Archimédův zákon a … řešení rovnic

G. Novinskij, V. Chomazjuk

KBAHT č. 5/1977, překlad KO

V devátém čísle minulého ročníku našeho časopisu jsme psali o tom, jak řešit rovnice 3. stupně užitím Cardanova vzorce nebo graficky. Nyní vás chceme seznámit s ještě jedním způsobem řešení rovnic třetího stupně – pomocí některých fyzikálních zákonů.

Při listování stránkami starého, ale velmi zajímavého časopisu „Věstník experimentální fyziky a elementární matematiky" (1903, č. 348) jsme objevili popis dávno zapomenutého, ale velmi důvtipného Meslinova přístroje pro řešení algebraických rovnic. Meslin popisuje, jak se najdou kořeny rovnice

(1) $$a_n y^n + a_{n-1} y^{n-1} + \ldots + a_1 y + a_0 = 0$$

pomocí hloubky ponoření speciálně zhotovených závaží do vody, jsou-li zavěšena k vahadlu rovnoramenných vah.

Co představují tato závaží? Je jasné, že musí mít takový tvar, aby objem jimi vytlačené vody byl číselně roven hloubce jejich ponoření odpovídajícím způsobem umocněné (na 1., 2., 3., … n.). Jinými slovy, každému členu rovnice (1) musí náležet odpovídající závaží.

Nejdůležitější pro závaží je použít tvar rotačních těles. Členu a_1y takto přísluší rotační válec, který má plochu základny rovnou jednotce. Objem vody vytlačené takovým válcem bude číselně roven hloubce ponoření y. Pro člen a_2y^2 musíme vyrobit těleso zvané rotační paraboloid. Vznikne otáčením paraboly (přesněji řečeno oblouku paraboly) kolem její osy. Je-li parabola zadána rovnicí $y = ½\pi x^2$, bude objem rotačního paraboloidu roven $V = ½ S y = ½ (\pi x^2) y = y^2$.
Při ponoření tohoto tělesa do hloubky y bude objem vytlačené vody roven y^2, tedy druhé mocnině hloubky ponoření. Členu a_3y^3 odpovídá kužel, jehož „vytvořující" funkce je dána předpisem $y = \sqrt{\frac{\pi}{3}}\,.\,x$. Takový kužel vytlačí objem vody velikosti y^3, tedy třetí mocninu hloubky ponoření.

Je možné dokázat, že v obecném případě, pro člen $a_k y^k$ je nutno zhotovit těleso vzniklé rotací křivky (přesněji oblouku křivky) $y = \sqrt[k-1]{\frac{\pi x^2}{k}}$ kolem osy y, aby vytlačená voda měla objem y^k (ověřte si to!). A jak tedy pracuje tento Meslinův přístroj? Ukážeme to na konkrétním příkladě. Najdeme experimentálně kořeny kubické rovnice

(2) $$y^3 - 16y^2 + 83y - 140 = 0$$

K tomu budeme potřebovat rovnoramenné váhy, tři spojené nádoby s vodou (nebo jednu velkou průhlednou) a tři zátěže – válec, rotační paraboloid a kužel. Vahadlo vah je lépe nepřipevňovat na „nohu" (jako na obrázku) ale podobně jako u lékárnických vah je zavěsit na nit. Na pravém i levém rameni vahadla délky 20 cm uděláme značky po milimetrech. Závaží lze zhotovit třeba z hliníku. Výška všech závaží bude stejná, 10 cm. Obsah základny válce vezmeme 1 cm^2, jeho objem bude tedy 10 cm^2, a hmotnost 27 g. Je však vhodné zmenšit hmotnost válce na 10 g (aby byla číselně rovna objemu), zjednoduší se tím další výpočty. K tomu je nutno odebrat z vnitřku příslušnou část materiálu (odvrtat, ale ne až do dna!). Podobně zhotovíme i další tělesa. Rotační paraboloid bude mít objem 100 cm^3 a hmotnost 100 g (i v tomto případě bude nutno část materiálu zevnitř odebrat). A kužel je lépe zhotovit stokrát menší co do objemu i hmotnosti, než by odpovídalo Meslinovu přístroji. Jinak by měl při výšce 10 cm průměr vrchní části kolem 20 cm! Proto bude mít jeho „vytvořující" křivka rovnici $y = 10.\sqrt{\frac{\pi}{3}}\,.\,x$, jeho objem při výšce 10 cm bude pak 10 cm^3, hmotnost 10 g. Průměr vrchní části bude asi 2 cm, tím nevzniknou žádné technické obtíže.

Teď již přistoupíme k vlastnímu pokusu. Přepíšeme rovnici (2), tak, aby její členy se zápornými koeficienty byly na pravé straně:

(3) $y^3 + 83y = 16y^2 + 140$

Zavěsíme zátěže na vahadlo a uvedeme váhy do rovnováhy. Kužel odpovídající členu y^3 dáme na levé rameno vahadla. Protože koeficient tohoto členu v rovnici (3) je roven 1, bylo by logické zavěsit kužel ve vzdálenosti 1 mm od osy otáčení vahadla. Ale hmotnost kužele je stokrát menší, než by měla být. Vykompenzujeme to tak, že zavěsíme kužel ve vzdálenosti 100 mm. Válec odpovídající členu 83y zavěsíme také na levé rameno vah ve vzdálenosti 83 mm od jeho středu. Na pravé rameno vahadla zavěsíme paraboloid ve vzdálenosti 16 mm. Je jasné, že váhy v rovnováze nebudou, protože součet momentů sil otáčející vahadlem proti hodinovým ručičkám se nerovná součtu momentů sil otáčející vahadlem ve směru ručiček. Rovnováhy však můžeme snadno docílit různými způsoby. Třeba tak, že ve vzdálenosti 100 mm přidáme na pravém rameni pomocnou zátěž. Snadno vypočítáme, že její hmotnost bude 2,3 g.

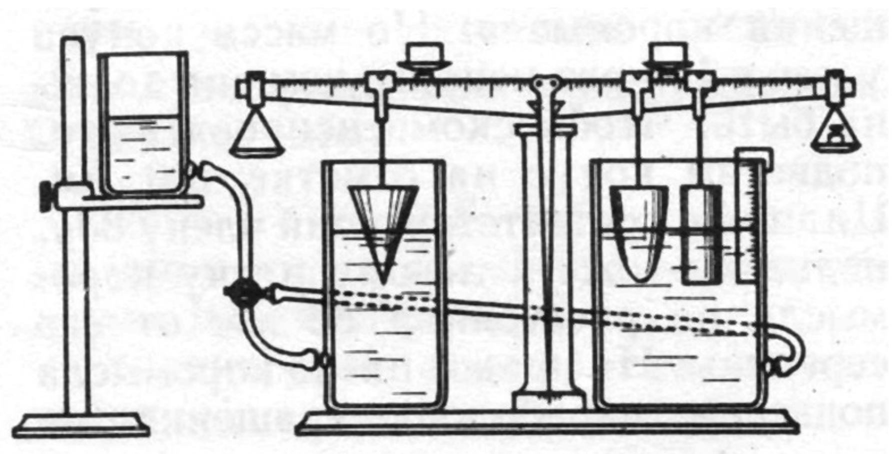
A pak začneme postupně plnit spojené nádoby vodou. Jakmile voda dostoupí k zátěžím (je nutné, aby spodní části všech byly ve stejné výšce), rovnováha se poruší. To je pochopitelné, protože různá tělesa do stejné hloubky ponořená vytlačují různé objemy vody a jsou tedy nadlehčována různě velkými vztlakovými silami. Nechť hloubka vnoření těles je rovna y. Potom moment vztlakové síly působící na kužel je y^3, na válec 83y a na paraboloid $16y^2$ (koeficient úměrnosti je zrychlení volného pádu (g, pozn. KO). Ale všechny tyto veličiny odpovídají rovnici (3). Pouze absolutní člen zatím „vypadl“ („nepracuje“). Také jej tedy zaměstnáme. Abychom získali moment vztlakové síly odpovídající absolutnímu členu naší kubické rovnice, přidáme na levém rameni vahadla moment úměrný velikosti tohoto absolutního členu (140). Například tak, že ve vzdálenosti 100 mm od osy přidáme na levé rameno pomocnou zátěž 1,4 g.

Rovnost momentů vztlakových sil bude tedy odpovídat rovnici (3). Když nyní změříme hloubku vnoření y odpovídající získání rovnováhy, najdeme kořeny naší původní rovnice. Nejprve nastane rovnováha při hloubce 4 cm, podruhé při 5 cm a potřetí při 7 cm. Všimněte si, že pokaždé při přechodu rovnováhy se sklon vahadla změní na opačný. Nejprve (do 4 cm) je vahadlo nakloněno vlevo, od 4 cm do 5 cm vpravo atd.

Tímto způsobem lze najít i záporné kořeny. V tom případě je nutno …
(… a zde je vyzrazena část domácího úkolu, proto dokončení věty vypouštím. KO)

I když je přesnost takto nalezených kořenů malá, je samotný princip podle našeho mínění velmi zajímavý. Bohužel, nejobtížnější je v tomto experimentu zhotovení rotačního paraboloidu.
(A samozřejmě také všech dalších toroidů pro rovnice vyšších stupňů... KO.)

Poslední věta uvozuje další článek, proto ji již neuvádím. KO



Tento obrázek je míněn obecně, neodpovídá situaci při řešení konkrétní rovnice uvedené v článku.