Extrémy podle Pierra de Fermata

Úloha 1

Určete extrémy funkce $y = x^2 + x + 1$.

Poznámka.
V dalším textu budeme místo místo symbolu e používat symbol t. Vztah „*býti adekvální*“ budeme značit symbolem $\sim$.

Řešení:

$$\begin{aligned} f(x) &\sim f(x+t) \\ x^2 + x + 1 &\sim (x+t)^2 + (x+t) + 1 \\ 0 &\sim 2xt + t^2 + t \\ 0 &\sim t \cdot (2x + 1 + t) \\ 0 &\sim 2x + 1 + t \\ 0 &= 2x + 1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Funkce má minimum v bodě $x = -\frac{1}{2}$.

Úloha 2

Určete extrémy funkce $y = \frac{x}{x^2+1}$.

Řešení:

$$\begin{aligned} f(x) &\sim f(x+t) \\ \frac{x}{x^2+1} &\sim \frac{x+t}{(x+t)^2+1} \\ 0 &\sim -t\frac{x^2+xt-1}{(x+t)^2(x^2+1)} \\ 0 &\sim x^2 + xt - 1 \\ 0 &= x^2 - 1 \Leftrightarrow |x| = 1 \end{aligned}$$

Funkce má extrémy v bodech $x = -1, x = 1$, maximum v bodě $x = 1$ a minimum v bodě $x = -1$.

Úloha 3

Určete extrémy funkce $y = x + \frac{1}{x}$.

Řešení:

$$\begin{aligned} f(x) &\sim f(x+t) \\ x+\frac{1}{x} &\sim x+t+\frac{1}{x+t} \\ 0 &\sim t\frac{x^2+xt-1}{x(x+t)} \\ 0 &\sim x^2+xt-1 \\ 0 &= x^2-1 \Leftrightarrow |x|=1 \end{aligned}$$

Funkce má extrémy v bodech $x=-1, x=1$, maximum v bodě $x=-1$ a minimum v bodě $x=1$.

Úloha 4

Do trojúhelníku se základnou z a výškou v vepište obdélník maximálního obsahu.

Řešení:

Označíme-li rozměry obdélníku x, y tak, jak je uvedeno na obrázku, pak na základě podobnosti trojúhelníků může psáti

$$\frac{v-y}{x}=\frac{v}{z} \Leftrightarrow y=\frac{v}{z}(z-x)$$

Pro obsah trojúhelníku platí

$$S=xy=x\frac{v}{z}(z-x)=vx-\frac{v}{z}x^2$$

$$\begin{aligned} f(x) &\sim f(x+t) \\ vx-\frac{v}{z}x^2 &\sim v(x+t)-\frac{v}{z}(x+t)^2 \\ 0 &\sim t(vz-2vx-vt) \\ 0 &\sim vz-2vx-vt \\ 0 &= vz-2vx \Leftrightarrow x=\frac{z}{2} \end{aligned}$$

Funkce S má maximum pro $x=\frac{z}{2}$. Odpovídající hodnota pro y je $y=\frac{v}{z}(z-x)=\frac{v}{z}(z-\frac{z}{2})=\frac{v}{2}$.

Úloha 5
Do koule o poloměru r vepište kužel maximálního objemu.

Řešení:
Označíme-li poloměr kužele R, pro jeho objem platí $V = \frac{1}{3}\pi R^2 v$.
Zřejmě je $R^2 = r^2 - (r - v)^2 = 2rv - v^2$. Pro objem kužele pak platí

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 v = \frac{1}{3}\pi(2rv - v^2)v = \frac{1}{3}\pi v^2(2r - v).$$

$$\begin{array}{rcl} f(v) & \sim & f(v+t) \\ \frac{1}{3}\pi v^2(2r-v) & \sim & \frac{1}{3}\pi(v+t)^2(2r-v-t) \\ 0 & \sim & t(4rv + 2rt - 3v^2 - 3vt - t^2) \\ 0 & \sim & 4rv + 2rt - 3v^2 - 3vt - t^2 \\ 0 & = & 4rv - 3v^2 \Leftrightarrow v(4r - 3v) = 0. \end{array}$$

Odtud plyne $v = \frac{4}{3}r$. Pro R dostáváme $R = \frac{2\sqrt{2}}{3}r$.