52$).

Načtěte datový soubor one-sample-mean-skull-mf.csv, kde proměnná skull.L označuje délku lebky (v mm) starověké egyptské populace a proměnná sex označuje pohlaví měřeného jedince. Zaměřte se na délku lebky žen, o které předpokládáme že má normální rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$.

1. Otestujte nulovou hypotézu, že směrodatná odchylka délky lebky žen u starověké egyptské populace je rovna směrodatné odchylce délky lebky žen u novověké egyptské populace.
2. Vypočítejte $100 \times (1 - \alpha)\%$ empirický DIS, tj. $(\widehat{\sigma}_D\,;\,\widehat{\sigma}_H)$ pro směrodatnou odchylku délky lebky žen starověké egyptské populace, kde koeficient spolehlivosti $1 - \alpha = 0.95$.

Jak v části (1), tak i v části (2) použijte k otestování nulové hypotézy a ke stanovení příslušných DIS:

(a) Waldovu testovací statistiku U_W;

(b) skóre testovací statistiku U_S;

(c) věrohodnostní testovací statistiku U_{LR}.

Požadovaná forma výstupu příkladu:

- H_0;
- H_1;
- tabulka výsledků:

Statistika	$\widehat{\sigma}$	test. stat.	$\widehat{\sigma}_D$	$\widehat{\sigma}_H$	p-hodnota
U_W					
U_S					
U_{LR}					

- komentář k výsledkům uvedeným v tabulce + zdůvodněné rozhodnutí o tom, kterou testovací statistiku byste v praxi pro konečnou analýzu využili.

Poznámka: Hodnoty ve výsledné tabulce i textu zaokrouhlete na čtyři desetinná místa.

Příklad 3. Pokračování příkladu 2: Vraťme se nyní k datovému souboru one-sample-mean-skull-mf.csv, kde proměnná skull.L označuje délku lebky (v mm) starověké egyptské populace a proměnná sex označuje pohlaví měřeného jedince.

1. Na hladině významnosti $\alpha = 0.05$ otestujte nulovou hypotézu, že směrodatná odchylka délky lebky žen u starověké egyptské populace je větší než směrodatná odchylka délky lebky žen u novověké egyptské populace. Testování proveďte pomocí:
   (a) kritického oboru;
   (b) intervalu spolehlivosti;
   (c) p-hodnoty.

Požadovaná forma výstupu příkladu:

- H_0;
- H_1;
- tabulka výsledků:

Název statistiky	$\widehat{\sigma}$	statistika	krit.obor	$\widehat{\sigma}_D$	$\widehat{\sigma}_H$	p-hodnota

- komentář k výsledkům uvedeným v tabulce + zdůvodněné rozhodnutí o nulové hypotéze.

Poznámka: Hodnoty ve výsledné tabulce i textu zaokrouhlete na čtyři desetinná místa.

Příklad 4. Simultánní oblasti spolehlivosti + elipsa spolehlivosti pro střední hodnotu a směrodatnou odchylku (dokončení ze cvičení):

1. Nakreslete simultánní množinu spolehlivosti pro $\theta = (\mu, \sigma)^T$ použitím asymptotického intervalu spolehlivosti pro μ a exaktního intervalu spolehlivosti pro σ.

2. Nakreslete simultánní množinu spolehlivosti pro $\theta = (\mu, \sigma)^T$ použitím asymptotických intervalů spolehlivosti pro μ a pro σ.

3. Do obrázku dokreslete $100(1-\alpha)\,\%$ elipsu spolehlivosti pro $\theta = (\mu, \sigma)^T$ použitím asymptotických intervalů spolehlivosti pro μ a pro σ.

Použijte (1) $n = 10$, (2) $n = 100$, (3) $n = 10000$. V (1), (2) a (3) zvolte $\mu = 0$ a resp. $\sigma^2 = 4$. Koeficient spolehlivosti simultánní množiny zvolte zvolte $1 - \alpha = 0.95$.

Požadovaná forma výstupu příkladu:

- trojice grafů obsahující vždy dvě simultánní oblasti spolehlivosti pro parametry μ a σ a jednu elipsu spolehlivosti;
- odpovědi na následující tři otázky:
  1. Proč je šířka obou oblastí spolehlivosti vzhledem k proměnné na ose x v každém grafu stejná?
  2. Oblasti spolehlivosti se vzhledem k ose y s rostoucím n čím dál více překrývají. Čím je to způsobeno? Která oblast spolehlivosti se přibližuje ke které? Svou odpověď zdůvodněte.
  3. Elipsa spolehlivosti se s rostoucím n přibližuje k simultánní množině spolehlivosti popsané v bodu (2) a to jak z vertikální, tak z horizontální strany. Jak si tento jev vysvětlujete?

Příklad 5. Minimální rozsah náhodného výběru: Předpokládejme, že $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, kde μ neznáme. Nechť $\theta = \sigma^2$. Testujeme všechny tři typy hypotéz:

a) $H_{01} : \sigma^2 = \sigma_0^2$ oproti $H_{11} : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$ (oboustranná);

b) $H_{02} : \sigma^2 \leq \sigma_0^2$ oproti $H_{12:}$ $\sigma^2 > \sigma_0^2$ (pravostranná);

c) $H_{03} : \sigma^2 \geq \sigma_0^2$ oproti $H_{13} : \sigma^2 < \sigma_0^2$ (levostranná);

kde $\sigma^2 = 2$.

Vypočítejte minimální rozsah náhodného výběru pro testy hypotéz (a)–(c) při $\alpha = 0.05$ a $1 - \beta = 0.8$, pro $\sigma \in \{1.01, 1.03, 1.5, \ldots 2.99, 3.01\}$ (ad (a)), $\sigma \in \{2.01, 2.03, 2.5, \ldots 2.99, 3.01\}$ (ad (b)), $\sigma \in \{1.01, 1.03, 1.05, \ldots 1.97, 1.99\}$ (ad (c)). Závislost minimálního rozsahu náhodného výběru na hodnotě σ^2 zakreslete do grafu pomocí křivky (na osu x vyneste parametr σ^2, na osu y minimální rozsah náhodného výběru.). V grafech barevně odlište minimální rozsah náhodného výběru pro:

(i) $\sigma^2 = 1.4$;

(ii) $\sigma^2 = 1.85$;

(iii) $\sigma^2 = 2.2$;

(iv) $\sigma^2 = 2.8$;

je-li to možné.

Poznámka: Čím více se budeme s hodnotou σ^2 blížit k hodnotě σ_0^2, tím větší minimální rozsah souboru budeme potřebovat. V souladu s touto informací a s vhodným vykreslením grafu rozumně stanovte maximální rozsah souboru (např. $N = 3000$, příp. $N = 5000$). K našim potřebám nám stačí vědět, že pro σ^2 blízká hodnotě σ_0^2 potřebujeme více než 3000 pozorování.

Požadovaná forma výstupu příkladu:

- funkce min.rozsah(), která pro stanovenou spolehlivost $1 - \alpha$ a sílu β^* vypočítá pro libovolnou alternativu minimální rozsah náhodného výběru;
- tři grafy závislosti N na σ^2;
- tabulka výsledků:

Alt. hypotéza	$\sigma^2 = 1.4$	$\sigma^2 = 1.85$	$\sigma^2 = 2.2$	$\sigma^2 = 2.8$
oboustranná				
pravostranná				
levostranná				

- komentář ke grafům a k výsledkům uvedeným v tabulce.