1.

ALKUIN:

ÚLOHY K BYSTŘENÍ MLADÍKŮ

(Propositiones ad acuendos iuvenes)

**Tématicky uspořádaný překlad
s komentářem**

1.1. Úvod

Snad každý člověk zabývající se matematikou se setkal s úlohou o převozníkovi, který má přepravit přes řeku vlka, kozu a hlávku zelí. Z toho plyne, že snad každý člověk, zabývající se matematikou, přišel do styku (aniž to tušil) se středověkou sbírkou úloh *Propositiones ad acuendos iuvenes*, což bychom mohli přeložit jako *Úlohy k bystření mladíků.* Tato sbírka vznikla pravděpodobně na dvoře Karla Velikého, který panoval ve francké říši v letech 768 – 814; za autora sbírky je považován anglosaský mnich Alkuin z Yorku (735? – 804) a některé úlohy z této sbírky jsou živé dodnes.

Východiskem našeho výkladu je kritické vydání Alkuinovy sbírky [Fo1], jehož text (bez poznámkového a kritického aparátu) je se souhlasem prof. M. Folkertse uveden ve čtvrté části naší práce. Kritické vydání bylo připraveno na základě více než deseti rukopisů a několika tištěných edicí, které se od sebe více či méně liší; v této práci nebudeme k těmto detailům přihlížet a o textu kritické edice budeme mluvit jako o textu Alkuinovu (tj. budeme říkat *Alkuinovo* zadání, *Alkuinovo* řešení a pod., i když jsme si vědomi toho, že to nemusí být vždy pravda).

Podle kritického vydání obsahuje Alkuinova sbírka 53 úloh, z nichž některé se objevují v různých rukopisech v různých variantách. U všech úloh (s výjimkou úlohy č. 11) uvádí Alkuin i postup řešení, jsou to však většinou pouhé návody k mechanickému počítání bez jakéhokoli náznaku hlubšího rozboru úlohy. V našem výkladu bude u většiny úloh Alkuinův výsledek uveden, ale jeho návod nebude překládán; zájemci o Alkuinův postup řešení se mohou obrátit na úplný Alkuinův text ve čtvrté části této publikace.

Pokud se charakteru překladu týče, snažili jsme se o překlad přesný, leč matematicky srozumitelný, což jsou požadavky v jistém smyslu protichůdné. Situace je navíc komplikována tím, že ani z latinského textu zadání není občas jasné, jak Alkuin úlohu vlastně myslel; v některých případech je možné teprve na základě Alkuinem připojeného řešení zpětně jednoznačně formulovat zadání, ne však vždy. Překlad je tedy výsledkem celé řady kompromisů; i z tohoto hlediska považujeme za vhodné znovu upozornit na to, že čtenář, kterému se překlad nebude líbit, má možnost přečíst si ve čtvrté kapitole originální text.

Úlohy v Alkuinově sbírce nejsou nijak tématicky seřazeny. V našem překladu budou Alkuinovy úlohy uspořádány do několika tématických okruhů, přičemž však ponecháme původní číslování úloh podle [Fo1]), a tyto tématické okruhy vždy stručně okomentujeme. V žádném případě se nedomníváme, že by naše tématické třídění Alkuinových úloh představovalo jediný možný přístup k problematice (srov. např. [Fo4]); zdálo se nám však úsporné z hlediska matematického komentáře k jednotlivým úlohám. V latinském textu v poslední kapitole naší práce je ponecháno původní Alkuinovo pořadí úloh.

Prvním tématickým okruhem budou „převoznické“ úlohy, které jsou považovány za Alkuinův „vynález“.[7]

[7] Širší kulturně-historické souvislosti lze najít v práci [Gr].

1.2. Převoznické úlohy

1.2.1. Zadání

17. Úloha o třech bratrech, z nichž každý měl sestru[8]

Byli tři bratři, z nichž každý měl sestru a měli se přepravit přes řeku. Každý z nich pociťoval touhu po sestře svých přátel. Když přišli k řece, nalezli jen malou loďku, v níž se nemohli přepravit více než dva z nich současně. Řekni, kdo můžeš, jak se přepravili přes řeku, aniž by jediná z nich byla poskvrněna.

18. Úloha o vlku a koze a hlávce zelí

Nějaký muž měl převézt přes řeku vlka a kozu a hlávku zelí a nemohl najít jinou loďku než takovou, která byla schopna uvézt jen dva z nich. Bylo mu však nařízeno, že má všechny převézt úplně nepoškozené. Řekni, kdo můžeš, jak je mohl nepoškozené převézt.

19. Úloha o muži a ženě vážících centnéř[9]

Muž a žena, z nichž každý vážil jeden centnéř, mající dvě děti, které dohromady váží také jeden centnéř, se měli přepravit přes řeku. Nalezli loďku, která nemůže unést více než jeden centnéř. Nechť uskuteční přepravu, kdo může, aniž by se loďka potopila.

20. Úloha o ježcích

Ježek a ježčice mající dvě děti a vážící libru se chtějí přepravit přes řeku[10].

1.2.2. Komentář

Protože Alkuinova úloha č. 18 je všeobecně známá, použijeme jí k zahájení komentáře.

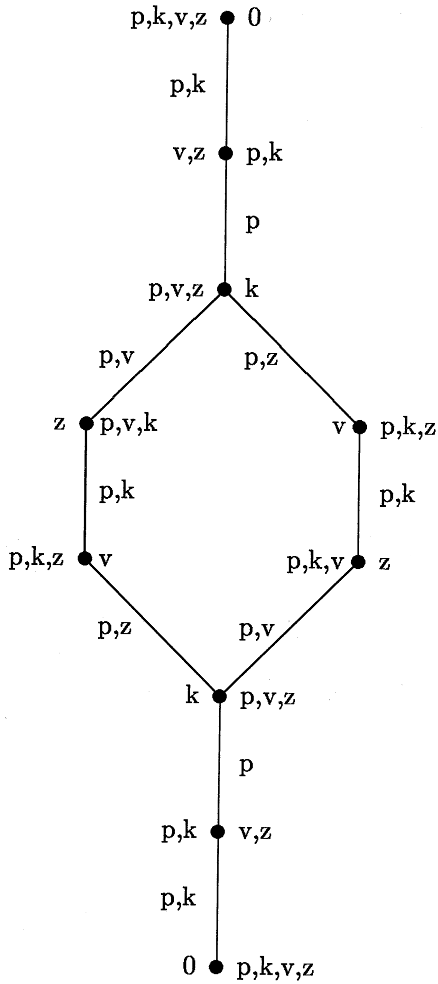
Zdá se, že všeobecně je při řešení této úlohy považováno za vhodné znázornit postup převážení pomocí grafu, do kterého jsou nějak zapsány situace vznikající na březích (kromě již zmíněného článku [Gr] viz např. knížku [Se], str. 27). Jedno z mnoha možných takových znázornění úlohy č. 18 je na následujícím obrázku. K uzlům grafu jsou připsány situace na levém a pravém břehu, k hranám je připsáno obsazení loďky. Alkuin uvádí pouze řešení odpovídající levé větvi v našem grafu.[11]

[8]V [GF], str. 315, je upozorněno na to, že z hlediska příbuzenských vztahů není zadání zcela jasné.

[9]Název váhové jednotky *plaustrum* byl přeložen volně; 1 centnéř = 61,65 kg ([Bě], str. 11). V [GF] je název váhové jednotky přeložen (s jistými výhradami) německým termínem *Fuder*, ale není uvedena hodnota této míry v dnešních jednotkách.

[10]Zadání je až příliš stručné, ale z Alkuinova řešení je zřejmé, že se jedná pouze o slovní variantu předešlé úlohy: ježek a ježčice váží po jedné libře, obě ježčata dohromady váží také jednu libru a loďka uveze nejvýše jednu libru. Hmotnost váhové jednotky zvané *libra* se měnila; podle [EA, SAK] původně odpovídala římská libra našim 273 g, později 327 g.

[11]Autor tohoto překladu souhlasí s názorem, že graf je vhodným nástrojem ke znázornění výsledku řešení, má však jisté pochybnosti o tom, že graf je vhodným nástrojem k hledání řešení. Současně se však musí přiznat, že vlastně neví, jak by měl vypadat vhodný návod (postup, metoda, algoritmus), který by bylo možné doporučit studentům k řešení takovýchto úloh. Pro zajímavost uveďme, že v článku [BGL] jsou Alkuinovy „převoznické“ úlohy studovány z hlediska celočíselného lineárního programování.



Graf řešení Alkuinovy úlohy č. 18

K úlohám č. 19 a č. 20 poznamenejme, že dítě (ježčí mládě) může samo veslovat přes řeku. U úlohy č. 19 uvádí Alkuin následující řešení: nejprve se přepraví obě děti a jedno z nich se vrátí s loďkou zpět. Pak se přepraví matka a druhé dítě se vrátí s loďkou zpět. Potom se opět přepraví obě děti a jedno z nich se vrátí s loďkou zpět, načež se přepraví otec a druhé dítě se vrátí s loďkou zpět; celá akce se uzavře závěrečnou přepravou obou dětí.

Zde vzniká jistá nejasnost (z dnešního hlediska) týkající se počtu řešení úlohy. Označíme-li jedno dítě jako A a druhé jako B, je otázkou, máme-li považovat řešení, při kterém se nejprve vrací dítě A a pak dítě B, za řešení odlišné od toho, při kterém se děti vracejí v opačném pořadí (totéž se týká pořadí přepravy muž – žena). Pokud všechny takové možnosti považujeme za různá řešení, má úloha 8 řešení.

Na závěr okomentujme úlohu č. 17. Úloha není zcela jasně formulována a náš komentář vychází z následujícího Alkuinova řešení: nejprve se přepravím já se svoji sestrou a já se s loďkou vrátím. Pak se přepraví obě zbývající sestry a moje sestra se s loďkou vrátí. Potom se přepraví oba zbývající bratři a jeden z nich se vrátí zpět i se svou sestrou, tuto sestru nechá na břehu a přepraví se spolu se mnou. Zbylá sestra převeze loďku zpět, naloží moji sestru a přiveze ji za mnou, načež bratr, jehož sestra zůstala sama na počátečním břehu, přejede zpět a přiveze svou sestru.

Na základě tohoto řešení se lze domnívat, že úloha je míněna takto:

Jsou tři sourozenecké dvojice (bratr, sestra), které označíme (B_1, S_1), (B_2, S_2), (B_3, S_3); mezi těmito dvojicemi nejsou žádné příbuzenské vztahy. Pro všechna $i, j = 1, 2, 3$ platí, že muž B_i touží po dívkách S_j, $i \neq j$. Čest dívky S_j je poskvrněna, ocitne-li se ve společnosti muže B_i, $i \neq j$, a není u toho její bratr B_j. Vznikla-li by tedy na některém břehu např. sestava B_1, S_1, S_2, bude čest dívky S_2 poskvrněna, neboť byla ve společnosti cizího muže a její bratr u toho nebyl; přítomnost další dívky S_1 na tomto faktu nic nemění.

Probrání všech možných variant řešení přenecháváme případným zájemcům jako domácí cvičení.

1.3. Úlohy vedoucí na soustavu diofantovských rovnic[12]

1.3.1. Zadání

5. Úloha o kupci se sto denáry

Nějaký kupec řekl: Chci za sto denárů nakoupit sto prasat, přičemž kanec stojí deset denárů, prasnice pět denárů a dvě selata jeden denár. Ať řekne, kdo rozumí, kolik je třeba koupit kanců, kolik prasnic a kolik selat, aby žádné z těchto dvou čísel nebylo ani překročeno, ani zmenšeno.

32. Úloha o otci rodiny rozdělujícím obilí

Nějaký otec rodiny měl dvacet členů rodiny a nařídil dát jim dvacet měřic

[12] Termín „diofantovská rovnice“ je zaveden v [Sl] a proto ho zde respektujeme, i když bychom se spíše klonili k termínu „diofantické rovnice“ (viz např. [HKŠ]).

obilí[13]*: nařídil, že muži dostanou tři měřice a ženy dvě a každé dítě půl měřice. Řekni, kdo můžeš, kolik musí být mužů, kolik žen a kolik dětí.*

33. Jiná úloha

Nějaký otec rodiny měl 30 členů rodiny, kterým nařídil dát 30 měřic obilí. A nařídil, že muži dostanou tři měřice a ženy dvě a každé dítě půl měřice. Ať řeší, kdo může, kolik bylo mužů a kolik žen a kolik dětí.

33a. Ještě jiná úloha

Nějaký otec rodiny měl 90 členů rodiny a nařídil dát jim 90 měřic obilí. A tak nařídil, že muži dostanou tři měřice a ženy dvě a každé dítě půl měřice. Ať řekne, kdo se domnívá, že ví, kolik bylo mužů a kolik žen a kolik dětí.

34. Ještě jiná úloha

Nějaký otec rodiny měl 100 členů rodiny, kterým nařídil dát 100 měřic obilí takovým způsobem, že muži dostanou tři měřice a ženy dvě a každé dítě půl měřice. Ať tedy řekne, kdo může, kolik bylo mužů, kolik žen a kolik dětí.

38. Úloha o kupci kupujícím sto zvířat

Nějaký muž chtěl koupit sto zvířat za sto zlatých, přičemž kůň se kupuje za tři zlaté, kráva za jeden zlatý a 24 ovcí za jeden zlatý. Řekni, kdo jsi s to, kolik bylo koní, kolik krav a kolik ovcí.

39. Úloha o kupci v orientu

Nějaký muž chtěl za sto zlatých koupit v orientu sto zvířat. Nařídil svému sluhovi, ať je velbloud koupen za pět zlatých, osel za jeden zlatý a dvacet ovcí za jeden zlatý. Řekni, kdo chceš, kolik bylo za sto zlatých koupeno velbloudů, kolik oslů a kolik ovcí.

47. Úloha o biskupovi, který rozkázal rozdělit klerikům dvanáct chlebů

Nějaký biskup rozkázal rozdělit klerikům dvanáct chlebů. Nařídil, aby každý kněz dostal dva chleby, každý jáhen polovinu chleba a každý lektor čtvrtinu chleba[14]*; přitom počet kleriků byl stejný jako počet chlebů. Řekni, kdo jsi s to, kolik muselo být kněží, kolik jáhnů a kolik lektorů.*

[13] Termín „otec rodiny“ (v originálu: *paterfamilias*) je třeba chápat volněji, spíš jako hlava rodu (viz další úlohy). Pokud se termínu „měřice“ (v originálu *modius*) týče, různé prameny uvádějí různé hodnoty této míry; podle [GF] se jednalo asi o 12 litrů, [SAK] uvádí 8,75 litrů.

[14] V originálu jsou klerikové označeni termíny *presbyter, diaconus* a *lector*; tyto termíny jsou zde přeloženy v souladu s knihou [Tr] (str. 166). Občas používané označení „klerik“ pro studenty teologie není v souladu s oficiální terminologií; z hlediska dnešního církevního práva se křesťan stává klerikem až přijetím jáhenského svěcení, takže lektor je dnes ještě laikem ([Tr], str. 103).

1.3.2. Komentář

Z matematického hlediska je jasné, že všechny uvedené úlohy vedou na soustavu dvou diofantovských rovnic o třech neznámých, která musí být řešena v oboru celých nezáporných čísel. Z výsledků uváděných Alkuinem se však zdá, že Alkuin hledal řešení pouze v oboru celých kladných čísel a za tohoto předpokladu mají všechny uvedené úlohy kromě úlohy č. 34 právě jedno řešení, což je zajímavé, protože obecně (pochopitelně) může existovat řešení více nebo taky žádné[15].

Z rozhovorů s učiteli získal autor tohoto komentáře dojem, že úlohy uvedeného typu se ve školské matematice objevují i dnes; při jejich řešení se (asi většinou) využívá toho, že takovou soustavu lze snadno převést na jednu diofantovskou rovnici o dvou neznámých a dál se (asi většinou) pokračuje ve větší či menší míře „experimentálně“; přitom se tiše předpokládá, že úloha má aspoň jedno řešení. Na Alkuinově úloze č. 34 ukážeme jednu možnost takového experimentálního postupu, který (za jistých předpokladů) umožní snadno najít všechna řešení.

Věnujme se tedy úloze č. 34. Označme m = počet mužů, z = počet žen, d = počet dětí. Úlohu pak lze zapsat jako soustavu rovnic

$$\begin{aligned} m + z \; + d &= 100 \; , \\ 3m + 2z + \frac{d}{2} &= 100 \; . \end{aligned}$$

Vynásobíme-li druhou rovnici dvěma a od takto upravené rovnice odečteme první, dostaneme rovnici

$$5m + 3z = 100 \; ,$$

kterou lze upravit na tvar

$$m = 20 - \frac{3}{5} z \; .$$

Z této rovnice plyne:

a) Protože počet mužů m musí být celé číslo, musí být počet žen z dělitelný pěti.

b) Protože počet mužů i žen musí být nezáporný, stačí dosazovat do poslední rovnice postupně $z = 0, 5, \dots , 30$ a dostaneme odpovídající počty mužů m; zbytek do celkového počtu 100 členů rodiny pak tvoří děti. Všechna řešení dané úlohy tedy lze uspořádat do tabulky

$$\begin{array}{ccrrrrrrr} z & = & 0, & 5, & 10, & 15, & 20, & 25, & 30; \\ m & = & 20, & 17, & 14, & 11, & 8, & 5, & 2; \\ d & = & 80, & 78, & 76, & 74, & 72, & 70, & 68; \end{array}$$

Alkuin uvádí pouze řešení $m = 11$, $z = 15$, $d = 74$.

[15] Z didaktického hlediska je zajímavé, že v Alkuinově sbírce je vědomě zařazena jedna úloha, která nemá řešení; nevede však na soustavu diofantovských rovnic a proto ji uvedeme až později.

Uvedený postup je jednoduchý, ale má jednu vadu: není univerzální. Jestliže původní soustavu dvou diofantovských rovnic o třech neznámých upravíme na diofantovskou rovnici se dvěma neznámými x a y

$$ax + by = c\ , \tag{1}$$

pak postup použitý v předešlém příkladu je efektivní pouze tehdy, je-li c dělitelné aspoň jedním z koeficientů a, b; není-li tato podmínka splněna, nevede uvedený postup k cíli. To lze ukázat na Alkuinově úloze č. 5; označíme-li k = počet kanců, p = počet prasnic a s = počet selat, pak analogickým postupem jako v předešlé úloze dostaneme rovnici

$$19k + 9p = 100, \tag{2}$$

kterou sice můžeme upravit na tvar

$$k = \frac{100}{19} - \frac{9}{19}p$$

nebo na tvar

$$p = \frac{100}{9} - \frac{19}{9}k\ ,$$

ale to nám při řešení úlohy vůbec nepomůže. Chceme-li tuto Alkuinovu úlohu řešit elementárními prostředky, nezbývá nám nic jiného než hledat řešení rovnice (2) zkusmo; snadno se sice najde řešení $k = 1$, $p = 9 \Rightarrow s = 90$ (které uvádí i Alkuin), ale dokázat, že je to v množině celých nezáporných čísel řešení jediné, by asi bylo pracné.

Uveďme na závěr tohoto paragrafu ještě Alkuinovy výsledky zbývajících úloh. U úlohy č. 32 uvádí Alkuin řešení: 1 muž, 5 žen a 14 dětí; možné by ještě bylo řešení 4 muži, žádná žena a 16 dětí, ale – jak už bylo řečeno - Alkuin asi řešení obsahující nulu neuvažoval. U úlohy č. 33 uvádí Alkuin řešení: 3 muži, 5 žen a 22 dětí (možných je též 6 mužů a 24 dětí, ale bez žen). V úloze č. 38 si kupec podle Alkuina koupil 23 koní, 29 krav a 48 ovcí (evidentní řešení úlohy spočívající v zakoupení 100 krav a ničeho jiného zřejmě neodpovídalo Alkuinovým představám), v úloze č. 39 si kupec koupil 19 velbloudů, jednoho osla a 80 ovcí (evidentní řešení se 100 osly a ničím jiným nebylo zřejmě uvažováno). Řešením úlohy č. 47 je podle Alkuina 5 kněží, 1 jáhen a 6 lektorů; řešení se 4 kněžími, 8 jáhny a žádným lektorem nebylo asi uvažováno.

1.3.3. Dvě věty

Jak praví básník, trocha teorie nikoho nezabije, a tak se pokusíme ukázat přijatelný teoretický postup, který by umožnil doplnit experimentální přístup k řešení úloh uvedeného typu odpověďmi na dvě otázky, které se objevily v předešlém paragrafu:

1) Jak poznáme, že rovnice (1) vůbec má celočíselné řešení ?

2) Jestliže rovnice (1) má celočíselné řešení a my jsme jedno takové řešení experimentálně nalezli, lze nějak jednoduše vyjádřit všechna ostatní celočíselná řešení ?

Odpověď na tyto otázky lze najít např. v již zmíněné knize [HKŠ] na str. 200 a násl., ale tam je celý problém formulován poměrně obecně a při jeho řešení se vychází z pojmu kongruence, který ve školské matematice není běžný. Jednodušší pohled na uvedené otázky lze najít v knížce [Zn], kde se vychází z pojmu dělitelnosti; tento pojem se ve školské matematice objevuje poměrně brzo a lze s ním tedy pracovat. Z této knížky ocitujeme dvě věty (v poněkud pozměněné formulaci, abychom nemuseli zavádět další symboly), které odpovídají na obě naše otázky.

Označme písmenem D největšího společného dělitele čísel a, b.

Věta 1 ([Zn], str. 31, věta 9). *Rovnice (1) má celočíselné řešení tehdy a jen tehdy, je-li číslo* c *dělitelné číslem* D.

Věta 2 ([Zn], str. 35, věta 10). *Má-li rovnice (1) celočíselné řešení x_0, y_0, pak množina všech celočíselných řešení rovnice (1) je určena vztahy*

$$x = x_0 + \frac{b}{D}t \, ,$$
$$y = y_0 - \frac{a}{D}t \, ,$$

kde t *probíhá množinu celých čísel.*

Domníváme se, že uvedené dvě věty jsou přijatelné jako teoretický doplněk k experimentálnímu řešení úloh uvedeného typu a nebudeme tuto otázku dále rozvádět; poznamenejme jenom na závěr, že v knížce [Zn] je uveden i algoritmus k nalezení počátečního řešení x_0, y_0 vycházející ze známého Eukleidova algoritmu k nalezení největšího společného dělitele dvou čísel.

1.4. VSUVKA: Historický komentář k „diofantovským" úlohám

1.4.1. Úvod

Tato část představuje vsuvku do výkladu o Alkuinových úlohách. Důvodem k této vsuvce je skutečnost, že úlohy, kterými jsme se právě zabývali, procházejí dějinami matematiky od staré Číny až k Leonardu Eulerovi a při výuce matematiky se uplatňují dodnes. V této části budeme jejich dlouhou historii ilustrovat na několika příkladech z různých časových období a zeměpisných oblastí; vlastní Alkuinovou sbírkou se v této části nebudeme zabývat.

I když budeme stále mluvit o diofantovských rovnicích, s výjimkou posledního paragrafu zde vůbec nebude řeč o Diofantovi z Alexandrie (okolo r. 250 n.l.), a to ze dvou důvodů:

a) Prvním je důvod historický: v Alkuinově době nebyly Diofantovy spisy v Evropě známy ([GF], str. 293) a Alkuin tedy nemohl být Diofantem ovlivněn.

b) Druhým je důvod matematický: Alkuinovy úlohy představují „prakticky" motivované slovní úlohy vedoucí na soustavu lineárních diofantovských rovnic, která má být řešena v oboru celých kladných čísel; takové úlohy však v Diofantových spisech vůbec nejsou studovány (viz např. [Ko], str. 195 a násl.). „Praktická" slovní úloha se u Diofanta vyskytuje jen jedna a pokud se dnes občas objevuje tvrzení, že Diofantos hledal řešení rovnic v oboru celých čísel (např. [HKŠ], str. 200, [Zn], str. 29), pak toto tvrzení není historicky podložené, protože Diofantos hledal řešení rovnic v oboru racionálních kladných čísel.

Lze tedy říci, že Alkuinova sbírka nemá s historickým Diofantem nic společného, a proto Diofanta ponecháme stranou; zájemce o tuto problematiku můžeme upozornit na to, že ve skriptech [Še2] je Diofantovi a jeho *Aritmetice* věnováno více než deset stran a v knize [Ko] více než pět stran. Jedinou výjimku učiníme v posledním paragrafu této kapitoly, kterou věnujeme oné již zmíněné jediné „prakticky“ motivované Diofantově úloze.

Pokud se arabské matematiky týče, v arabské matematice se úlohy vedoucí na soustavy diofantovských rovnic objevují, ale ukázce této problematiky bude věnována samostatná 3. kapitola, proto zde arabskou matematiku ponecháme stranou.

1.4.2. Čínská matematika

Čínská matematika Alkuina určitě přímo neovlivnila, představuje však nejstarší zdroj úloh onoho typu, kterým se Alkuin zabýval. Poměrně podrobný výklad o čínské matematice (takřka 80 stránek) lze najít např. v [Ju] a z tohoto výkladu zde budeme vycházet.

Úlohy vedoucí na diofantovské rovnice se objevují již v základním spisu staré čínské matematiky, který je nazýván *Matematika v devíti knihách*; tento spis shrnuje výsledky dosažené čínskými matematiky v prvním tisíciletí před n.l. Údajně byl sepsán v r. 152 př.n.l., ale nejstarší dochovaná edice pochází až z r. 263 n.l. Z hlediska Alkuinovy sbírky je však zajímavá až tzv. „úloha o drůbeži“, která vznikla pravděpodobně na konci druhého století n.l.[16] ([Ju], str. 81):

Úloha o drůbeži

Kolik je možné za sto mincí koupit kohoutů, slepic a kuřat, je-li jich dohromady sto a stojí-li kohout pět mincí, slepice čtyři mince a čtyři kuřata dohromady jednu minci ?

Označíme-li k = počet kohoutů, s = počet slepic a r počet kuřat, pak úloha vede na soustavu rovnic

$$\begin{aligned} k \ + s \ + r &= 100 \ , \\ 5k + 4s + \frac{r}{4} &= 100 \ . \end{aligned}$$

Čen Luan uvádí řešení $k = 15$, $s = 1$ a $r = 84$; analogicky jako Alkuin neuvažuje řešení $k = 0$, $s = 20$ a $r = 80$. Uvádí i další variantu této úlohy, při které kohout stojí čtyři mince, slepice stojí tři mince a tři kuřata jsou za jednu minci; u této varianty uvádí pouze řešení $k = 8$, $s = 14$, $r = 78$, i když existuje další řešení neobsahující nulu $k = 16$, $s = 3$ a $r = 81$ (a navíc řešení $k = 0$, $s = 25$, $r = 75$).

Podobnost s Alkuinem je očividná. Je ovšem třeba uvést, že čínští matematici došli dále, protože jiný čínský matematik Čang Čchiou-ťien, žijící pravděpodobně rovněž ve druhé polovině 6. století, uvádí další variantu této úlohy, při které kohout stojí pět mincí, slepice tři mince a tři kuřata jednu minci, a uvádí všechna

[16] Někdy se taky nazývá úlohou o ptácích. Nejstarší dochované záznamy o této úloze však pocházejí až z druhé poloviny 6. století od Čen Luana ([Ju], str. 81).

řešení neobsahující nulu:

$$\begin{array}{rcrrr} k & = & 4, & 8, & 12; \\ s & = & 18, & 11, & 4; \\ r & = & 78, & 81, & 84; \end{array}$$

navíc existuje ještě řešení $k = 0$, $s = 25$, $r = 75$.

Úloha o drůbeži vznikla v Číně, odtud pronikla do Indie a dále k Arabům. Arabskou matematikou mohl být Alkuin ovlivněn; jak už bylo řečeno, jednomu spisu arabskému bude věnována 3. kapitola této práce. Nyní se přesuňme ke starým českým početnicím.

1.4.3. Česká úloha

Nejednu úlohu vedoucí na soustavu diofantovských rovnic lze najít i ve starých českých učebnicích. Zájemci o tuto problematiku mohou nahlédnout například do skript [Še], ze kterých zde ocitujeme jednu úlohu.

Úloha pochází z nejstarší české učebnice, která vyšla v r. 1530 v Norimberku. Jejím autorem byl Ondřej Klatovský a její název byl ([Še], str. 31)

Nowé knijžky wo počtech na cyfry a na liny, při tom niekteré welmi užitečné regule a exempla mince rozličné, podle biehu kupeckého krátce a užitečnie sebraná skrze práce a náklad Wondřeje Klatowského.

Příklad, který nás zajímá, je následující ([Še], str. 44):

Úloha o kvasu[17]

26 osob na jednom kvasu propilo 88 penízů bílých. Při tom kvase byli muži, ženy a panny; z mužů jedna osoba dáti měla 6 penízů, z žen 4 penízy a z panen jedna 2 penízy. Otázka: kolik jest při tom cechu aneb kvasu mužů bylo, kolik žen, kolik panen ?

Označíme-li m = počet mužů, z = počet žen a p = počet panen, pak snadno zjistíme, že z příslušné soustavy dvou rovnic o třech neznámých lze získat rovnici

$$z = 18 - 2m ,$$

která vede k následující tabulce všech řešení úlohy:

$$\begin{array}{rcrrrrrrrrrr} m & = & 0, & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9; \\ z & = & 18, & 16, & 14, & 12, & 10, & 8, & 6, & 4, & 2, & 0; \\ p & = & 8, & 9, & 10, & 11, & 12, & 13, & 14, & 15, & 16, & 17\,. \end{array}$$

Klatovský uvádí pouze řešení s 6 muži a s 8 muži.

1.4.4. Eulerova „Algebra“

Leonhard Euler (1707 – 1783) patří nesporně mezi nejvýznamnější postavy v dějinách matematiky. Považujeme proto za vhodné na závěr tohoto malého historického přehledu uvést, že do II. dílu své učebnice *Vollständige Anleitung zur Algebra*, která byla napsána v r. 1767, zařadil i kapitolu obsahující pět

[17] V [Še] nemá úloha žádný název, takže jsme byli nuceni název vymyslet.

úloh vedoucích na nalezení celočíselného nezáporného řešení soustavy dvou diofantovských rovnic[18]. Uvedeme zde pouze první z těchto úloh, protože je nejjednodušší a navíc je velice podobná úloze Ondřeje Klatovského uvedené v předešlé části.

ÚLOHA O HOSPODĚ[19]

Třicet lidí, muži, ženy a děti, utratilo 50 korun v hospodě. Útrata muže jsou 3 koruny, útrata ženy je 2 koruny a dítěte 1 koruna. Kolik bylo mužů, žen a dětí?

Úloha je natolik podobná úloze Ondřeje Klatovského, že nepovažujeme za nutné podrobněji ji rozebírat. Analogicky jako u Klatovského vede k rovnici

$$z = 20 - 2m$$

a tabulka všech možných řešení u Eulera vypadá takto:

$$\begin{array}{ccccccccccccc} m & = & 0, & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9, & 10; \\ z & = & 20, & 18, & 16, & 14, & 12, & 10, & 8, & 6, & 4, & 2, & 0; \\ d & = & 10, & 11, & 12, & 13, & 14, & 15, & 16, & 17, & 18, & 19, & 20\,. \end{array}$$

1.4.5. Jedna Diofantova úloha

V Diofantově „Aritmetice“ je uvedena jediná úloha, která svým zadáním připomíná úlohy Alkuinovy a Metrodorovy, z hlediska matematického stojí však daleko výše. Jedná se o 33. úlohu z 5. knihy „Aritmetiky“ (ve vydání [WD] je na str. 249) a její zadání je následující:

Dva druhy vína smísil zkušený muž: máz lepšího je za osm drachem, horšího za pět. Co za oba druhy zaplatil, je čtvercové číslo; přidáš-li k tomuto čtverci dané číslo, obdržíš jiný čtverec a jeho strana ti dává celkové množství vína, které smísil. Nuže, můj chlapče, zjisti mi, kolik lepšího druhu a kolik horšího ten člověk smísil.

Zadání má jeden háček: neříká se v něm, čemu má být rovno ono „dané číslo“, které má být přidáno k ceně vína; až z Diofantova řešení se ukáže, že toto číslo má být rovno 60.

Při řešení této úlohy je nutné mít na paměti fakt, že Diofant ve své „Aritmetice“ řeší rovnice v oboru kladných racionálních čísel, nikoli v oboru kladných celých čísel, jak se dnes někdy mylně soudí. Z toho pak plyne (jak ostatně bude vidět na našem příkladu), že úloha může mít i nekonečně mnoho řešení; je ovšem otázkou, zda si toho Diofant byl vědom.

Základní myšlenku Diofantova postupu při řešení dané úlohy (podle [WD]) lze v dnešní terminologii vyjádřit takto:

---

[18]Vycházíme zde z anglického vydání [Eu], které je reprintem vydání z r. 1840. Je k němu připojena úvodní stať C. Truesdella z r. 1972, ve které se uvádí (str. XXXIII), že tato Eulerova učebnice je po Eukleidových „Základech“ nejčtenější matematickou knihou v historii; odtud také přebíráme údaj o roku vzniku této Eulerovy knihy.

[19]V [Eu] nemá úloha žádný název, takže jsme byli nuceni název vymyslet.

Označme x celkový počet mázů (tj. v zadání „celkové množství vína“). Pokud v zadání položíme „dané číslo“ $= 60$ (jak to dělá Diofant ve svém řešení), pak ze zadání plyne

$$x^2 - 60 = \text{zaplacená částka} = (x-y)^2 \ ,$$

kde y je další neznámá. Z této rovnice dostáváme, že

$$x = \frac{y^2+60}{2y} \ . \tag{3}$$

Z cenových relací plyne, že celkový počet mázů musí být větší než 1/8 zaplacené částky a menší než 1/5 zaplacené částky[20]. Dostáváme tedy dvě nerovnice

$$\frac{1}{8}(x^2-60) < x < \frac{1}{5}(x^2-60) \ ,$$

z nichž po zaokrouhlení na tři desetinná místa dostáváme

$$10{,}640 < x < 12{,}712 \tag{4}$$

(Diofant uvádí $11 < x < 12$). Víme tedy už, v jakém rozmezí se pohybuje celkové množství vína, řešením ale není jakékoli x z tohoto intervalu, protože navíc musí být splněna podmínka, že zaplacená částka $x^2 - 60$ je čtvercové číslo. Pokračujeme-li tedy v řešení a dosadíme-li do nerovnice (4) za x z rovnice (3), dostaneme po vyřešení vzniklé nerovnice a zaokrouhlení výsledků na dvě desetinná místa vztah

$$17{,}94 < y < 22{,}80$$

(Diofant uvádí $19 < y < 21$). Tím je řešení v podstatě skončeno, neboť množina všech možných řešení dané úlohy je určena množinou všech čísel y z uvedeného intervalu[21]. Z rovnice (3) známe celkový počet mázů x, známe i zaplacenou částku $x^2 - 60$ a máme zaručeno, že je rovna čtvercovému číslu $(x-y)^2$; k dokončení úlohy stačí označit třeba x_1 počet mázů vína pětidrachmového, x_2 počet mázů vína osmidrachmového a řešit soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= \text{počet mázů} \ , \\ 5x_1 + 8x_2 &= \text{zaplacená částka} \ . \end{aligned}$$

Diofant řeší jediný případ; klade $y = 20$ a dostává postupně celkový počet mázů $x = \frac{23}{2}$, zaplacenou částku $x^2 - 60 = \frac{289}{4}$, počet mázů pětidrachmového vína $x_1 = \frac{79}{12}$ a počet mázů osmidrachmového vína $x_2 = \frac{59}{12}$.

---

[20] Rovnost nepřipouštíme, protože – jak už bylo řečeno v části věnované Alkuinovi – v tehdejší době nebyla uvažována řešení s některou složkou rovnou nule.

[21] U Diofanta samozřejmě číslo = kladné racionální číslo.

1.5. Úlohy na posloupnosti

Úlohy tohoto typu se vyskytují v Alkuinově sbírce pouze dvě; uvedeme je zde se stručným komentářem.

13. Úloha o králi a jeho vojsku

Nějaký král nařídil svému sluhovi sebrat ze třiceti vesnic vojsko takovým způsobem, že z každé vesnice vezme tolik mužů, kolik do ní vstoupilo. Šel tedy sám do první vesnice, do druhé šel s dalším, tedy do třetí šli čtyři. Řekni, kdo můžeš, kolik mužů bylo sebráno z oněch třiceti vesnic.

Z Alkuinova výsledku je zřejmé, že králův sluha je zahrnut do počtu vojáků, takže výsledek je $2^{30} = 1\ 073\ 741\ 824$. Alkuin zde neuvádí pouze výsledek, ale předvádí i výpočet spočívající v tom, že počítá postupně počet mužů odcházejících z první, druhé, … , třicáté vesnice, a to (pochopitelně) v římských číslicích. Konečný výsledek u Alkuina má tedy tvar

$$\textit{milies LXXIII mille milia } \overline{DCCXLI}\ DCCCXXIIII\ .$$

Problematika zápisu „velkých“ čísel pomocí římských číslic není jednoduchá a různí autoři volili různé způsoby zápisu. Protože se jedná o zápis nepoziční, musely být vyšší řády buď nějak označeny graficky (v našem příkladu pruhem nad tisícovkami) nebo vypsány slovně; podrobnosti lze najít v [Fr].

42. Úloha o žebříku majícím sto příčlí

Jeden žebřík měl sto příčlí. Na prvním seděl jeden holub, na druhém dva, na třetím tři, na čtvrtém čtyři, na pátém pět, a tak na všech příčlích až do stého. Řekni, kdo můžeš, kolik bylo celkem holubů.

Alkuin uvádí návod k řešení spočívající v tom, že počet holubů na prvním příčli + počet holubů na 99. příčli = 100, počet holubů na druhém příčli + počet holubů na 98. příčli = 100, atd., a padesátý a stý příčel nemají žádný do páru. Celkový počet holubů tedy je 5050 (v Alkuinově zápisu $\overline{V}$L).

1.6. Geometrické úlohy

Alkuinovy geometrické úlohy představují velice různorodý soubor od úloh zcela elementárních až po úlohy, které představují pravděpodobně historicky první výskyt velice obtížných problémů zařazovaných dnes do kombinatorické geometrie; proto zde budou rozděleny do několika podskupin.

1.6.1. Jednoduché úlohy na dělení obdélníků

9. ÚLOHA O SUKNU

Mám sukno, které má na délku 100 loktů[22] a na šířku 80 loktů. Chci z něj dělením zhotovit pláště tak, aby každý díl měl na délku 5 loktů a na šířku 4 lokty. Řekni, žádám, mudrci, kolik plášťů z něj lze zhotovit.

10. ÚLOHA O PLÁTNU

Mám lněné plátno dlouhé 60 loktů, široké 40 loktů. Chci je rozdělit na části tak, aby každá část měla na délku 6 loktů a na šířku 4, ať stačí na obvyklou tuniku. Ať řekne, kdo chce, kolik tunik z něj lze zhotovit.

21. ÚLOHA O POLI A OVCÍCH NA NĚM UMÍSTĚNÝCH

Je pole, které má na délku 200 stop[23] a na šířku 100 stop. Chci na ně umístit ovce a to tak, aby každá ovce měla na délku 5 stop a na šířku 4 stopy. Ať řekne, žádám, kdo může, kolik ovcí tam může být umístěno.

Všechny tři úlohy jsou tak jednoduché, že nevyžadují žádného komentáře. Alkuin u všech nalezl správné výsledky: v úloze č. 9 lze zhotovit 400 plášťů, v úloze č. 10 lze zhotovit 100 tunik, na pole v úloze č. 21 lze umístit 1000 ovcí.

1.6.2. Úlohy na výpočet obsahů

22. ÚLOHA O STŘECHOVITÉM POLI

Je střechovité pole, které má na jedné straně 100 perticae[24] a na druhé straně 100 perticae a na přední straně 50 perticae a uprostřed 60 perticae a na zadní straně 50 perticae. Ať řekne, kdo může, kolik aripenni[25] musí obsahovat.

Aluinovo zadání není zcela jasné. V překladech [GF, HS] se chápe tak, že dané pole má tvar obdélníka 50 x 100 *perticae*, ke kterému je buď na jedné delší straně přidán rovnoramenný trojúhelník s výškou 10 *perticae* (což podle našeho názoru dobře odpovídá zadání *„střechovité“ pole*, nebo jsou na obou delších stranách přidány rovnoramenné trojúhelníky s výškou 5 perticae.

23. ÚLOHA O ČTYŘÚHELNÍKOVÉM POLI

Je čtyřúhelníkové pole, které má na jedné straně 30 perticae a na druhé 32 perticae a vpředu 34 perticae a vzadu 32 perticae. Ať řekne, kdo může, kolik aripenni v něm musí být obsaženo.

Alkuin zde zřejmě předpokládá, že zadáním všech čtyř stran čtyřúhelníka je čtyřúhelník a jeho obsah plně určen, což (bohužel) není pravda.

---

[22] Podle [EA, SAK] 1 loket = 1,5 stopy = 44,4 cm.

[23] Podle [EA, SAK] 1 římská stopa = 29,6 cm.

[24] Podle [GF] 1 *pertica* = 10 stop. V [Bě] je termín *pertica* přeložen termínem *prut*, který však byl v českých zemích roven osmnácti stopám, proto jsme se rozhodli nechat v textu úlohy původní termín *pertica*.

[25] Pdle [GF] 1 *aripennus* = (12 *perticae*)^2 = 14 400 čtverečných stop, což je polovina plošné jednotky zvané *iugerum*, česky *jitro*. Český ekvivalent termínu *aripennus* jsme nenašli, proto necháváme v textu úlohy původní termín.

24. Úloha o trojúhelníkovém poli

Je trojúhelníkové pole, které má na jedné straně 30 perticae a na druhé 30 perticae a vpředu 18 perticae. Ať řekne, kdo může, kolik aripenni musí obsahovat.

25. Úloha o kruhovém poli

Je kruhové pole, které má obvod 400 perticae. Řekni, kolik aripenni musí obsahovat.

Z dnešního hlediska se jedná o elementární úlohy nevyžadující komentáře. Z historického hlediska jsou všechny tyto úlohy podrobně komentovány v překladech [GF, HS] a nepovažujeme za nutné tyto komentáře opisovat, poznamenejme proto jenom, že všechna Alkuinova řešení jsou z dnešního hlediska špatná. Základní Alkuinův problém je v tom, že k výpočtům používá vzorců, které lze v nejlepším případě považovat za přibližné:

– obsah jakéhokoli čtyřúhelníka o stranách (po řadě) a, b, c, d počítá podle vzorce

$$P = \frac{a+c}{2} \cdot \frac{b+d}{2} ,$$

který je přesný pouze pro čtverec a obdélník[26];

- obsah rovnoramenného trojúhelníka s rameny r a základnou z počítá podle varianty předešlého vzorce

$$P = r \cdot \frac{z}{2} ;$$

- pokud se obsahu kruhu o daném obvodu týče, ve [Fo1] jsou uvedena dvě řešení; při prvním řešení je obsah kruhu o daném obvodu počítán jako obsah čtverce o stejném obvodu, což odpovídá hodnotě $\pi = 4$, při druhém řešení je použito postupu odpovídajícího hodnotě $\pi = 3$.

Úlohy samy o sobě nejsou nijak zajímavé a kompletní text původních řešení je uveden v poslední kapitole této práce, proto nepovažujeme za nutné dále se těmito úlohami zabývat.

1.6.3. Zadání kombinatorických úloh

27. Úloha o čtyřúhelníkovém městě

Je čtyřúhelníkové město, které má jednu stranu tisíc sto stop a druhou stranu tisíc stop, vpředu 600 stop a vzadu 600 stop. Chci do něj umístit obydlí tak, aby každý dům měl na délku 40 stop a na šířku 30 stop. Ať řekne, kdo je schopen, kolik domů musí být vzato.

Geometricky není zadání tvaru města jednoznačné. V překladech [GF, HS] se předpokládá, že město má tvar rovnoramenného lichoběžníka a tento předpoklad se nám jeví jako racionální, takže se ho přidržíme i v našem komentáři.

[26] V komentáři k překladu [GF] na str. 289 je tento vzorec nazýván *Edfu-Formel* podle místa jeho výskytu v egyptských památkách; byl používán v zeměměřičské praxi a odtud se mohl dostat k Alkuinovi.

28. ÚLOHA O TROJÚHELNÍKOVÉM MĚSTĚ

Je trojúhelníkové město, které má jednu stranu 100 stop a další stranu 100 stop a vpředu 90 stop. Chci v něm postavit domy a to tak, aby každý dům měl na délku 20 stop a na šířku 10 stop. Ať řekne, kdo může, kolik domů musí být vzato.

29. ÚLOHA O KRUHOVÉM MĚSTĚ

Je kruhové město, které má obvod 8000 stop. Ať řekne, kdo může, kolik domů je třeba vzít, aby každý dům měl na délku 30 stop a na šířku 20 stop.

30. ÚLOHA O BAZILICE

Je bazilika, která má na délku 240 stop a na šířku 120 stop. Jedna cihla v její vydlážděné podlaze má délku 23 uncí, to jest jednu stopu a 11 uncí, a šířku 12 uncí, to jest jednu stopu. Ať řekne, kdo chce, kolik cihel je třeba do ní vložit.

31. ÚLOHA O SKLADIŠTI VÍNA[27]

Je skladiště vína, které má na délku 100 stop a na šířku 64 stop. Ať řekne, kdo může, kolik beček je třeba vzít, a to tak, že každá má na délku 7 stop a na šířku, to jest uprostřed, 4 stopy, a jeden průchod má 4 stopy.

Ze zadání není jasné, zda mezi bečkami je právě jeden průchod nebo zda je mezi nimi více průchodů. Při diskusi na letní škole ve Velkém Meziříčí bylo konstatováno, že z technického hlediska stačí jedna ulička, protože bečky mohou být konzumovány postupně od uličky, která se v průběhu konzumace postupně rozšiřuje, jak je však vidět z latinského textu uvedeného v poslední kapitole, objevila se i řešení uvažující více uliček.

1.6.4. Komentář ke kombinatorickým úlohám

Podle našeho názoru představuje tato skupina úloh nejobtížnější část Alkuinovy sbírky a je zajímavá i z hlediska dnešní matematiky. Tuto skupinu úloh lze dále rozdělit na dvě části: úlohy č. 27 – 29, které jsou složitější, a úlohy č. 30 – 31, které představují jisté zobecnění úloh řešených v části 1.6.1. Zatímco úlohy č. 30 – 31 řeší Alkuin správně[28], u úloh č. 27 – 29 lze Alkuinova řešení zcela ponechat stranou; jeho postup řešení těchto úloh spočívá v tom, že podle přibližných vztahů uvedených v části 1.6.2 vypočítá obsah „velké“ plochy (města) a „malé“ plochy (domu) a dělením obsahu „velké“ plochy obsahem „malé“ plochy dojde k výsledku[29]. Z dnešního hlediska je jasné, že uvedeným postupem získáme horní odhad hodnoty řešení; pokud se však přesné hodnoty řešení týče,

[27] V překladech [GF, HS] se mluví o vinném sklepu, ale podle slovníku [GW] se zdá, že to neodpovídá původnímu termínu *canava*.

[28] Z dnešního hlediska bychom sice měli poznamenat, že Alkuinovo řešení je správné pouze za jistého doplňujícího předpokladu, ale tento zamlčený předpoklad se asi Alkuinovi jevil natolik přirozený, že nepovažoval za nutné uvádět ho; k této otázce se vrátíme v dalším výkladu.

[29] Je možné, že Alkuin tušil jistou problematičnost svého postupu, protože v průběhu výpočtu při zaokrouhlování zaokrouhluje vždy dolů, ale Alkuinovo zaokrouhlování je obecně natolik nevyzpytatelné, že z něj nelze dělat žádné závěry.

její nalezení není elementární záležitostí. Protože se domníváme, že při publikování historické sbírky úloh by mělo být publikováno i jejich řešení nebo aspoň (pokud se jedná o úlohy obtížné) rozbor problematiky doplněný odkazy na další literaturu, budeme se úlohám č. 27 – 29 věnovat poněkud podrobněji.

Demonstrujme celou problematiku na úloze č. 27.

V první řadě je nezbytné upřesnit zadání v tom smyslu, že je třeba rozlišit, zda všechny vkládané objekty (domy) jsou vkládány „rovnoběžně“, „stejně orientované“, „v jednom směru“[30]. Pokud se rozhodneme, že všechny domy musí být vloženy „v jednom směru“, pak se jedná – pro zvolený směr kladení – o úlohu sice pracnou, při jejímž řešení nelze vyloučit chyby, ale z matematického hlediska v podstatě elementární.

Zcela odlišná situace nastane, připustíme-li, že domy nemusí být vloženy v jednom směru. Obsah „velkého“ lichoběžníka (města) je 627808,69 čtverečných stop a obsah „malého“ obdélníka (domu) je 1200 čtverečných stop, takže horní odhad pro počet domů ve městě je 523 (přesně 523,17, ale předpokládáme, že počet domů musí být celé číslo). Pokud nám nyní někdo bude tvrdit, že se mu podařilo narovnat do města jistý počet domů nepřekračující tento horní odhad (např. 520 domů, což je výsledek Alkuinův) a nepředvede nám, jak to udělal, pak o správnosti výsledku můžeme mít sebevětší pochybnosti, nejsme však schopni dokázat chybnost uvedeného výsledku[31]. Pokud se pokusíme úlohu sami řešit, pak zjistíme, že pro její řešení není znám žádný algoritmus[32] a jsme tedy odkázáni pouze na svoji intuici; podaří-li se nám daný počet domů (nebo dokonce více) do města narovnat, pak je všechno v pořádku, pokud se nám to však nepodaří, může to svědčit pouze o našich omezených schopnostech, není to však důkazem chybnosti ověřovaného výsledku.

Celá problematika, kterou jsme zde demonstrovali na úloze č. 27, se opakuje i u dalších úloh č. 28 – 31 a nepovažujeme za nutné zabývat se dále obecnými úvahami; podívejme se raději na některé numerické výsledky.

Věnujme se nejprve úlohám č. 27 – 29, u kterých jsou Alkuinovy výsledky v podstatě bezcenné; v nejlepším případě je lze považovat za jistý odhad horního odhadu hodnoty řešení. Autoři německého překladu [GF] se o vlastní řešení těchto úloh nepokusili; v anglickém překladu [HS] jisté výsledky jsou a budou porovnány s výsledky autora tohoto kometáře.

Pokud se úlohy č. 27 týče, v překladu [HS] se píše: *I find I can only get 516 houses in; but by turning the houses the other way I can get 517 in. By having some houses other way I can get 519 in.* Autor tohoto komentáře se musí přiznat, že nebyl zdaleka tak úspěšný; při rovnání domů „naležato“[33] se

---

[30] Z Alkuinových řešení úloh č. 30 a č. 31 je zřejmé, že Alkuin u těchto úloh předpokládal kladení dlaždic a rovnání beček pouze v jednom směru; je to předpoklad přirozený, úlohy však mají smysl i bez tohoto předpokladu. U úloh č. 27 – 29 nelze ani z Alkuinova řešení poznat, jak si Alkuin uspořádání domů ve městě představoval.

[31] Přesně řečeno, autor tohoto komentáře nezná způsob, jakým by bylo možno chybnost výsledku dokázat.

[32] Přesně řečeno, autorovi tohoto komentáře se nepodařilo žádný takový algoritmus nikde najít; literatura, ve které pátral, je uvedena v závěru této kapitoly.

[33] Tj. delší strana domu je rovnoběžná se základnou lichoběžníka.

mu podařilo narovnat jen 489 domů, při rovnání domů „nastojato“[34] se mu podařilo narovnat dokonce jen 482 domů a při kombinaci obou uvedených směrů rovnání se mu podařilo narovnat do města 507 domů. Připomeňme, že horní odhad je 523 domů.

U úlohy č. 28 je horní odhad 20,09 domů. V překladu [HS] se píše: *I can only get 15 houses in, and John Hadley can get 18 in if the walls can be bent slightly.* Podle názoru autora tohoto komentáře je třeba úlohu řešit v přesném geometrickém smyslu a nemá smysl uvažovat o tom, jaké by bylo řešení, kdyby se vhodná stěna vhodně přihnula; z tohoto hlediska má cenu pouze výsledek 15 domů. Autorovi tohoto komentáře se podařilo dosáhnout stejného výsledku, ale při rovnání domů různými směry[35]; pokud byly domy rovnány tak, že jejich delší strana byla rovnoběžná se základnou rovnoramenného trojúhelníka (tj. města) o délce 90 stop, podařilo se autorovi tohoto komentáře narovnat do města jen 12 domů, při rovnání rovnoběžném s ramenem daného trojúhelníka o délce 100 stop byl autorův výsledek 14 domů.

Pokud se úlohy č. 29 týče, horní odhad je 8488,26 domů. Vzhledem k tomu, že město je kruhové a jeho rozměry jsou relativně velké v porovnání s rozměrem domu, zkoušel autor tohoto komentáře pouze rovnoběžné kladení domů a dosáhl výsledku 8342 domů v daném městě. V překladu [HS] se uvádí: *I have fitted in 8307 houses but it is probably possible to fit more in.*

Úlohy 30 a 31 mají odlišný charakter. Jak už bylo řečeno, jsou velice podobné úlohám, kterým jsme se věnovali v části 1.6.1 a liší se od nich pouze tím, že dělení obsahů nevyjde beze zbytku. Pokud navíc doplníme předpoklad, že vkládané objekty (dlaždice, bečky) jsou kladeny rovnoběžně, jsou Alkuinovy výsledky správné.

Úloha č. 30 má z matematického hlediska poněkud odlišný charakter; nejedná se totiž o úlohu týkající se vložení maximálního počtu „malých“ útvarů do „velkého“ útvaru, ale o úlohu týkající se pokrytí „velkého“ útvaru minimálním počtem „malých“ útvarů. Dolní odhad potřebného počtu dlaždic je 15027 (přesně 15026,09, ale předpokládáme, že počet dlaždic musí být celé číslo); při rovnoběžném kladení dlaždic (ať už „nastojato“ nebo „naležato“) je třeba k pokrytí podlahy 15120 dlaždic, což je i výsledek Alkuinův. Připustíme-li kladení dlaždic oběma směry[36], pak podle názoru autora tohoto komentáře k pokrytí stačí 15030 dlaždic.

U úlohy č. 31 se budeme zabývat pouze variantou s jednou uličkou. Horní odhad počtu beček je 214,29; rovnají-li se bečky „naležato“, vejde se do skladiště 210 beček (a to je i výsledek Alkuinův). Podle názoru autora tohoto komentáře se při rovnání beček „nastojato“ vejde do skladiště jen 200 beček, připustíme-li však oba směry rovnání, vejde se dokonce 214 beček, což je maximální možný počet.

Pokud se pokusíme zařadit uvedené Alkuinovy problémy do kontextu současné matematiky, pak se podle našeho názoru jedná o úlohy patřící do oblasti

---

[34] Tj. delší strana domu je kolmá na základnu lichoběžníka.

[35] V anglickém komentáři bohužel údaj o směru rovnání chybí.

[36] Autor tohoto komentáře nevidí žádný důvod technický ani estetický, proč by směr kladení dlaždic nemohl být různý.

kombinatorické geometrie; současné formulace některých problémů z této oblasti lze nalézt např. v knihách [DCG], [DCM], [HCG]. Připustíme-li v Alkuinových úlohách vkládání domů (dlaždic, beček) v různých směrech (a na základě Alkuinova zadání nevidíme žádný důvod, proč by kladení v různých směrech mělo být vyloučené), pak se podle našeho názoru jedná o úlohy obtížné i z hlediska současné matematiky.

1.7. Úlohy vedoucí na lineární rovnici o jedné neznámé

1.7.1. Zadání

2. Úloha o muži procházejícím se po cestě

Nějaký muž procházející se po cestě viděl jiné lidi jdoucí proti němu a řekl jim: Chtěl jsem, aby vás bylo bývalo ještě jednou tolik, kolik vás je, a polovina z poloviny (onoho dvojnásobku), *a opět polovina poloviny* (z poloviny onoho dvojnásobku)*; pak by vás bylo bývalo i se mnou sto. Ať řekne, kdo chce, kolik jich bylo, které muž viděl.*

3. Úloha o dvou pocestných pozorujících čápy

Dva muži procházející se po cestě viděli čápy a říkali si mezi sebou: Kolik jich je ? Když se o jejich počtu poradili, řekli: Kdyby jich bylo ještě jednou tolik a ještě potřetí tolik a polovina třetiny (onoho trojnásobku)*, po přidání dvou by jich bylo sto. Ať řekne, kdo může, kolik jich bylo, které pocestní pozorovali.*

4. Úloha o člověku a koních pasoucích se na poli

Nějaký muž viděl koně pasoucí se na poli a vyslovil přání: Kéž by byli bývali mí a bylo jich ještě jednou tolik a polovina poloviny (onoho dvojnásobku)*, jistě bych se chlubil sto koňmi. Ať rozhodne, kdo chce, kolik pasoucích se koní viděl onen člověk.*

36. Úloha o starci zdravícím chlapce

Nějaký stařec pozdravil chlapce, kterému řekl: „Kdybys žil, synu, kdybys žil,“ pravil, „kolik jsi žil a ještě tolik a třikrát tolik a kdyby ti bůh dal jeden z mých roků, dovršil bys sto let.“ Ať rozřeší, kdo může, kolik let tenkrát měl onen chlapec.

40. Úloha o muži a ovcích pasoucích se na kopci[37]

Nějaký muž viděl ovce pasoucí se na kopci a řekl: „Kdybych (jich) měl tolik a ještě tolik a polovinu poloviny a z této poloviny ještě polovinu, tak bych vstoupil do svého domu společně s nimi jako stý.“ Ať rozřeší, kdo může, kolik viděl pasoucích se ovcí.

44. Úloha o chlapci zdravícím otce

Nějaký chlapec pozdravil otce: „Buď pozdraven,“ pravil, „otče.“ Na to otec: „Buď zdráv, synu. Ať žiješ, kolik jsi žil, a tento dvojnásobek roků ztrojnásobíš

[37] Z hlediska matematické formulace je tato úloha totožná s úlohou č. 2.

a přidej jeden z mých roků a budeš mít sto let.“ Ať řekne, kdo může, kolik let tenkrát měl onen chlapec.

45. ÚLOHA O HOLUBICI

Holubice sedící na stromě viděla jiné letící (holubice) a řekla jim: „Kdybych viděla ještě tolik a potřetí tolik, pak by jich společně se mnou bylo sto.“ Ať řekne, kdo může, kolik holubic letělo na začátku.

48. ÚLOHA O MUŽI, KTERÝ POTKAL ŽÁKY

Nějaký muž potkal žáky a řekl jim: „Kolik vás je ve škole ?“ Jeden z nich mu odpověděl řka: „Nechci ti to říci. Ty nás spočítej dvakrát, vynásob třemi, pak rozděl na čtyři části. Čtvrtina počtu, když přidáš mě samého, naplní číslo sto.“ Ať řekne, kdo může, kolik jich bylo, které muž potkal na procházce.

1.7.2. Komentář

Uvedené úlohy jsou z matematického hlediska elementární. Asi největší problém v těchto úlohách představují Alkuinovy ne zcela jasné slovní formulace zadání; naštěstí lze vždy z Alkuinových řešení zpětně zjistit, jak vlastně byla úloha míněna.

Všechny uvedené úlohy lze formálně zapsat ve tvaru lineárních rovnic o jedné neznámé, při jejichž řešení je podle našeho názoru hlavním „technickým“ problémem sečtení několika zlomků. Aby bylo zadání zcela jasné, uvedeme zde pro každou úlohu příslušnou rovnici a Alkuinovo řešení úlohy.

ÚLOHA Č. 2: $2x + \frac{2x}{4} + \frac{2x}{8} + 1 = 100$, $x = 36$.

ÚLOHA Č. 3: $3x + \frac{3x}{3}\frac{1}{2} + 2 = 100$, $x = 28$.

ÚLOHA Č. 4: $2x + \frac{2x}{4} = 100$, $x = 40$.

ÚLOHA Č. 36: $((x.2)2)3 + 1 = 100$, $x = 8$ let a 3 měsíce.

ÚLOHA Č. 40: $2x + \frac{2x}{4} + \frac{2x}{8} + 1 = 100$, $x = 36$.

ÚLOHA Č. 44: $3.2x + 1 = 100$, $x = 16$ let a 6 měsíců.

ÚLOHA Č. 45: $3x + 1 = 100$, $x = 33$.

ÚLOHA Č. 48: $\frac{2x.3}{4} + 1 = 100$, $x = 66$.

1.8. Převádění jednotek

Úlohy na převádění jednotek se objevují ve školské matematice dodnes, proto jsme je zde vyčlenili jako samostatnou skupinu.

1. ÚLOHA O HLEMÝŽDI

Hlemýžď byl od vlaštovky pozván na svačinu ve vzdálenosti jedné galské míle. Hlemýžď však nemohl za den ujít více než jednu unci stopy. Ať řekne, kdo by chtěl, za kolik dní by hlemýžď dorazil na onu svačinu.[38]

[38]Podle [GF] 1 galská míle (*leuva*) = 1500 dvojkroků (*passus*) = cca 2,25 km, 1 dvojkrok = 5 stop (*pes*), 1 stopa = 12 uncí.

46. Úloha o nalezeném měšci

Nějaký člověk jdoucí po cestě nalezl měšec se dvěma talenty. Viděli to nějací jiní (lidé) a řekli mu: „Bratře, dej nám část svého nálezu." On odmítl a nechtěl jim nic dát. Oni ho však napadli, roztrhli mu měšec a každý si vzal 50 zlatých. A když (on) potom viděl, že se nemůže ubránit, vztáhl ruku a uchvátil 50 zlatých. Ať řekne, kdo chce, kolik bylo lidí.[39]

50. Jiná úloha

Žádám, ať řekne, kdo může, kolik sextarii *obsahuje sto* metra *vína nebo kolik* meri *má těchže sto* metra.[40]

Domníváme se, že úlohy nevyžadují komentáře. Alkuinův výsledek u první úlohy je 90000 dní, u úlohy č. 46 je výsledek 216 mužů, u úlohy č. 50 je výsledek 100 *metra* = 4800 *sextarii* = 28800 *meri*.

1.9. Různé početní úlohy

Následující úlohy se nám nepodařilo zařadit do žádné větší skupiny, proto připojíme stručný komentář ke každé z nich.

7. Úloha o míse vážící 30 liber

Mísa, která vážila 30 liber čili 600 solidi[41] *je vyrobena ze zlata, stříbra, mosazi a cínu. Stříbra má třikrát více než zlata, mosazi má třikrát více než stříbra a cínu třikrát více než mosazi. Ať řekne, kdo může, kolik každého kovu obsahuje.*

Označíme-li x množství použitého zlata, pak úloha vede na rovnici $x + 3x + 9x + 27x = 600$ a ze zjištěného množství zlata (15 *solidi*) se stanoví množství dalších kovů. Z matematického hlediska by snad bylo možné tuto úlohu tématicky zařadit do naší kapitoly 1.7, ale charakter této úlohy se nám zdál odlišný.

8. Úloha o sudu

Je sud, který má tři trubky (vývody) a obsahuje 100 metretae, *z nichž každá má 3 měřice. Z počtu měřic třetina a šestina teče první trubkou, druhou pouze třetina, třetí jenom šestina. Ať řekne, kdo chce, kolik* sextarií *proteklo každou trubkou.*[42].

Z matematického hlediska by snad bylo možné zařadit tuto úlohu tématicky do naší kapitoly 1.8, ale protože je zde ještě navíc vyžadováno dělení, zařadili jsme úlohu zvlášť. Podle Alkuina proteče první trubkou 3600 sextarií, druhou 2400 a třetí 1200 sextarií.

---

[39]Podle Alkuinova řešení 1 talent = 75 liber, 1 libra = 72 zlatých.

[40]Podle [GF], str. 296, je 1 metrum = 48 sextarii, 1 merus = 3 sextarii, 1 sextarius = asi 0,5 litrů; v Alkuinově řešení je však počítáno 1 sextarius = 6 *meri* ! České překlady názvů použitých jednotek se nám nepodařilo najít, proto ponecháváme v textu původní termíny.

[41]Překlad názvu této jednotky se nám nepodařilo nikde najít; 1 římská libra = původně 273 g, později 327 g [EA, SAK].

[42]Překlady termínů *metreta* a *sextarius* se nám nepodařilo najít; podle [GF] 1 měřice = 24 sextarií = cca 12 litrů.

12. Úloha o otci a jeho třech synech

Nějaký zemřelý otec zanechal jako dědictví třem synům třicet skleněných lahviček, z nichž deset bylo plných oleje, dalších deset do poloviny, třetích deset bylo prázdných. Ať rozdělí, kdo může, olej i lahvičky, aby každému ze tří synů připadlo stejně jak lahviček, tak oleje.

Podle našeho názoru se jedná spíše o jakousi „matematickou hádanku“ než o matematickou úlohu; podle Alkuina jeden syn dostane deset lahví naplněných do poloviny a zbývající dva synové dostanou po pěti lahvích plných a pěti lahvích prázdných.

15. Úloha o mužovi

Žádám tě, abys mi řekl, kolik brázd má na svém poli vyoraných muž, když na obou koncích pole udělal tři obraty.

Snadno se zjistí (úvahou, náčrtem), že na poli bude vyoráno sedm brázd; podle našeho názoru se jedná o jakýsi jednoduchý „chyták“.

16. Úloha o mužích vedoucích voly

Dva muži vedli po cestě voly a jeden z nich řekl druhému: Dej mi dva voly a budu mít tolik volů, kolik ty máš. Ale ten odpověděl: Dej mi, řekl, i ty dva voly a budu mít dvakrát tolik, kolik máš ty. Ať řekne, kdo by chtěl, kolik bylo volů, které každý z nich měl.

Jedná se o variantu známé Métrodórovy úlohy č. 45, která byla připisována dokonce Eukleidovi (viz [Ko], str. 140). Alkuinova úloha má bohužel matoucí formulaci a teprve z řešení se pozná, jak ji Alkuin mínil; první muž nejprve dva voly dostane, takže oba muži mají stejně, ale pak dá druhému dva voly zpátky (čímž se situace vrátí do původního stavu) a druhý muž má dvakrát tolik volů jako první (což byl původní stav, ve kterém měl první muž 4 voly a druhý 8 volů).[43]

26. Úloha o poli, běžícím psu a prchajícím zajíci

Je pole, které má délku 150 stop Na jednom konci stál pes, na druhém zajíc. Pak začal pes běžet za zajícem. Avšak zatímco pes jedním skokem urazil 9 stop, zajíc překonal 7 stop. Řekni, kdo můžeš, kolik stop a skoků udělali pronásledující pes nebo prchající zajíc, než je chycen.

Při řešení úlohy se samozřejmě předpokládá, že frekvence skoků je u obou zvířat stejná; podle Alkuina pes i zajíc udělají 75 skoků. Úloha je ve školní matematice klasická a jistě nevyžaduje komentáře; snad by ji bylo možné zařadit do naší kapitoly 1.7, protože její řešení lze hledat pomocí lineární rovnice, ale charakter této úlohy se nám zdál odlišný.

[43] Podle našeho názoru lze úlohu chápat i jinak, což by vedlo k řešení, při kterém první muž má 10 volů a druhý 14.

37. Úloha o muži, který chtěl postavit dům

Nějaký muž, který chtěl postavit dům, najal 6 řemeslníků, z nichž bylo 5 mistrů a 1 učedník. A bylo dohodnuto mezi tím, který chtěl stavět, a řemeslníky, že za každý den jim bude dána mzda 25 denárů a to tak, že učedník obdrží polovinu z toho, co obdrží každý z mistrů. Ať řekne, kdo může, kolik každý z nich dostane za jeden den.

Označíme-li x mzdu jednoho mistra, lze úlohu snadno zapsat ve tvaru rovnice $5x + \frac{x}{2} = 25$, takže z tohoto hlediska by úloha mohla patřit do naší kapitoly 1.7, ale charakter této úlohy se nám zdál odlišný. Alkuinův výsledek je $x = 4 + \frac{6}{11}$.

41. Úloha o vepřínu a prasnici

Nějaký otec rodiny postavil nový čtyřrohý vepřín, do kterého umístil prasnici, která porodila uprostřed vepřína 7 selat, z nichž každé společně s matkou, která je osmá, porodilo v každém rohu 7 (selat). A tato opět se všemi potomky uprostřed vepřína porodila 7 (selat). Ať řekne, kdo chce, kolik bylo prasat společně s matkou.

Obáváme se, že bez přečtení Alkuinova řešení je tato úloha úplně nejasná. Úloha je míněna takto: 8 prasat, která jsou na začátku uprostřed vepřína, se v každém rohu vepřína zosminásobí a poslední zosminásobení proběhne nakonec opět uprostřed vepřína, takže výsledný počet je $8^6 = 262144$ prasat, což je poměrně úctyhodný počet.[44]

43. Úloha o vepřích

Nějaký člověk měl 300 vepřů (nebo 30 vepřů) a nařídil je porazit ve třech dnech tak, aby každý den byl poražen lichý počet vepřů. Má říci, kdo může, jak lze porazit takovým způsobem 300 nebo 30 vepřů ve třech dnech.

Nebudeme se zde zabývat otázkou, zda je vhodné zadávat žákům bez předchozího varování úlohy, které nemají řešení; rozhodně to není příliš obvyklé a lze proto považovat za překvapivé, že se v Alkuinově sbírce jedna taková úloha objevuje. Je to právě tato úloha[45] a Akuin věděl, že nemá řešení; podle jeho názoru má úloha sloužit jen ke kárání chlapců[46].

49. Úloha o kolářích

Sedm kolářů udělalo po sedmi kolech. Ať řekne, kdo chce, kolik vozů postavili.

I v Akuinově době měly vozy čtyři kola, takže bylo postaveno 12 vozů a jedno kolo zbylo.

[44] Alkuinovo řešení se poněkud liší od zadání, pokud se lokalizace rozmnožování prasat týče, ale konečný efekt je stejný.

[45] [EZ], str. 150 (IX/23): *Když se několik lichých čísel sečte a počet jejich jest lichý, též celek bude lichý.*

[46] *Haec fabula est tantum ad pueros increpandos.*

52. ÚLOHA O OTCI RODINY

Nějaký otec rodiny přikázal dopravit 90 měřic obilí ze svého domu do jiného, který byl vzdálen 30 galských mílí, a to takovým způsobem, že všechno obilí bude dopraveno jedním velbloudem ve třech cestách a při každé cestě bude neseno 30 měřic, přičemž velbloud na každou galskou míli sežere jednu měřici[47]*. Ať řekne, kdo chce, kolik měřic zbylo.*

Alkuinovo řešení je následující: velbloud půjde dvakrát jen na dvacátou míli a pokaždé ponese od startu třicet měřic, z nichž dvacet cestou sežere a deset uloží na oné dvacáté míli. Při třetí cestě sebere na dvacáté míli oněch odložených dvacet měřic a dojde do cíle, přičemž ještě deset měřic sežere, takže do cíle donese dvacet měřic.

Tento typ úloh není triviální a je studován i v dnešní matematice jako tzv. „jeep problem“ v operačním výzkumu (viz [Ob]).

53. ÚLOHA O PŘEDSTAVENÉM KLÁŠTERA S DVANÁCTI MNICHY

Nějaký představený kláštera měl dvanáct mnichů. Zavolal správce svého domu, dal mu 204 vajec a nařídil, aby dal každému stejně z jejich společné dávky. A nařídil, aby dal mezi pět kněží 85 vajec a mezi čtyři jáhny 68 (vajec) a mezi tři lektory 51 (vajec). Žádám, ať řekne, kdo může, kolik vajec každému připadlo, aby nic nezbylo ani nechybělo, ale aby všichni, jak bylo shora řečeno, dostali stejným dílem.

Protože je k disposici 204 vajec a každý z dvanácti mnichů má dostat stejný počet, je zřejmé, že výsledek je $204 : 12 = 17$ vajec pro každého mnicha; zbývající text zadání úlohu nijak neovlivní. Malý komentář k různým svěcením je připojen k úloze č. 47 v paragrafu 1.3.1.

1.10. Úlohy s nematematickou základní úvahou

Do této kapitoly jsme zahrnuli tři Alkuinovy úlohy, ve kterých je řešení (tj. výpočet) proveden až na základě úvahy, která je podle našeho názoru zcela nematematická. Ke každé úloze připojujeme samostatný komentář s Alkuinovým řešením.

6. ÚLOHA O DVOU OBCHODNÍCÍCH MAJÍCÍCH SPOLEČNÝCH 100 ZLATÝCH

Byli dva obchodníci mající společných 100 zlatých, za které koupili vepře. Koupili po dvou zlatých pět vepřů, chtěli je vykrmit a znovu se ziskem prodat. Když viděli, že nemají čas na krmení vepřů a nejsou schopni je v zimní době pást, pokusili se je prodat se ziskem, ale nemohli, protože se jim nedařilo prodat je jinak, než za kolik je nakoupili, to jest pět vepřů za dva zlaté. Když to zjistili, řekli si: Rozdělme si je. Rozdělili je tedy a prodali tak, jak nakoupili, a měli zisk. Ať řekne, kdo je schopen, kolik bylo vepřů a jak lze rozdělením a prodejem dosáhnout zisku, kterého nebylo možno dosáhnout společným prodejem.

Alkuinovo řešení je následující:

[47] Z Alkuinova řešení plyne důležitý fakt, že velbloud žere jen tehdy, když nese náklad. Když nic nenese, tak nežere !

Pokud se počtu vepřů týče, je jasné, že jich bylo 250; při dělení si jich každý obchodník vzal 125. První obchodník prodával tři vepře za 1 zlatý (byla to horší jakost), druhý prodával dva vepře za 1 zlatý (byla to lepší jakost); tím splnili podmínku prodávat je tak, jak nakoupili (5 vepřů za 2 zlaté). První obchodník utržil 41 zlatých a 8 denárů[48], druhý utržil 62 zlatých a 6 denárů, takže jejich společný zisk činil 4 zlaté a 2 denáry. Základ obchodního úspěchu je prostý; původně se obchodovalo s péticemi vepřů, ale po rozdělení bylo „levných" trojic méně než „drahých" dvojic.

35. Úloha o smrti jednoho otce rodiny

Nějaký otec rodiny zanechal děti a majetek 960 zlatých a těhotnou manželku. Nařídil, kdyby se jí narodil chlapec, aby dostal z celkového množství tři čtvrtiny, to jest 9 uncí[49], a matka aby dostala jednu čtvrtinu, to jest 3 unce. Kdyby se však narodila dcera, aby dostala 7 uncí a matka aby dostala 5 uncí. Stalo se však, že se narodila dvojčata, a to chlapec a děvče. Ať rozřeší, kdo může, kolik dostane matka a kolik syn a kolik dcera.

Jedná se o známou úlohu, která pochází pravděpodobně z římského práva[50]. Z našeho hlediska se nám na této úloze jeví jako pozoruhodné dvě věci.

První zajímavost vidíme v tom, že úloha se objevuje (s jiným číselným zadáním) i v nejstarší české tištěné početnici Ondřeje Klatovského z r. 1530 (viz [Še], str. 42[51]), odkud ji převzal do jednoho svého *Tentamen* i Stanislav Vydra (viz [Vy]). Klatovský (a tedy i Vydra) přebírají řešení římské, které vychází (pro Alkuinovo číselné zadání) z následující úvahy:

Při narození syna mají být podíly syna a matky v poměru 3 : 1, při narození dcery mají být podíly dcery a matky v poměru 7 : 5. Protože se narodil syn i dcera, bude dědictví rozděleno mezi syna, matku a dceru v poměru 3 : 1 : 7/5, což odpovídá poměru 15 : 5 : 7. Syn tedy obdrží 15/27 dědictví, matka 5/27 a dcera 7/27.

Druhou zajímavost vidíme v tom, že Alkuinovo řešení je zcela odlišné od řešení římského. Podle Alkuina je třeba při narození dvou dětí nejprve rozdělit celou částku na dvě poloviny a potom každou polovinu dělit v poměru odpovídajícím pohlaví narozeného dítěte. Syn tedy obdrží tři čtvrtiny z poloviny dědictví, což je 9/24 celého dědictví, dcera sedm dvanáctin z poloviny dědictví, což je 7/24 celého dědictví, a matka jednak jednu čtvrtinu z poloviny za narození syna, jednak pět dvanáctin z poloviny za narození dcery, což je celkem 8/24 celého dědictví.[52]

---

[48] 1 zlatý = 12 denárů.

[49] Zde je termínu *unce* užito ve významu „jedna dvanáctina celku".

[50] Podle [Ca], str. 523, ji řešil např. římský právník Salvius Iulianus ve 2. stol. n. l. (údaje o něm jsou např. v [EA], [SAK]).

[51] Bohužel je zde v řešení chyba a chybí jakýkoli komentář, takže úloha se jeví jako nesrozumitelná.

[52] Alkuin řeší úlohu v jednotkách zvaných *libra*, přičemž 1 libra = 20 zlatých. Celé dědictví činí 48 liber; syn tedy dostane 18 liber, dcera 14 liber a matka 16 liber. Při řešení „římském" by syn dostal 26,666 liber, dcera 12,444 liber a matka 8,888 liber; zbytek padne na zaokrouhlovací chyby.

Skutečnost, že Alkuinovo řešení je zcela odlišné od řešení podaného římskými právníky, se nám jeví jako překvapivá; vzniká otázka, zda v tom lze spatřovat odraz odlišného právního vědomí v době Karla Velikého nebo zda se jedná o pouhou „matematickou“ konstrukci, která měla Alkuinovi usnadnit řešení problému.

51. ÚLOHA O VÍNU V NÁDOBKÁCH ROZDĚLENÉM OD OTCE

Nějaký umírající otec rodiny zanechal svým čtyřem synům čtyři nádobky s vínem. V jedné nádobě bylo 40 měřic, ve druhé 30, ve třetí 20 a ve čtvrté 10 (měřic). Zavolal správce svého domu a řekl: „Tyto čtyři nádobky s vínem zanechaným uvnitř rozděl mezi mé čtyři syny a to tak, aby každý z nich měl stejný díl jak vína, tak nádob.“ Ať řekne, kdo chápe, jakým způsobem je třeba rozdělit, aby všichni z toho mohli dostat stejně.

Alkuinovo řešení je následující:

K disposici je celkem 100 měřic vína, každý syn tedy má dostat 25 měřic. V první nádobě je 40 měřic a ve čtvrté 10 měřic vína, to se sleje do jedné nádoby a potom rozdělí napůl; stejně se postupuje i s vínem ve druhé a třetí nádobě.

Základní myšlenka řešení spočívá v předpokladu, že lze víno slévat a potom („od oka“) dělit napůl.

1.11. Úlohy zcela nematematické

Do této kapitoly jsme zahrnuli jednak tři úlohy týkající se (podle našeho názoru poněkud uměle vykonstruovaných) příbuzenských vztahů, na závěr uvádíme jednu úlohu, která má (podle našeho názoru) spíš charakter hádanky. U všech úloh uvedeme pouze Alkuinovy odpovědi, protože nás nenapadlo nic jiného, co by se s těmito úlohami dalo dělat[53].

11. ÚLOHA O DVOU MUŽÍCH, Z NICHŽ KAŽDÝ SI BERE JEDNU SESTRU

Kdyby si dva muži vzali za manželky navzájem sestry jeden druhého, řekni, žádám, jakým příbuzenstvím budou spojeni jejich synové.

Podle Alkuina budou synové navzájem bratranci.

11a. ÚLOHA O DVOU MUŽÍCH, Z NICHŽ KAŽDÝ SI BERE JEDNU MATKU

Kdyby si dva muži vzali za manželky podobně matky jeden druhého, jakým příbuzenstvím budou spojeni jejich synové.

Podle Alkuina budou synové navzájem současně strýci a synovci.

11b. ÚLOHA O OTCI A SYNOVI A VDOVĚ A JEJÍ DCEŘI

Jestliže otec a syn uvedou do manželství pozůstalou vdovu a její dceru, a to sice tak, že syn si vezme matku a otec dceru, řekni, ptám se, jakým příbuzenstvím budou spojeni synové, kteří by jimi byli zplozeni.

[53] V německém překladu [GF] jsou při komentování úlohy 11a příbuzenské vztahy znázorněny pomocí grafu.

Alkuinova odpověď je stejná jako v předešlé úloze: synové budou navzájem současně strýci a synovci.

14. Úloha o volovi

Kolik kroků udělá v poslední brázdě vůl, který celý den orá ?

Alkuinova odpověď je jednoduchá: vůl neudělá v poslední brázdě žádný krok, protože jde před pluhem.

———-

Úlohou o volovi náš překlad Alkuinovy sbírky končí.

———-

1.12. Přehled zařazení Alkuinových úloh do paragrafů této kapitoly

Pro čtenáře, který bude chtít porovnat překlad s původním textem, uvádíme na závěr této kapitoly dva přehledy o zařazení Alkuinových úloh do jednotlivých paragrafů této kapitoly.

1.12.1. Uspořádání podle Alkuinova číslování úloh

Alkuin	Paragraf	Alkuin	Paragraf	Alkuin	Paragraf
1	8	21	6	41	9
2	7	22	6	42	5
3	7	23	6	43	9
4	7	24	6	44	7
5	3	25	6	45	7
6	10	26	9	46	8
7	9	27	6	47	3
8	9	28	6	48	7
9	6	29	6	49	9
10	6	30	6	50	8
11	11	31	6	51	10
12	9	32	3	52	9
13	5	33	3	53	9
14	11	34	3		
15	9	35	10		
16	9	36	7		
17	2	37	9		
18	2	38	3		
19	2	39	3		
20	2	40	7		

1.12.1. Uspořádání podle paragrafů

2. Převoznické úlohy: Alkuin č. 17, 18, 19, 20

3. Úlohy vedoucí na soustavu diofantovských rovnic: Alkuin č. 5, 32, 33, 34, 38, 39, 47

5. Úlohy na posloupnosti: Alkuin č. 13, 42

6. Geometrické úlohy: Alkuin č. 9, 10, 21, 22, 23, 24, 25, 27, 28, 29, 30, 31

7. Úlohy vedoucí na jednu lineární rovnici o jedné neznámé: Alkuin č. 2, 3, 4, 36, 40, 44, 45, 48

8. Převádění jednotek: Alkuin č. 1, 46, 50

9. Různé početní úlohy: Alkuin č. 7, 8, 12, 15, 16, 26, 37, 41, 43, 49, 52, 53

10. Úlohy s nematematickou základní úvahou: Alkuin č. 6, 35, 51

11. Úlohy zcela nematematické: Alkuin č. 11, 14.

1.13. Alkuin a jeho doba

Uzavřeme výklad o Alkuinově sbírce shrnutím základních historických faktů souvisejících s Alkuinovým životem a dílem[54].

Koncem 5. století (podle tradice r. 494 pod vedením krále Cedrica) došlo k invazi germánských kmenů Anglů, Sasů a Jutů do Británie; původní keltské obyvatelstvo bylo vytlačeno na poloostrov Cornwall, do Walesu, Bretaně a Skotska. V r. 664 se na církevním sněmu ve Whitby prosadilo křesťanství v římskokatolické podobě proti původní podobě irsko-keltské, což vedlo k rozvoji klášterů opírajících se o benediktinskou řeholi[55]. Jedním z klášterů, založených v oné době, byl klášter v Jarrow-on-Tyne, ve kterém strávil takřka celý svůj život jeden z nejvýznamnějších učenců oné doby Beda Ctihodný[56], jehož dílo po několik století výrazně ovlivňovalo evropskou vzdělanost.

Jedním z Bedových žáků byl Egbert, který se v r. 735 stal arcibiskupem v Yorku a při zdejší katedrále založil školu pro syny místních šlechticů. Do této školy vstoupil již v dětském věku Alkuin[57] (narozený okolo r. 735) a byl zde

[54] Pokud se údajů o Alkuinovi týče, vycházíme zde z prací [Le, Th].

[55] Křesťanské mnišství prodělalo dlouhý vývoj, avšak za počátek řeholního života v dnešním pojetí bývá považováno založení kláštera na Monte Cassinu Benediktem z Nursie (asi 480 – asi 545) v r. 529. Základní myšlenka benediktinské řehole bývá vyjadřována zásadou *Ora et labora*, tj. „Modli se a pracuj“, přičemž prací byla míněna v první řadě práce fyzická, později však i činnost intelektuální; díky tomu se benediktinské kláštery staly nejen středisky náboženskými, ale přispívaly i k rozvoji zemědělství a staly se významnými centry vzdělanosti. Benedikt z Nursie byl později prohlášen katolickou církví za svatého; svátek má 11. července. S jeho zásadami se lze seznámit např v [RB].

[56] O věhlasu, kterému se Beda Ctihodný (Beda Venerabilis) (asi 673 – 735) těšil, svědčí např. skutečnost, že autorství sbírky *Propositiones ad acuendos iuvenes*, kterou jsme se v této kapitole zabývali, bylo dlouho připisováno jemu; navíc byl považován i za autora další malé sbírky matematických úloh, o které bude krátce pojednáno v následujícím paragrafu. Později byl prohlášen katolickou církví za svatého; svátek má 25. května. Základní informace o něm lze nalézt např. v [Jo].

[57] Z tohoto hlediska považujeme za zajímavý fakt uvedený v [Le] (str. 5), že Alkuin nikdy nedosáhl vyššího než jáhenského svěcení; malý komentář k různým svěcením je připojen k Alkuinově úloze č. 47 v paragrafu 1.3.1.

vychováván a vzděláván Egbertovým žákem Albertem; lze tedy říci, že Alkuin byl vychováván a vzděláván v duchu Bedova myšlenkového odkazu. Po Egbertově smrti v r. 766 se Albert stal arcibiskupem v Yorku a Alkuin spolu se svým spolužákem Eanbaldem se stali vedoucími činiteli katedrální školy a knihovny. Okolo r. 780[58] se Eanbald stal arcibiskupem v Yorku a Alkuin byl vyslán do Říma, aby pro něj vyzvedl pallium[59]. Na zpáteční cestě se v r. 781 v Parmě setkal s Karlem Velikým[60] a ten ho pozval ke svému dvoru; Alkuin dokončil své církevní poslání a v r. 782 vyhověl pozvání Karla Velikého[61].

Karel Veliký (747 – 814) byl od r. 768 králem francké říše[62] a byl v oné době pravděpodobně nejmocnějším evropským panovníkem; jeho říše sahala od Pyrenejí až k Labi a (v dnešní terminologii) pohraničním českým horám[63]; centrem jeho říše se postupně staly Cáchy (Aachen). Z našeho hlediska je podstatné, že Karel Veliký neměl jenom ambice mocenské, ale snažil se o obnovení římských tradic a vzdělanosti ve své říši, takže období jeho vlády bývá v kulturních dějinách nazýváno karolinskou renesancí. Na jeho dvůr byli zváni nejvýznamnější vzdělanci oné doby, kteří věnovali pozornost i rozšíření vzdělání vedoucích vrstev prostřednictvím dvorské akademie a škol při klášterech a dómech[64]. V zavádění a organizaci tohoto školského systému je dnes spatřován hlavní význam Alkuinova působení na dvoře Karla Velikého a je možné, že námi studovaná sbírka *Propositiones ad acuendos iuvenes* vznikla právě v souvislosti s těmito Alkuinovými školskými aktivitami.

Jak už bylo řečeno, v r. 789 a znovu v letech 790 – 793 Alkuin navštívil svou vlast a je pravděpodobné, že uvažoval o odchodu z rušné a únavné činnosti na Karlově dvoře. V r. 793 ale začaly vypleněním benediktinského kláštera v Lindisfarne v severní Anglii nájezdy Normanů (Vikingů) z Dánska a Norska na britské ostrovy; v následujícím roce byl napaden Jarrow. Je možné, že právě tyto nájezdy přiměly Alkuina k návratu na dvůr Karla Velikého, nesetrval zde však už dlouho; když se v r. 796 uvolnilo místo opata v klášteře sv. Martina v Tours, požádal Alkuin o toto místo a Karel Veliký mu ho jako odměnu za prokázané služby udělil. Zde Alkuin 19. května 804 zemřel.

[58] [Th] uvádí r. 780, [Le] uvádí r. 778.

[59] Pallium je liturgickým znakem arcibiskupa – metropolity, který je nejen hlavou diecéze, v jejímž čele stojí (tato diecéze se nazývá arcidiecéze), ale má rovněž určitou pravomoc nad biskupy podřízených diecézí, které se nazývají sufragánní. Pallium je bílý pás látky z čisté ovčí vlny s šesti vyšitými černými kříži, který se nosí kolem krku a vpředu i vzadu splývá dolů (podle [Ši]). Tkají ho benediktinky v klášteře sv. Cecílie v Římě z vlny dvou beránků, kteří jsou každoročně k tomuto účelu požehnáni na svátek sv. Anežky (21. ledna) a obětováni na Velký pátek. Hotová pallia pro budoucí papeže a arcibiskupy jsou uložena v chrámu sv. Petra pod hlavním oltářem, u kterého smí sloužit mši pouze papež (podle [BB], str. 275 a násl.).

[60] [Le] uvádí, že to nebylo jejich první setkání, ale neříká, kde se setkali už dříve; v každém případě byl Alkuin v té době už známým učencem.

[61] Do své vlasti se vrátil ještě v letech 789 a 790 – 793.

[62] Římským císařem byl korunován až v r. 800.

[63] V této souvislosti považujeme za vhodné upozornit na české vydání historického životopisu Karla Velikého [VCM].

[64] V knize [Sp], str. 85, se říká, že stopy karolinského školství jsou v Evropě patrné dodnes v odstupňování vyučovacího procesu do tří uzavřených a na sebe navazujících cyklů (dnes škola základní – střední – vysoká).

1.14. Sbírka úloh připisovaná Bedovi Ctihodnému

Považujeme za vhodné připojit k výkladu o Alkuinově sbírce alespoň základní informaci o jiné sbírce úloh, která bývá obvykle nazývána *De arithmeticis propositionibus*; její autorství bývá připisováno Bedovi Ctihodnému, ve skutečnosti však vznikla (zhruba řečeno) na území francké říše. Vycházíme zde z práce [Fo3], která obsahuje kritické vydání textu této sbírky a podrobný komentář.

Sbírka obsahuje čtyři úlohy, z nichž čtvrtá se výrazně liší od předešlých, proto ji později probereme podrobněji.

1.14.1. Tři úlohy na uhodnutí myšleného čísla

První dvě úlohy mají společné téma: řešitel má uhodnout číslo, které si myslí druhá osoba.

První úloha udává následující postup řešení: Myšlené číslo x je třeba násobit třemi a dělit dvěma; pokud výsledkem dělení není celé číslo (tj. pokud číslo x je liché), provede se zaokrouhlení na nejblíže vyšší celé číslo. Tento mezivýsledek se násobí třemi a dělí devíti; celá část výsledku n je oznámena řešiteli a současně je mu sděleno, zda při dělení devíti byl nenulový zbytek. Pokud byl zbytek rovný 0, je $x = 2n$, pokud zbytek byl nenulový, pak byl rovný 6 a $x = 2n + 1$.

Zdůvodnění postupu není složité a přebíráme ho z [Fo3]. Rozlišme dva případy:

a) Myšlené číslo x je sudé, lze tedy psát $x = 2n$. Pak po prvním kroku dostaneme $2n\,\frac{3}{2} = 3n$, z čehož po druhém kroku dostaneme $3n\,\frac{3}{9} = n$, což je v souladu s návodem.

b) Myšlené číslo x je liché, lze tedy psát $x = 2n + 1$. Pak po prvním kroku dostaneme $(2n+1)\,\frac{3}{2} = 3n + \frac{3}{2}$, což po zaokrouhlení nahoru dá $3n + 2$. Z toho po druhém kroku dostaneme $(3n+2)\,\frac{3}{9} = n + \frac{6}{9}$, takže celá část výsledku dělení je n a zbytek je 6, což je opět v souladu s návodem.

Druhá úloha udává složitější postup řešení: Myšlené číslo x je třeba násobit třemi a dělit dvěma; pokud výsledkem dělení není celé číslo, provede se zaokrouhlení na nejblíže vyšší celé číslo. Řešiteli je oznámeno, zda při tomto dělení vznikl zbytek; pokud ano, řešitel si pamatuje jedničku, jinak si pamatuje 0. Výsledek první operace se opět násobí třemi a dělí dvěma; pokud výsledkem dělení není celé číslo, provede se zaokrouhlení na nejblíže vyšší celé číslo. Řešiteli je opět oznámeno, zda při druhém dělení vznikl zbytek; pokud ano, řešitel přičte dvojku k údaji, který si pamatuje z předešlého kroku, pokud ne, řešitel přičte nulu. Výsledek druhé operace se dělí devíti; celá část výsledku n je oznámena řešiteli. Platí $x = 4n +$ údaj, který má řešitel uložený v paměti ze dvou předešlých kroků.

Zdůvodnění postupu je analogické jako v předešlém případu, je však třeba rozebrat čtyři případy podle toho, jaký je zbytek při dělení myšleného čísla x číslem 4.

a) Nechť $x = 4n$. Pak po prvním kroku získáváme $6n$, po druhém $9n$ a po závěrečném dělení devítkou dostáváme n.

b) Nechť $x = 4n + 1$. Pak po prvním kroku dostáváme $6n + \frac{3}{2}$, řešitel si tedy musí pamatovat jedničku a výsledek zaokrouhlíme na $6n + 2$. Z toho dostaneme po dalším kroku $9n + 3$ a z toho po závěrečném dělení devítkou dostáváme jako celou část výsledku n, což podle návodu vede ke správné odpovědi.

c) Nechť $x = 4n + 2$. Pak po prvním kroku dostaneme $6n + 3$ a z toho po druhém kroku dostaneme $9n + \frac{9}{2}$; řešitel si tedy musí pamatovat dvojku. Závěrečné dělení devítkou pak podle návodu vede ke správné odpovědi.

d) Nechť $x = 4n + 3$. Pak se zbytek objeví jak po prvním kroku, tak po druhém kroku, a řešitel si tedy musí pamatovat $1 + 2$, což po závěrečném dělení devítkou vede ke správné odpovědi.

Třetí úloha se sice formálně od předešlých dvou úloh liší, protože řešitel má uhodnout, který den v týdnu si druhá osoba myslí, protože však dny v týdnu jsou označeny čísly, jedná se fakticky pouze o variantu předešlých úloh. Návod k řešení je následující: je-li číslo myšleného dne rovno x, pak toto číslo vynásobíme dvěma, k mezivýsledku přičteme pětku, tento mezivýsledek násobíme pětkou a potom ještě desítkou a od toho odečteme 250; výsledek je oznámen řešiteli. Odpověď je jednoduchá; počet stovek (jinak řečeno: výsledek dělený stem) udává číslo dne x.

Kontrola správnosti postupu je jednoduchá; fakticky počítáme $(2x+5).5.10 - 250 = 100x$.

Podle [Fo3], str. 36, vznikla tato část sbírky na území dnešního západního Německa nebo východní Francie nejpozději v první polovině 9. století, spíše však už ve století osmém, tj. zhruba v Alkuinově době; Alkuin tedy mohl tyto typy úloh znát. I když uhodnutí myšleného čísla patří k nejstarším typům matematických úloh, které byly všeobecně rozšířeny, je uvedená sbírka asi nejstarším západoevropským textem na toto téma ([Fo3], str. 31).

1.14.2. Záporná čísla

Nejpozoruhodnější částí sbírky *De arithmeticis propositionibus* je čtvrtá úloha, která je věnována počítání se zápornými čísly; podle M. Folkertse vznikla tato část sbírky později než předešlé tři úlohy, ale v každém případě dříve než v 10. století ([Fo3], str. 34). Tento Folkertsův názor není všeobecně přijímán[65], soudíme však, že je v práci [Fo3] podložen natolik seriózním rozborem pramenů, že ho nelze přejít bez povšimnutí.

Protože se jedná o text, který je důležitý a přitom málo známý, uvedeme zde nejprve úplný latinský text této úlohy podle [Fo3], str. 41, ale bez poznámkového aparátu z Folkertsovy práce, a tento text potom přeložíme. Pro snadnější četbu latinského textu předem uveďme, že dnešnímu termínu „kladné číslo" odpovídají v latinském textu termíny *verum* nebo *essentes*, resp. *existentes numeri*, dnešnímu termínu „záporné číslo" odpovídají v latinském textu termíny *minus* nebo *non essentes*, resp. *non existentes numeri*.

Latinský text čtvrté úlohy tedy zní:

Verum cum vero facit verum. Minus cum vero facit verum. Verum cum minus facit minus. Minus cum minus facit minus. Verum essentiam, minus nihil significat. Pone summam numeri quam volueris in veri, hoc est essentiae, nomine, et pone aliam summam cuius volueris numeri in adverbii, quod minus dicitur, nomine, quod nihil significare dixi, et confer illas duas summas. Quae

[65] M. Folkerts sám cituje ([Fo3], str. 33) odlišný názor Kurta Vogela.

maior fuerit, vincit minorem et consumit eam iuxta quantitatem magnitudinis suae. Ut verbi gratia: si iungantur duae summae numerorum, una, quae veri nomine, id est essentiae, appellata sit, ut sunt VII, alia, quae minus adverbii nomine vocetur, ut sunt III, hae duae summae numerorum sibi collatae, hoc est essentis et non essentis, quia maior est summa veri quam illius, quae dicitur minus, sicut plus sunt VII quam III, vincit numerum VII verum minus, sed non maiori parte quam vincere potest hoc IIII; valet enim III minus, et VII remanent IIII. Similiter si iungantur III veri nomine et VII minus, quia maior est nihili quam essentiae summa, vincit septenarius non existens ternarium existentem et consumit eum sua non essentia, et remanent de ipso sibi IIII numeri non existentes; et hoc est quod dicitur: iunge III et VII minus, faciunt IIII minus. Si autem III non existentes simul et VII similiter non existentes numeros iunxeris, decem non esse monstrabis. Sicut enim duo veri, hoc est existentes, numeri, ut sunt VII et III, verum, id est existentem, numerum efficiunt, hoc est denarium, sic duo non existentes numerorum summae denominatae, ut sunt III minus et VII minus, X minus faciunt. Valet enim verum efficere et minus non efficere. Iunge III et VII, fiunt X; iterum iunge III minus et VII, fiunt IIII; iunge III et VII minus, fiunt IIII minus; iunge III minus et VII minus, fiunt X minus.

Vzhledem k tomu, že v textu je použito různých termínů k označení kladných a záporných čísel, představuje následující překlad pochopitelně pouze jednu z mnoha možností, jak text přeložit; každý má možnost přeložit si předešlý text způsobem, který sám uzná za vhodný. Naše představa o možné četbě tohoto textu je následující:

Kladné s kladným tvoří kladné. Záporné s kladným tvoří kladné. Kladné se záporným tvoří záporné. Záporné se záporným tvoří záporné. Kladné označuje esenci[66]*, záporné neoznačuje nic*[67]*. Pojmenuj nějakou velikost čísla jako kladnou, to jest jako esenci, a pojmenuj jinou velikost nějakého čísla slovem, které znamená záporné, což neoznačuje nic, jak jsem řekl*[68]*, a spoj obě tyto velikosti. Která bude větší, vítězí nad menší a pohltí ji množstvím své velikosti. Nechť například: jestliže by byly spojeny dvě velikosti čísel, jedna, která je pojmenována jako kladná, to jest jako esence, budiž 7, druhá, která je pojmenována jako záporná, budiž 3, tyto dvě velikosti čísel spojené dohromady, to jest esence a neesence, protože větší je velikost kladného než onoho, které je nazváno záporným, ježto 7 je větší než 3, vítězí kladné číslo 7 nad záporným, ale nemůže zde zvítězit větší částí než 4; působí totiž 3 záporně, a ze 7 zůstane 4. Podobně jestliže by byly spojeny (číslo) 3 kladně pojmenované a 7 záporně, protože větší je velikost ničeho než esence, vítězí neexistující sedmička nad existující trojkou a pohltí ji*

[66]Jsme si vědomi toho, že překlad slova *essentia* může představovat závažný filozofický problém (viz např. [So, Vr]), protože však v tomto textu představuje v podstatě synonymum pro kladné číslo, rozhodli jsme se přenechat filozofické problémy kvalifikovanějším čtenářům a termín *essentia* jenom opisujeme.

[67]Domníváme se, že duchu češtiny zde odpovídají dva zápory, i když je pochopitelně otázka, zda „neoznačovat nic“ a „označovat nic“ je totéž.

[68]Domníváme se, že autor zde termínem *summa numeri*, který překládáme jako „velikost čísla“, má intuitivně na mysli asi to, čemu dnes říkáme „absolutní hodnota čísla“ a z toho pak (v dnešní terminologii) připsáním znaménka „+“ nebo „−“ vytvoří kladné nebo záporné číslo.

svou ne-esencí, a zůstane z něho samého 4 neexistující; a to je, co se říká: spoj 3 a zápornou 7, vznikne 4 záporná. Kdybys však zároveň spojil čísla 3 neexistující a 7 rovněž neexistující, vyjde neexistující desítka. Tak jako totiž dvě kladná, to jest existující čísla, jako jsou 7 a 3, vytvoří kladné, to jest existující číslo, totiž desítku, tak dvě velikosti čísel pojmenované jako neexistující, jako jsou záporná 3 a záporná 7, vytvoří zápornou 10. Kladné totiž působí utvoření a záporné neutvoření. Spoj 3 a 7, vznikne 10; podruhé spoj záporné 3 a 7, vznikne 4; spoj 3 a zápornou 7, vznikne záporná 4; spoj zápornou 3 a zápornou 7, vznikne záporná 10.

V literatuře se uvádí (viz např. [Ju], str. 46 a 370), že v Evropě přišel jako první s myšlenkou na zavedení záporných čísel Leonardo Pisánský, zvaný Fibonacci (okolo 1170 – po 1240) ve svém spisu *Liber abaci*, který vyšel r. 1202; Fibonacci na záporná čísla narazil při řešení některých úloh a interpretoval je jako dluh. Elementární počítání se zápornými čísly, které je obsahem naší čtvrté úlohy, samozřejmě nelze srovnávat s úlohami, které řešil Fibonacci, zůstává však faktem, že zde máme záporná čísla chápaná jako zcela samostatné objekty, s nimiž lze podle jistých pravidel počítat, a navíc je zde (podle našeho názoru) i jistá snaha tato čísla nějak vysvětlit „filosoficky“; to vše více než 200 let před Fibonaccim.

* * * * *