**Grafické řešení rovnic třetího stupně**
A. Krasnoděmskaja
Квант № 9, 1976, překlad KO

Známý Cardanův vzorec $x=\sqrt[3]{-\frac{k}{54}+\sqrt{\frac{-D}{108}}}+\sqrt[3]{-\frac{k}{54}-\sqrt{\frac{-D}{108}}}-\frac{b}{3a}$ , kde $k = (2b^3 - 9abc+27a^2d)/a^3$,

$D = (b^2c^2 - 4ac^3 - 4b^3d + 18abcd - 27a^2d^2)/a^4$, umožňuje přesně najít kořeny rovnice 3. stupně

(*) $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ (kde $a \neq 0$)

Výpočet kořenů podle tohoto vzorce však zabere příliš mnoho času, nemluvě o tom, že v mnoha případech je nutno pracovat s komplexními čísly. Ale nešlo by najít kořeny rovnice (*) sice třeba jen přibližně, ale rychleji, řekněme graficky – pomocí kružítka a pravítka? Ukazuje se, že to není možné. Kružítko a pravítko nestačí – jak bylo dokázáno v článku В. Нильме („Квант“, 1975, № 6), kružítkem a pravítkem je možno sestrojit jen ty hodnoty, vyjádřitelné z hodnot zadaných pouze pomocí sčítání, odčítání, násobení, dělení a druhých odmocnin. (Takto se např. vyjadřují kořeny kvadratické rovnice z jejích koeficientů, proto lze kvadratickou rovnici řešit pomocí kružítka a pravítka – o tom se mluví v článku A. Presmana (Пресман), „Квант“, 1972, № 4).

Ale nalezení kořenů rovnice 3. stupně ještě vyžaduje užití třetích odmocnin, proto je v obecném případě pomocí kružítka a pravítka sestrojit nelze. Příklad takové „geometricky neřešitelné“ rovnice $x^3 - 2 = 0$ byl také uveden ve zmíněném článku В. Нильме.

Mohé úlohy neřešitelné kružítkem a pravítkem je však možno řešit pomocí jiných přístrojů nebo důvtipným užitím pravítka (například úloha trisekce úhlu – opět v článku В. Нильме). Ani rovnice 3. stupně nejsou výjimkou – je možné je řešit graficky pomocí dvou trojúhelníků a pravítka.

Vyznačme proto v kartézské souřadné soustavě body A [b; a] a B [d; c] (obr. 1). Jestliže se nám nyní podaří projít z bodu A do bodu B cestou ***A – osa x*** (bod M na obr. 1) – ***osa y*** (bod N) – ***bod B***, přičemž se v bodech M a N na osách pokaždé otočíme o $90^0$, je číslo $x_0 = \frac{x_M - b}{a}$ , kde $x_M$ je první souřadnice bodu M, reálným kořenem rovnice (*). Rovná se tedy délce průmětu úsečky AM do osy x (s příslušným znaménkem) dělené koeficientem a.

Lze-li sestrojit pouze jedinou lomenou křivku těchto vlastností, má rovnice (*) buď jeden reálný kořen a dva komplexní sdružené, nebo tři reálné stejné (= jeden kořen trojnásobný); lze-li sestrojit takové křivky dvě, má rovnice tři reálné kořeny, z nichž jeden je dvojnásobný; existují-li takové křivky tři, má rovnice (*) tři kořeny reálné různé.

K provedení důkazu správnosti tohoto postupu si povšimněme tří podobných trojúhelníků PAM, OMN a QNB (obr. 1). Z jejich podobnosti dostáváme poměry PM : PA = ON : OM = QB : QN. Dále platí $PM = - ax_0$, $PA = a$, $OM = b + ax_0$, $QB = d$, $QN = c - ON$. Nyní napišme výše uvedené poměry ve tvaru $\frac{-ax_0}{a} = \frac{ON}{b+ax_0} = \frac{d}{c - ON}$ , odkud plyne $x_0 = \frac{-ON}{b+ax_0}$ , dále pak $x_0 = \frac{-d}{c - ON}$ , $x_0 = \frac{-d}{c + x_0.(b + ax_0)}$ a odtud nakonec $ax_0^3 + bx_0^2 + cx_0 + d = 0$.

Jak je vidět, číslo $x_0$ je skutečně kořenem rovnice (*).
Další možnosti pro jiná umístění bodů A, B, P, Q, M, N (než na obrázku) prozkoumejte sami.

Nejobtížnější při tomto grafickém řešení kubické rovnice je nalezení (sestrojení) křivky AMNB. To je možno provést pomocí pravítka a dvou trojúhelníků nebo pomocí příložníku a trojúhelníku. Na obr. 2 je naznačeno, jak najít jedno řešení rovnice $2x^3 + 5x^2 - x - 1 = 0$, je to číslo ½. Ale tato rovnice má tři reálné kořeny, zkuste i tyto najít graficky. Řešte také následující úlohy:

Cvičení:

1. Popište oblasti, ve kterých musí ležet body A, B, aby rovnice měla:

a) tři reálné kořeny, b) dva reálné kořeny, c) jeden reálný kořen. (Míní se „...právě jeden..." atd. KO)

2. Řešte graficky rovnice:

a) $4x^3 + 11x^2 + 14x + 6 = 0$

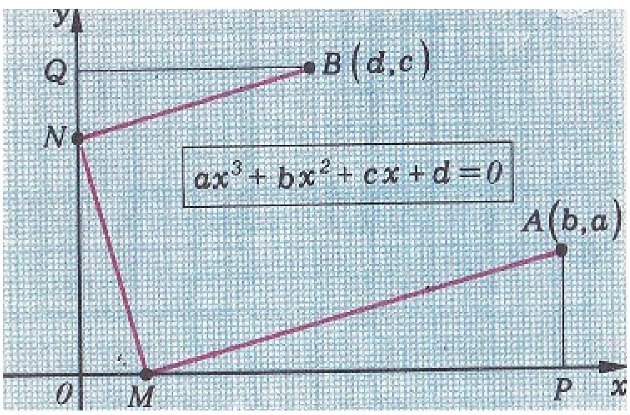
b) $4x^3 + 6x^2 + 2x - 3 = 0$

c) $2x^3 + 5x^2 + x - 2 = 0$

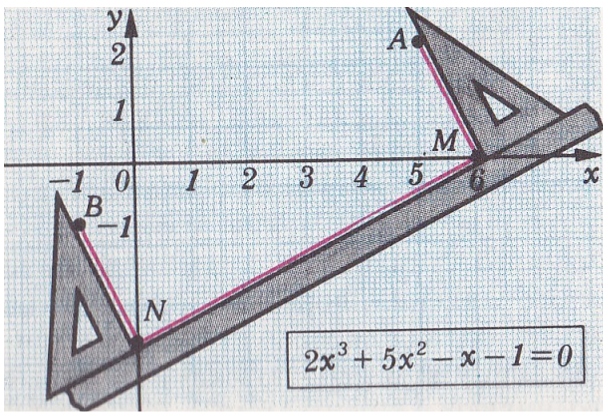
d) $2x^3 + 4x^2 - 5x + 3 = 0$

Ještě znovu pro přehlednost:

| | |
|---|---|
| Jedna lomená čára: | Jeden reálný a dva imaginární nebo jeden trojnásobný |
| Dvě lomené čáry: | Tři reálné, jeden z nich je dvojnásobný |
| Tři lomené čáry: | Tři reálné různé |




obr. 1




obr. 2

(Konec článku)

Poznámka:
Pro optimální vniknutí do naznačených vztahů je velmi užitečné provést si několik náčrtů, které se týkají různých jednoduchých (předem jasných) rovnic, jak to bylo naznačeno v prezentaci na semináři.
Jednalo se o rovnice:

$4x^3 + 6x^2 + 2x + 3 = 0$ $x^3 + x^2 - 4x - 4 = 0$ $2x^3 + 3x^2 = 0$ $2x^3 + x = 0$

$x^3 - 4x = 0$ $x^3 + 3x^2 + 2x = 0$ $x^3 + 4x^2 + 4x = 0$ $2x^3 + 5x^2 - 3x = 0$

U všech těchto rovnic lze zaručit snadné získání pravých úhlů v bodech M a N na čtverečkovaném papíře. Teprve potom je vhodné zkusit rovnice méně evidentní, i s pomocí mechanického zařízení.

KO