Zápočtová písemka z Geometrie 3
Varianta E

Datum: 30. 5. 2018
Jméno:

1	2	3	Σ

1) (3 × 1 b.) *Zadejte rovnicemi libovolné afinní zobrazení v $\mathcal{A}_3$, která (pokud takové afinní zobrazení neexistuje, podejte stručné vysvětlení, proč):*

(a) *má vlastní číslo 1 a právě jeden samodružný bod;*
(b) *je involutorní a není identita;*
(c) *zobrazuje přímku $p : X = [0,0,0] + t(1,0,0)$ na přímku $p' : X = [2,1,1] + s(3,4,1)$.*

2) *Afinní zobrazení f z $\mathcal{A}_3$ do $\mathcal{A}_3$ je zadáno rovnicemi:*

$$\begin{aligned} f : x' &= 2x \qquad + 2z + 1 \\ y' &= 2x + y + 4z \\ z' &= -x \qquad - z + 2 \end{aligned}$$

(a) (3 b.) *Vypočtěte vlastní čísla a jim příslušné vlastní vektory afinity f.*
(b) (1 b.) *Vyšetřete samodružné body afinity f.*
(c) (2 b.) *Uveďte repér $\mathcal{R}$, ve kterém mají matice afinity f co nejjednodušší možný tvar, a rovnice afinity vůči tomuto repéru.*

3) (4 b.) *Základní afinita v $\mathcal{A}_3$ je dána rovinou samodružných bodů $\alpha : x + 2y - z - 2 = 0$ a párem odpovídajících si bodů $P[-1,1,0]$ a $P'[-2,0,-1]$. Určete rovnice této základní afinity a zdůvodněte, proč je/není tato základní afinita elací.*

Řešení E

1. (a) Neexistuje.
   Věta 2.4.4. Jestliže jednička není vlastním číslem $f : \mathcal{A}_n \to \mathcal{A}_n$, pak má f právě jeden samodružný bod.
   Tj. má-li vl. č. 1, má jiný počet SB než právě jeden.

   (b) involutorní je takové zobrazení, které složeno samo se sebou dá identitu. Jsou to například symetrie podle roviny, přímky nebo bodu.

   (c) zobrazení má zobrazit počátek $[0, 0, 0]$ na nějaký bod p' (například bod $[2, 1, 1]$), čímž je určena matice B. Vektor $e_1 = (1, 0, 0)$ se musí zobrazit na vektor $u = (3, 4, 1)$, resp. nějaký jeho k-násobek, první sloupec matice A tedy budou tvořit souřadnice vektoru u, resp. ku.

2. (a) $\lambda_1 = 0, \mathbf{u}_1 = (-1, -2, 1)$;
   $\lambda_{2,3} = 1, \mathbf{u}_2 = (0, 1, 0), \mathbf{u}_3 = (-2, 0, 1)$;

   (b) Bez samodružných bodů, soustava

$$\begin{aligned} x + 2z &= -1 \\ 2x + 4z &= 0 \\ -x - 2z &= -2 \end{aligned}$$

   nemá řešení.

   (c) Do repéru patří vektory příslušné vlastním číslům, tj. $(-1, -2, 1), (0, 1, 0)$ a $(-2, 0, 1)$. Zobrazení nemá žádný samodružný bod, při žádné volbě počátku repéru tedy nezmizí matice B. V repéru $\mathcal{R}' - \langle [0, 0, 0], (-1, -2, 1), (0, 1, 0), (-2, 0, 1) \rangle$ vyjádření:

$$\begin{aligned} f : x' &= 5 \\ y' &= y + 10 \\ z' &= z - 3 \end{aligned}$$

   Matici B v tomto vyjádření dostaneme například tak, že v původním repéru se počátek P$[0, 0, 0]$ zobrazí na bod P' $[1, 0, 2]$. Tento bod má v novém repéru souřadnice $[5, 10, -3]$.

3.

$$\begin{aligned} f : x' &= 2x + 2y - z - 2 \\ y' &= x \;\; + 3y - z - 2 \\ z' &= x \;\; + 2y \qquad - 2 \end{aligned}$$

Vyjádření získáme pomocí dvojice bodů P, P' a tří nekolineárních bodů ze ze samodružné roviny, tj. například $[2, 0, 0], [0, 1, 0], [0, 0, 2]$.
Zadaná základní afinita není elací, neboť vektor $\overrightarrow{PP'}$ nepatří do zaměření roviny α. Zjištění, zda vektor patří do zaměření, se provádí ve **zhomogenizované** rovnici roviny.